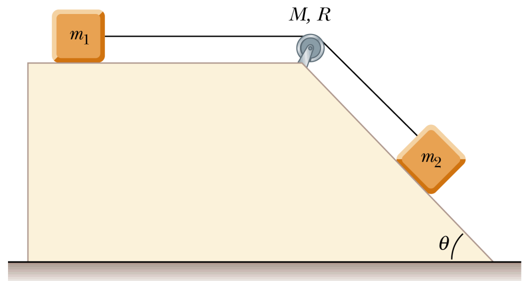
Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Enero de 2014
Problemas (Dos puntos por problema).



Problema 1: Un bloque de masa $m_1 = 2\ \mathrm{kg}$ y un bloque de masa $m_2 = 6\ \mathrm{kg}$ están conectados por una cuerda sin masa sobre una polea en forma de disco sólido que tiene un radio $R = 0,250\ \mathrm{m}$ y masa $M = 10\ \mathrm{kg}$. Se permite que estos bloques se muevan sobre un bloque fijo en forma de cuña de ángulo 30°. El coeficiente de fricción cinética es 0,360 para ambos bloques.

(a) Calcular el momento de inercia de la polea (0,2 puntos). No hace falta demostrar la ecuación del momento de inercia.

(b) Trazar los diagramas de cuerpo libre de ambos bloques y de la polea (0,3 puntos).

(c) Calcular por energías la velocidad del sistema cuando los bloques se han desplazado 1 m (0,5 puntos) (asumid que el sistema parte del reposo).

(d) Determinar la aceleración de los dos bloques y la aceleración angular de la polea (0,5 puntos).

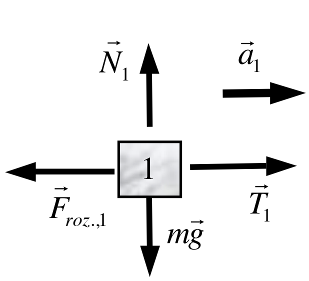
(e) Determinar las tensiones de la cuerda a ambos lados de la polea (0,5 puntos).

Solución:

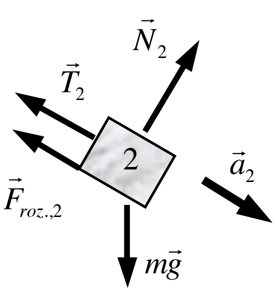
(a) El momento de inercia de la polea vendrá dado por

$$I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}(10\ \mathrm{kg}) \times (0,250\ \mathrm{m})^2 = 0,3125\ \mathrm{kg} \times \mathrm{m}^2 .$$

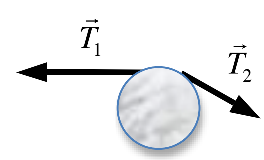
(b) Sin tener en cuenta el peso de la polea y la reacción del enganche sobre ella (que no intervendrán en las ecuaciones de rotación de la polea ya que el brazo de su momento es nulo), entonces



$$m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F}_{roz.,1} = m\vec{a}_1$$



$$m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{roz.,2} = m\vec{a}_2$$



$$T_2R - T_1R = I\alpha$$

(c) Consideremos el sistema formado por la Tierra, las dos masas, la cuerda y la polea. Como hay fuerzas disipativas (el rozamiento), entonces la energía mecánica del sistema cambiará, verificándose que la variación de la energía mecánica es igual al trabajo realizado por las fuerzas de rozamiento.

Si tomamos como cero de energía potencial gravitatoria la base del bloque, y suponemos que la altura del bloque 1 inicialmente es h_1^{ini} y la altura inicial del bloque 2 es h_2^{ini}, entonces la energía mecánica inicial toma el valor

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{mec}}^{\mathrm{ini}} &= K_1 + K_2 + K_{\mathrm{polea}} + U_1^{\mathrm{pot\ grav}} + U_2^{\mathrm{pot\ grav}} \\
&= \frac{1}{2} m_1 v_1^{\mathrm{ini}^2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{\mathrm{ini}^2} + \frac{1}{2} I \omega_{\mathrm{ini}}^2 + m_1 g h_1^{\mathrm{ini}} + m_2 g h_2^{\mathrm{ini}} \\
&= m_1 g h_1^{\mathrm{ini}} + m_2 g h_2^{\mathrm{ini}},
\end{aligned}
$$

donde hemos supuesto que el sistema parte del reposo y las velocidades iniciales de las dos masas y la polea son nulas.

