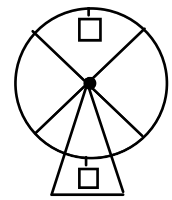
Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Enero de 2013
Problemas (Dos puntos por problema).

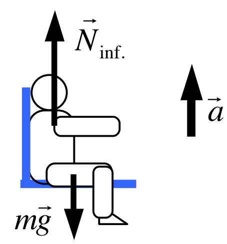
Problema 1 (Primer parcial): El radio de una noria de feria mide 5 m y da una vuelta en 10 s. a) Hállese la diferencia entre los pesos aparentes de un pasajero en los puntos más bajo y más alto, expresada como fracción de peso. b) ¿Cuál debería ser el tiempo correspondiente a una vuelta para que el peso aparente en el punto más alto fuese nulo? c) ¿Cuál sería entonces el peso aparente en el punto inferior?



Solución:

a) El pasajero está realizando un movimiento circular uniforme. La aceleración que sufre es una aceleración centrípeta: $a = \dfrac{v^2}{R} = \omega^2 R = \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 R$

Cuando el pasajero se encuentre en la parte inferior, el diagrama de fuerzas es el que se muestra en la figura. Aplicando la segunda ley de Newton podemos calcular el valor de la fuerza normal, que mide el peso aparente de la persona:

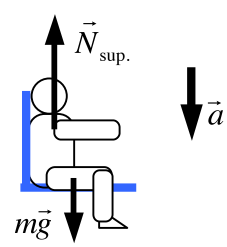


$$\vec{N}_{\text{inf.}} + m\vec{g} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad N_{\text{inf.}} - mg = ma = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

$$\Rightarrow \quad N_{\text{inf.}} = mg + m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \left[1 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R}{g}\right] mg = 1.20\, mg$$

El pasajero se siente un 20% más pesado.

En el caso de que el pasajero se encuentre en la parte superior:



$$\vec{N}_{\text{sup.}} + m\vec{g} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad mg - N_{\text{sup.}} = ma = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

$$\Rightarrow \quad N_{\text{sup.}} = mg - m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \left[1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R}{g}\right] mg = 0.80\, mg$$

El pasajero se siente un 20% más ligero.

La diferencia entre los dos pesos aparentes será: $N_{\text{inf.}} - N_{\text{sup.}} = \boxed{0.40\, mg}$

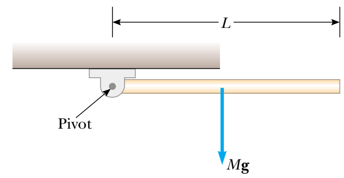
b) Tomando la expresión para $N_{\text{sup.}}$ y anulándola para un periodo de rotación T' :

$$\left[1-\left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2\frac{R}{g}\right]mg=0 \quad \Rightarrow \quad T' = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = \boxed{4.49\,\mathrm{s}}$$

c) En este caso el peso aparente en la posición inferior será:

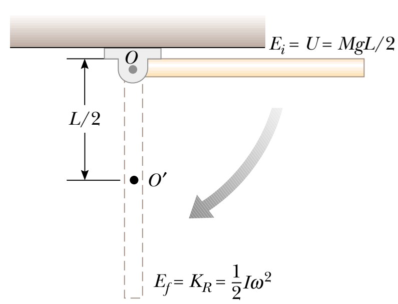
$$N'_{\mathrm{sup.}} = \left[1+\left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2\frac{R}{g}\right]mg = \boxed{2.00\,mg}$$

Problema 2 (Segundo parcial): Una varilla uniforme de longitud L y masa M puede girar libremente y sin rozamiento alrededor de un pivote fijo situado en uno de sus extremos. Se suelta la varilla cuando está en reposo en posición horizontal. (a) ¿cuál es la velocidad angular de la varilla cuando alcanza la posición más baja posible?. (b) Determinar la velocidad tangencial del centro de masas y la velocidad tangencial del punto inferior de la varilla cuando alcanza la posición vertical. (c) ¿Cuál es la aceleración angular de la varilla y la aceleración lineal en su extremo derecho cuando la varilla está en la posición horizontal?. (d) Si colocamos una moneda en el extremo de la varilla y liberamos la misma, ¿permanecerá la moneda en contacto con la varilla?



Solución

(a) Consideramos que la Tierra y la varilla forman un sistema aislado y utilizaremos la versión del modelo del sistema aislado para cálculos de energía. Consideremos la energía mecánica del sistema. Cuando la varilla está en horizontal, no tiene energía cinética de rotación. Definimos esta posición de la varilla como la posición que representa el valor cero de la energía potencial gravitatoria del sistema. Cuando el centro de masas de la varilla está en su posición más baja posible, la energía potencial del sistema es $-MgL/2$ ya la varilla tiene una energía cinética de rotación $1/2I\omega^2$, donde I es el momento de inercia de la varilla con respecto al pivote.



Dado que $I = \dfrac{1}{3}ML^2$ para el caso del modelo geométrico de una varilla larga y delgada, y dado que la energía mecánica se conserva en un sistema aislado, entonces

$$K_i + U_i = K_f + U_f,$$

$$0 + 0 = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}MgL = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2 - \frac{1}{2}MgL,$$

$$\frac{1}{3}L\omega^2 = g \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}.$$

(b) La relación entre la velocidad tangencial y la velocidad angular viene dada por $v = r\,\omega$.

Entonces, para el centro de masas tenemos

$$v_{\mathrm{CM}} = r\,\omega = \frac{L}{2}\omega = \frac{1}{2}\sqrt{3gL}.$$

El punto más bajo de la varilla, dado que se halla a una distancia del pivote que es el doble de la del centro de masas, tiene una velocidad tangencial igual a $2v_{\mathrm{CM}} = \sqrt{3gL}$.

