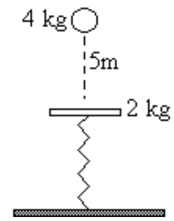
Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Segundo parcial. Enero de 2013
Problemas (Dos puntos por problema).



Problema 1: Un resorte vertical de constante k=1000 N/m sostiene un plato de M = 2 kg de masa. Desde 5 m de altura respecto al plato se deja caer un cuerpo de m = 4 kg que se adhiere a él. Calcular la máxima compresión del resorte.
Nota 1: Tened en cuenta que, al poner el plato sobre el muelle, este ya se comprime una determinada longitud x_0.
Nota 2: Tomad $g = 10\ \text{m/s}^2$.

(Problema tomado de
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/examenes/choques/choques.htm).

Solución:

Primero tenemos en cuenta que, como consecuencia de colocar el plato sobre el muelle, este se comprime un longitud x_0 desde la longitud natural del muelle. Podemos calcularla fácilmente, teniendo en cuenta que en equilibrio la fuerza de recuperación del muelle compensa el peso.

$$kx_0 = mg \Rightarrow \quad x_0 = \frac{mg}{k} = \frac{2\ \text{kg} \times 10\ \text{m/s}^2}{1000\ \text{N/m}} = 0{,}02\ \text{m}.$$

También podemos calcular fácilmente, aplicando el principio de conservación de la energía, la velocidad de la bola justo antes de chocar con la plataforma. Tomamos como nivel nulo de energía potencial gravitatoria la posición de la longitud natural del muelle. Entonces, la posición de la bola antes del impacto con respecto a este nivel es x_1, mientras que en el punto de contacto con el plato, la altura de la bola es $-x_0$. En el enunciado se nos dice cuanto vale la altura de la bola con respecto al plato, es decir,

$$x_1 - \left(-x_0\right) = x_1 + x_0 = h = 5\ \text{m}.$$

La energía mecánica de la bola antes y justo antes del choque tiene que ser la misma,

$$mgx_1 = \frac{1}{2}mv^2 + mg\left(-x_0\right) \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2g\left(x_1 + x_0\right)} = \sqrt{2 \times 10{,}0\ \text{m/s}^2 \times 5\ \text{m}} = 10{,}0\ \text{m/s}.$$

Entonces, se produce un choque inelástico entre la bola y la plataforma. En este choque, se conserva el momento lineal y, tras el mismo, el sistema plato/bola se mueve con la misma velocidad, v_{despues}.

$$mv = (M+m)v_{\text{despues}} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{despues}} = \frac{m}{(M+m)}v = \frac{4\text{ kg}}{(4+2)\text{ kg}}10\text{ m/s} = \frac{20}{3}\text{ m/s.}$$

Justo después del choque, la energía mecánica del sistema bola/plato/muelle es:

$$E_{\text{potencial gravitatoria}} = (M+m)g(-x_0) = -(4+2)\text{ kg}\times 10\text{ m/s}\times 0,2\text{ m} = \text{-12,00 J},$$

$$E_{\text{cinetica}} = \frac{1}{2}(M+m)v_{\text{despues}}^2 = \frac{1}{2}(4+2)\text{ kg}\left(\frac{20}{3}\text{ m/s}\right)^2 = 133,33\text{ J},$$

$$E_{\text{elastica}} = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}\times 1000\text{ N/m}\times(0,2\text{ m})^2 = 20\text{ J.}$$

$$E_{\text{mecanica}} = E_{\text{potencial gravitatoria}} + E_{\text{cinetica}} + E_{\text{potencial elastica}} = 141,33\text{ J.}$$