Después de que los bloques hayan recorrido un metro, el objeto 1 seguirá a la misma altura mientras que el objeto 2 se encontrará a una altura con respecto a la base de $h_2^{\mathrm{ini}} - d \sin\theta,$ donde $d = 1\ \mathrm{m}.$ Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{mec}}^{\mathrm{fin}} &= K_1 + K_2 + K_{\mathrm{polea}} + U_1^{\mathrm{pot\ grav}} + U_2^{\mathrm{pot\ grav}} \\
&= \frac{1}{2} m_1 v_1^{\mathrm{fin}^2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{\mathrm{fin}^2} + \frac{1}{2} I \omega_{\mathrm{fin}}^2 + m_1 g h_1^{\mathrm{fin}} + m_2 g h_2^{\mathrm{fin}} \\
&= \frac{1}{2} m_1 v_1^{\mathrm{fin}^2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{\mathrm{fin}^2} + \frac{1}{2} I \omega_{\mathrm{fin}}^2 + m_1 g h_1^{\mathrm{ini}} + m_2 g \left(h_1^{\mathrm{fin}} - d \sin\theta \right),
\end{aligned}
$$

y la variación de la energía mecánica vendrá dada por

$$
\begin{aligned}
\Delta E_{\mathrm{mec}} &= E_{\mathrm{mec}}^{\mathrm{fin}} - E_{\mathrm{mec}}^{\mathrm{ini}} \\
&= \frac{1}{2} m_1 v_1^{\mathrm{fin}^2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{\mathrm{fin}^2} + \frac{1}{2} I \omega_{\mathrm{fin}}^2 - m_2 g d \sin\theta.
\end{aligned}
$$

Esta variación en la energía cinética tiene que ser igual al trabajo disipado por las fuerzas de rozamiento, entonces

$$
W_{\mathrm{roz}} = -\mu m_1 g d - \mu m_2 g \cos\theta d.
$$

Como $\Delta E_{\mathrm{mec}} = W_{\mathrm{roz}},$ entonces

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^{\text{fin}^2} + \frac{1}{2}m_2 v_2^{\text{fin}^2} + \frac{1}{2}I\omega_{\text{fin}}^2 - m_2 gd\sin\theta = -\mu m_1 gd - \mu m_2 gd\cos\theta.$$

Si ahora tenemos en cuenta que, como las cuerdas son inextensibles, el módulo de la velocidad final de los dos cuerpos tiene que ser el mismo ($v_1^{\text{fin}} = v_2^{\text{fin}} \equiv v$) y que $\omega = \frac{v}{R}$, entonces

$$\frac{1}{2}m_1 v^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 - m_2 gd\sin\theta = -\mu m_1 gd - \mu m_2 gd\cos\theta,$$

$$\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M\right)v^2 = -\mu m_1 gd - \mu m_2 gd\cos\theta + m_2 gd\sin\theta$$

$$v = \sqrt{\frac{-\mu m_1 gd - \mu m_2 gd\cos\theta + m_2 gd\sin\theta}{\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M\right)}} = 0{,}786 \text{ m/s.}$$

(d) Para calcular la aceleración común de los dos cuerpos, podemos utilizar los resultados del apartado anterior,

$$v^2 = 2ad \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2}{2d} = 0{,}309 \text{ m/s}^2.$$

Para cada una de las dos masas, la aceleración llevará una dirección paralela al bloque sobre el que se sustentan.

El módulo de la aceleración angular de la polea se puede calcular a partir de

$$\alpha = \frac{a}{R} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1{,}23 \text{ rad/s}^2.$$

Como está girando en el sentido de las agujas del reloj, y siguiendo el criterio convencional de signos (los ángulos crecen en sentido antihorario), su signo sería negativo.

(e) Para calcular las tensiones, descomponemos las fuerzas en los diagramas de cuerpo aislado del apartado (b) según las direcciones de los ejes y aplicamos la segunda ley de Newton.