(c) La única fuerza que contribuye al momento con respecto a un eje que pase por el pivote es la fuerza de la gravedad ejercida sobre la varilla, $M\vec{g}$. La fuerza ejercida sobre la varilla por el pivote no ejerce ningún momento con respecto a este eje, ya que el brazo del momento es cero. Para calcular el momento de la fuerza de la gravedad, asumimos que ésta actúa sobre su centro de masas, como se muestra en la figura. La magnitud del momento de la fuerza con respecto a un eje que pase a través del pivote es

$$\tau = Mg\frac{L}{2},$$

Como $\sum \tau = I\alpha$, e $I = \frac{1}{3}ML^2$ para este eje de rotación, obtenemos

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{Mg\frac{L}{2}}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3g}{2L}.$$

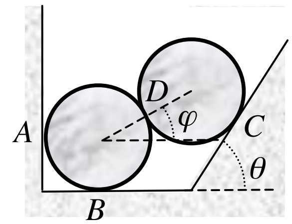
Todos los puntos de la varilla tienen esta misma aceleración angular inicial.

Para encontrar la aceleración lineal en el extremo derecho de la varilla, utilizamos la relación $a_t = \alpha r$, con $r = L$.

$$a_t = \alpha L = \frac{3}{2}g.$$

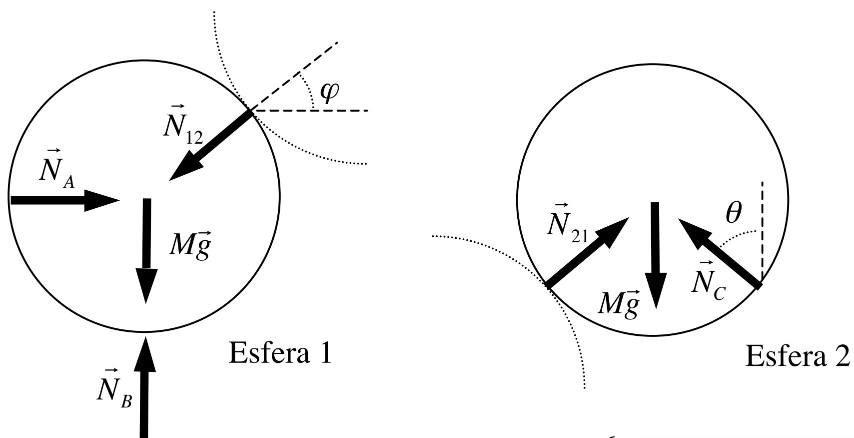
(d) La aceleración inicial de un punto en el extremo de la varilla demuestra que $a_t > g$. Una moneda caerá con aceleración g. Esto significa que si colocamos una moneda en el extremo de la varilla y la liberamos, el extremo de la varilla cae más rápidamente que la moneda y, por lo tanto, esta no permanece en contacto.

Problema 3 (Segundo parcial): Dos esferas de radio R y masa M quedan en equilibrio en la posición indicada. Calcular las fuerzas ejercidas por el suelo sobre las esferas en los puntos de contacto A, B, C, así como la que se ejercen entre si ambas esferas. Datos: $\varphi = 30^o$, $\theta = 60^o$.



Solución:

Dibujando todas las fuerzas, planteando las ecuaciones de la estática para las esferas (obsérvese que las fuerzas que actúan sobre cada esfera son concurrentes en el centro, por lo tanto el momento de fuerzas total sobre cada una de ellas es automáticamente nulo, según el teorema de Varignon y teniendo en cuenta que la resultante en el equilibrio debe anularse). Además, sabemos que $N_{12} = N_{21}$, y por lo tanto:



$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} N_A - N_{12}\cos\varphi = 0 \\ \\ N_B - N_{12}\,\mathrm{sen}\,\varphi - Mg = 0 \\ \\ N_{12}\cos\varphi - N_C\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \\ \\ N_{12}\,\mathrm{sen}\,\varphi + N_C\cos\theta - Mg = 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \boxed{\begin{array}{l} N_A = \left[\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi}{\cos(\theta-\varphi)}\right]Mg = \dfrac{\sqrt{3}}{2}Mg \\ N_B = \left[1 + \dfrac{\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\cos(\theta-\varphi)}\right]Mg = \dfrac{3}{2}Mg \\ N_C = \left[\dfrac{\cos\varphi}{\cos(\theta-\varphi)}\right]Mg = Mg \\ N_{12} = \left[\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos(\theta-\varphi)}\right]Mg = Mg \end{array}} \right.$$

Para la resolución del sistema de ecuaciones, hemos partido de la tercera ecuación,

$$N_{12}\cos\varphi - N_C\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad N_C = \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}N_{12},$$

y sustituido este resultado en la cuarta ecuación,

$$
\begin{aligned}
&N_{12}\sin\varphi+\frac{\cos\varphi\cos\theta}{\sin\theta}N_{12}-Mg=0\Rightarrow\\
&\frac{\sin\varphi\sin\theta+\cos\varphi\cos\theta}{\sin\theta}N_{12}=Mg\Rightarrow\\
&N_{12}=\frac{\sin\theta}{\sin\varphi\sin\theta+\cos\varphi\cos\theta}Mg=\frac{\sin\theta}{\cos(\theta-\alpha)}Mg.
\end{aligned}
$$

Finalmente se sustituye este valor de N_{12} en el resto de ecuaciones.