En el punto de máxima compresión, x, la energía cinética se hace nula. En ese momento,

$$E_{\text{potencial gravitatoria}} = (M+m)g(-x) = -6\text{ kg}\times 10\text{ m/s}^2\times x = -60x\text{ J},$$

$$E_{\text{cinetica}} = 0,$$

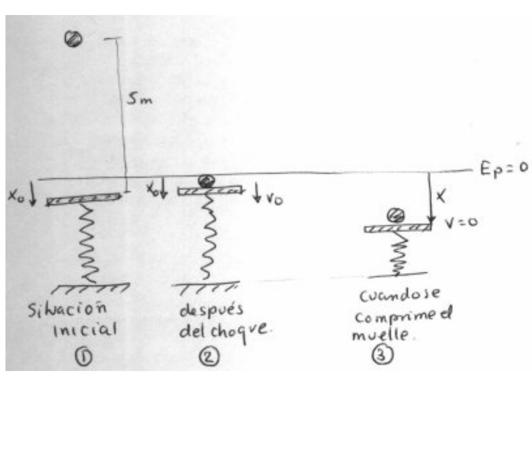
$$E_{\text{elastica}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\times 1000\text{ N/m}\times x^2 = 500\ x^2\text{ J.}$$

$$E_{\text{mecanica}} = E_{\text{potencial gravitatoria}} + E_{\text{cinetica}} + E_{\text{potencial elastica}} = \left(500\ x^2 - 60x\right)\text{ J.}$$

Por el principio de conservación de la energía, las energías justo después del choque y en el momento de máxima compresión deben ser iguales,

$$500x^2 - 60x = 141,33 \quad \Rightarrow \quad x = \begin{cases} 0,59\text{ m} \\ -0,47\text{ m} \end{cases}$$

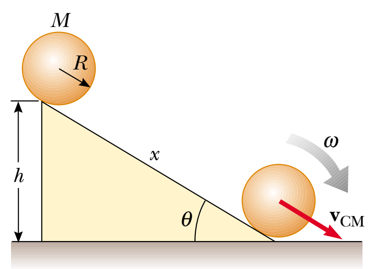
De estas dos soluciones, solo la primera tiene sentido físico (el signo menos debido al hecho de que la posición de máxima compresión está por debajo de nuestra referencia de altura se ha tenido en cuenta directamente al calcular las energías potenciales gravitatorias.



Problema 2: Supongamos que el objeto de la Figura es una esfera sólida que rueda sin deslizar por un plano inclinado:

(a) Calcular la velocidad de su centro de masas cuando llega al punto inferior.

(b) Determinar el módulo de la aceleración de traslación del centro de masas.



Nota 1: El momento de inercia de una esfera maciza con respecto a un eje que pase por el centro es $I_{\mathrm{CM}} = \frac{2}{5} MR^2$

Nota 2: En un movimiento de rodadura puro, la relación que existe entre la velocidad del centro de masas y la velocidad angular es $v_{CM} = R\omega$.

Solución:

(a) Consideremos la esfera y la Tierra como un sistema aislado y utilizaremos el correspondiente modelo de análisis energético. La energía del sistema cuando la esfera está en el extremo superior del plano inclinado es únicamente energía potencial debida a la gravedad. Elegimos como valor de referencia cero para la energía potencial el correspondiente a la situación en la que la esfera ha llegado al punto inferior del plano inclinado. Según esto, y debido a que la energía mecánica se conserva, obtenemos

$$K_i + U_i = K_f + U_f,$$

$$0 + Mgh = \left(\frac{1}{2} M v_{\mathrm{CM},f}^2 + \frac{1}{2} I_{\mathrm{CM}} \omega_f^2 \right) + 0.$$

Utilizando la Ecuación $v_{CM} = R\omega$ para relacionar las velocidades angular y de traslación y sustituyendo el momento de inercia para la esfera, $I_{\mathrm{CM}} = \frac{2}{5} MR^2$, tenemos

$$\begin{aligned} Mgh &= \left(\frac{1}{2} M v_{\mathrm{CM},f}^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5} MR^2 \frac{v_{\mathrm{CM},f}^2}{R^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} M v_{\mathrm{CM},f}^2 + \frac{1}{5} M v_{\mathrm{CM},f}^2 \\ &= \frac{7}{10} M v_{\mathrm{CM},f}^2 . \end{aligned}$$

Despejando la velocidad del centro de masas,

$$v_{\mathrm{CM},f} = \sqrt{\frac{10}{7} gh}.$$

(b) Para calcular la aceleración, debemos darnos cuenta de que la fuerza de gravedad constante debería provocar una aceleración constante del centro de masas de la esfera,