Para el cuerpo 1, escogemos que el eje x sea horizontal (sentido positivo hacia la derecha) y el eje y vertical (sentido positivo hacia arriba). Si proyectamos las fuerzas a lo largo del eje x,

$$T_1 - F_{\mathrm{roz},1} = m_1 a \quad \Rightarrow \quad T_1 = F_{roz,1} + m_1 a = \mu N_1 + m_1 a = \mu m_1 g + m_1 a = 7{,}674 \text{ N.}$$

Para el cuerpo 2, escogemos que el eje x sea paralelo al plano inclinado (sentido positivo hacia abajo) y el eje y perpendicular al plano inclinado (sentido positivo hacia arriba). Si proyectamos las fuerzas a lo largo del eje x,

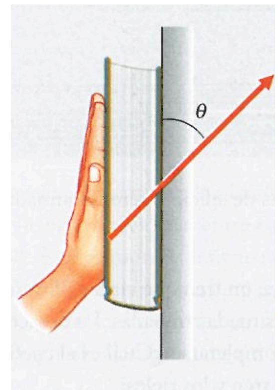
$$m_2 g \sin\theta - T_2 - F_{\mathrm{roz},2} = m_2 a \quad \Rightarrow$$
$$T_2 = m_2 g \sin\theta - F_{\mathrm{roz},2} - m_2 a = m_2 g \sin\theta - \mu N_2 - m_2 a = m_2 g \sin\theta - \mu m_2 g \cos\theta - m_2 a = 9{,}214 \text{ N.}$$

Podemos comprobar que se cumple la tercera condición,

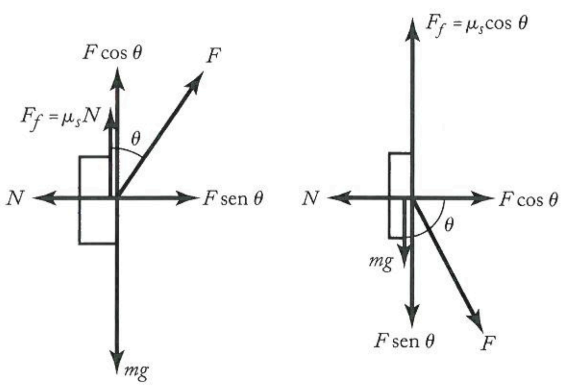
$$T_1 R - T_2 R = (T_1 - T_2) = I\alpha.$$

Como el módulo de $|T_2| > |T_1|$, entonces la aceleración angular es negativa, de acuerdo con el resultado del apartado (d).

Problema 2: Usted sostiene un libro contra la pared apretándolo con su mano. La fuerza forma un ángulo θ con la pared como indica la figura. La masa del libro es m y el coeficiente de fricción estática entre el libro y la pared es μ_s. (a) Dibujad claramente el diagrama de "cuerpo aislado" para el libro. (0,4 puntos). (b) Calculad la magnitud de la fuerza que usted debe ejercer para (apenas) mantener el libro estacionario (que no caiga hacia abajo) si se está empujando con un ángulo inferior a 90° (0,4 puntos). (c) ¿Para qué valor del ángulo θ la magnitud de la fuerza requerida es la más pequeña posible? ¿Cuál es la magnitud de la menor fuerza posible? (0,4 puntos). (d) Si usted empuja a un ángulo mayor de 90°, debe hacerlo muy fuerte para sostener el libro en su lugar. ¿Para qué valor del ángulo se hará imposible sostener en su lugar al libro? (en este último apartado, medir el ángulo entre la fuerza aplicada y el semieje positivo del eje horizontal) (0,8 puntos).



(a) Dependiendo de si el ángulo θ es inferior (panel izquierdo) o superior (panel derecho) a 90°, el diagrama de cuerpo aislado vendrá dado por



(b) Elegimos un sistema de ejes en el que el eje x sea horizontal (sentido positivo hacia la derecha) y el eje y vertical (sentido positivo hacia arriba). En este apartado, asumimos que el ángulo θ es inferior a 90°.

La fuerza de rozamiento estática tendrá un valor $F_f \leq \mu_s N$.

Para un ángulo θ dado, esta fuerza varía dependiendo de cuánto valga el módulo de la fuerza aplicada F

Justo en el límite en el cuál el objeto permanece estacionario (sin aceleración), la fuerza de rozamiento estático toma el valor límite $F_f = \mu_s N$. En ese momento, descomponemos las fuerzas en las componentes horizontal y vertical y aplicamos la segunda ley de Newton.

$$\sum F_x = F\sin\theta - N = 0,$$
$$\sum F_y = -mg + F\cos\theta + F_f = -mg + F\cos\theta + \mu_s N = 0.$$

En la primera ecuación podemos despejar la normal que podemos sustituir en la segunda.

$$N = F\sin\theta,$$
$$-mg + F\cos\theta + \mu_s F\sin\theta = 0.$$

De la segunda de estas ecuaciones podemos despejar el módulo de la fuerza

$$F\left(\cos\theta + \mu_s\sin\theta\right) = mg,$$
$$F = \frac{mg}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta}.$$

(c) La magnitud de la fuerza será mínima cuando el anterior denominador sea máximo. Esto ocurrirá cuando

$$\frac{d}{d\theta}\left(\cos\theta + \mu_s\sin\theta\right) = 0$$

Derivando la expresión anterior e igualando a cero encontramos el valor del ángulo $\theta_{\min}$ para el cuál el módulo de la fuerza es mínimo

$$\frac{d}{d\theta}\left(\cos\theta + \mu_s\sin\theta\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad -\sin\theta_{\min} + \mu_s\cos\theta_{\min} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\sin\theta_{\min}}{\cos\theta_{\min}} = \tan\theta_{\min} = \mu_s.$$
$$\theta_{\min} = \arctan\mu_s.$$

Para comprobar que efectivamente el denominador es un máximo en ese punto, calculamos la derivada segunda para ese ángulo,

$$\left.\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\cos\theta + \mu_s\sin\theta\right)\right|_{\theta_{\min}} = 0 \quad\Rightarrow$$
$$-\cos\theta_{\min} - \mu_s\sin\theta_{\min} = -\cos\theta_{\min} - \frac{\sin\theta_{\min}}{\cos\theta_{\min}}\sin\theta_{\min} = \frac{-\cos^2\theta_{\min} - \sin^2\theta_{\min}}{\cos\theta_{\min}} = \frac{-1}{\cos\theta_{\min}}.$$

Como hemos supuesto que el ángulo es < 90°, el coseno del denominador es positivo y la derivada segunda es negativa. Esto demuestra que efectivamente, el denominador que aparece en la expresión del módulo de la fuerza es máximo en $\theta_{\min}$.

En ese punto, el módulo de la fuerza vale

$$F = \frac{mg}{\cos\theta_{\min} + \mu_s \sin\theta_{\min}} = \frac{mg}{\cos\theta_{\min} + \frac{\sin\theta_{\min}}{\cos\theta_{\min}}\sin\theta_{\min}} = \frac{mg}{\frac{\cos^2\theta_{\min} + \sin^2\theta_{\min}}{\cos\theta_{\min}}} = mg\cos\theta_{\min}.$$

Si queremos escribir el coseno como función de la tangente del ángulo, hacemos uso de la relación trigonométrica

$$\cos\theta_{\min} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta_{\min}}},$$

con lo que

$$F = mg\cos\theta_{\min} = \frac{mg}{\sqrt{1+\tan^2\theta_{\min}}} = \frac{mg}{\sqrt{1+\mu_s^2}}.$$

(d) En este caso, el ángulo es superior a 90° y la componente de la fuerza externa en la dirección vertical apunta hacia abajo. La fuerza de rozamiento estática tomará de nuevo un valor $F_f \le \mu_s N$ y es la única fuerza que tira del libro hacia arriba.

De nuevo, justo en el límite en el cuál el objeto permanece estacionario (sin aceleración), entonces la fuerza de rozamiento estático toma el valor límite $F_f = \mu_s N.$ En ese momento, descomponemos las fuerzas en las componentes horizontal y vertical y aplicamos la segunda ley de Newton.

$$\sum F_x = F\cos\theta - N = 0,$$
$$\sum F_y = -mg - F\sin\theta + F_f = -mg - F\sin\theta + \mu_s N = 0.$$

(en estas ecuaciones, hemos tomado el ángulo θ como el ángulo que forma la fuerza aplicada con el semieje positivo de las x).

De nuevo, despejando la normal en la primera y sustituyendo en la segunda,

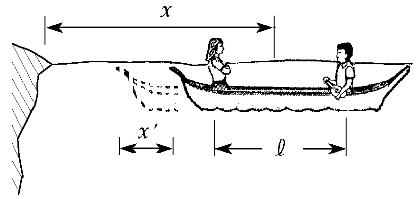
$$N = F\cos\theta,$$
$$mg - F\sin\theta + \mu_s F\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad F = \frac{mg}{(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)}.$$

Si el ángulo va creciendo, el módulo de la fuerza necesaria para mantener el objeto en equilibrio se va haciendo cada vez más grande. Llegará un momento, para un determinado ángulo crítico, en el cual el módulo de la fuerza se hará infinito. Esto ocurre cuando

$$\sin\theta_{\max} - \mu_s \cos\theta_{\max} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_s = \frac{\sin\theta_{\max}}{\cos\theta_{\max}} = \tan\theta_{\max} \quad \Rightarrow \quad \theta_{\max} = \arctan\mu_s$$

Para ángulos mayores será imposible mantener el objeto en equilibrio, por muy grande que sea el módulo de la fuerza aplicada.