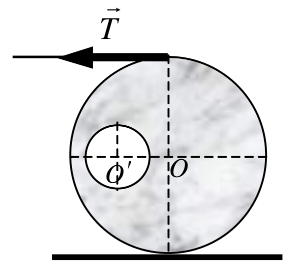
$$v_{\mathrm{CM},f}^2 = v_{\mathrm{CM},i}^2 + 2a_{\mathrm{CM}}\left(x_{\mathrm{CM},f} - x_{\mathrm{CM},i}\right),$$

de donde podemos despejar la aceleración

$$a_{\mathrm{CM}} = \frac{v_{\mathrm{CM},f}^2 - v_{\mathrm{CM},i}^2}{2\left(x_{\mathrm{CM},f} - x_{\mathrm{CM},i}\right)} = \frac{\frac{10}{7} gh - 0}{2\left(\frac{h}{\sin\theta}\right)} = \frac{5}{7} g \sin\theta.$$

Tanto la velocidad como la aceleración del centro de masas son independientes de la masas y del radio de la esfera. Es decir, todas las esferas sólidas homogéneas alcanzarán la misma velocidad y aceleración en un determinado plano inclinado.

Problema 3: El cilindro uniforme de radio a de la figura pesaba en un principio 80 N. Después de taladrársele un agujero cilíndrico de eje paralelo al anterior su peso es de 75 N. (a) Determinar el radio del agujero. (b) Suponiendo que el cilindro no desliza sobre la mesa ¿Cuál debe ser la tensión de la cuerda que le impida moverse en la situación representada?. (c) Determinar el coeficiente de rozamiento mínimo para que no deslice. $\overline{OO'} = \frac{2}{3}a$.



Solución:

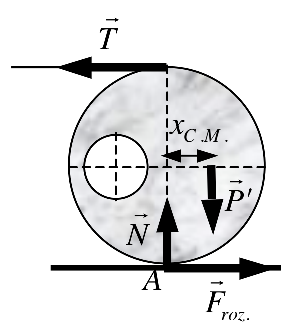
(a) Llamemos P y P' al peso del cilindro antes y después de hacerle el agujero. Llamemos r al radio del agujero, H a la altura del cilindro y ρ a su densidad. Con los datos que nos dan en el enunciado podemos calcular r:

$$P' = \left[\left(\pi a^2 - \pi r^2\right)H\rho\right]g = \pi a^2 H\rho g\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right) = P\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad r = a\sqrt{1-\frac{P'}{P}} = \frac{a}{4}$$

(b) Si ponemos el origen de coordenadas en O podemos calcular donde se encuentra el C.M. del cilindro agujereado (por simetría la coordenada $y_{C.M.}$ será nula). El cálculo de la componente x del centro de masas puede realizarse descomponiendo el cilindro agujereado en dos elementos: un cilindro macizo (por simetría el centro de masas se encuentra en el origen), y un agujero cilíndrico (es decir, suponemos que su masa es negativa) que, por simetría, tiene como coordenada x del centro de masas 2/3 a.

$$x_{C.M.} = \frac{0-(P-P')\left(-\frac{2}{3}a\right)}{P'} = \frac{2}{45}a$$



Aplicando las condiciones de la estática:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_{roz.} - T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = F_{roz.} \\ N - P' = 0 \quad \Rightarrow \quad N = P' \end{cases}$$

$$\sum_i \vec{\tau}_i^A = 0 \quad \Rightarrow \quad T(2a) - P'x_{C.M.} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \left(\frac{x_{C.M.}}{2a}\right)P' = \boxed{\frac{1}{45}\,\text{N}}$$

(c) La fuerza de rozamiento es estática y debe ser menor que su valor máximo:

$$F_{roz.} = T \leq F_{roz.máx.} = \mu N = \mu P' \quad \Rightarrow \quad \mu \geq \frac{T}{P'} = \boxed{2.2\cdot 10^{-2}}$$