Problema 3: Romeo (77,0 kg) entretiene a Julieta (55,0 kg) tocando su guitarra desde la parte trasera de un bote que se encuentra en reposo sobre el agua. Romeo se encuentra a 2,70 m de Julieta, que está en la parte delantera del bote. Después de la serenata, Julieta se mueve cuidadosamente hacia la parte trasera del bote para darle un beso en la mejilla a Romeo. (a) Calcular la posición del centro de masas del sistema Romeo-Julieta-bote antes y después de que Julieta se haya movido (1 punto). (b) ¿Cuánto se desplaza el bote de 80,0 kg de peso hacia la orilla hacia la cuál está orientado? (1 punto).



Solución:

Llamemos x a la distancia que hay desde la orilla hasta el centro de gravedad del bote, l a la longitud del bote y $x^{'}$ a la distancia que se desplaza el bote cuando Julieta se mueve hacia Romeo.

Como no hay fuerzas externas sobre el sistema, el momento total del sistema Julieta-Romeo-bote se conserva. Y como todo el sistema estaba inicialmente en reposo (momento inicial del sistema nulo), entonces el momento será nulo en todo momento. En otras palabras, el centro de masas del sistema permanece fijo.

Antes de que Julieta se moviera hacia Romeo, el centro de masas estaba situado en:

$$x_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{antes}} = \frac{\left[M_{\mathrm{bote}}x + M_{\mathrm{Julieta}}\left(x - \frac{l}{2}\right) + M_{\mathrm{Romeo}}\left(x + \frac{l}{2}\right)\right]}{\left(M_{\mathrm{bote}} + M_{\mathrm{Julieta}} + M_{\mathrm{Romeo}}\right)}.$$

Después de que Julieta se haya movido hasta Romeo, el centro de masas del sistema estará situado en

$$x_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{después}} = \frac{\left[M_{\mathrm{bote}}\left(x - x^{'}\right) + M_{\mathrm{Julieta}}\left(x + \frac{l}{2} - x^{'}\right) + M_{\mathrm{Romeo}}\left(x + \frac{l}{2} - x^{'}\right)\right]}{\left(M_{\mathrm{bote}} + M_{\mathrm{Julieta}} + M_{\mathrm{Romeo}}\right)}.$$

Como la posición del centro de masas no ha podido cambiar durante el proceso, podemos igualar las dos expresiones anteriores

$$\frac{\left[M_{\text{bote}}x+M_{\text{Julieta}}\left(x-\frac{l}{2}\right)+M_{\text{Romeo}}\left(x+\frac{l}{2}\right)\right]}{\left(M_{\text{bote}}+M_{\text{Julieta}}+M_{\text{Romeo}}\right)}=\frac{\left[M_{\text{bote}}\left(x-x^{'}\right)+M_{\text{Julieta}}\left(x+\frac{l}{2}-x^{'}\right)+M_{\text{Romeo}}\left(x+\frac{l}{2}-x^{'}\right)\right]}{\left(M_{\text{bote}}+M_{\text{Julieta}}+M_{\text{Romeo}}\right)},$$

$$M_{\text{bote}}x+M_{\text{Julieta}}\left(x-\frac{l}{2}\right)+M_{\text{Romeo}}\left(x+\frac{l}{2}\right)=M_{\text{bote}}\left(x-x^{'}\right)+M_{\text{Julieta}}\left(x+\frac{l}{2}-x^{'}\right)+M_{\text{Romeo}}\left(x+\frac{l}{2}-x^{'}\right),$$

$$M_{\text{bote}}x^{'}+M_{\text{Julieta}}x^{'}+M_{\text{Romeo}}x^{'}=M_{\text{Julieta}}l,$$

$$x^{'}=\frac{M_{\text{Julieta}}l}{M_{\text{bote}}+M_{\text{Julieta}}+M_{\text{Romeo}}}=0,700\text{ m}.$$