Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Enero de 2013
Cuestiones (Un punto por cuestión).

Cuestión 1 (Primer parcial): Un punto recorre la mitad del camino con la velocidad v_0. La parte restante la hace a una velocidad v_1 la mitad del tiempo, y a la velocidad v_2 el trayecto final. Determinar la velocidad media del punto durante el recorrido.

Solución:

Si llamamos d a la longitud del camino el tiempo que invierte en recorrer la primera mitad será

$$\Delta t_1 = \frac{d/2}{v_0}.$$

En la segunda mitad emplea un tiempo Δt_2 a velocidad v_1 y el mismo tiempo a velocidad v_2 con lo que tenemos que

$$\frac{d}{2} = (v_1 + v_2)\Delta t_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t_2 = \frac{d/2}{v_1 + v_2}.$$

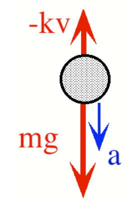
Aplicando la definición de velocidad media tenemos que

$$v_m = \frac{d}{\Delta t} = \frac{d}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_2} = \frac{d}{\dfrac{d}{2v_0} + \dfrac{2d}{2(v_1 + v_2)}} = \frac{1}{\dfrac{1}{2v_0} + \dfrac{1}{(v_1 + v_2)}} = \frac{1}{\dfrac{v_1 + v_2 + 2v_0}{2v_0(v_1 + v_2)}} = \frac{2v_0(v_1 + v_2)}{2v_0 + v_1 + v_2}.$$

Cuestión 2 (Primer parcial): Analizar el tipo de movimiento que posee una partícula que parte del reposo y está sometida a su propio peso y a una fuerza de rozamiento directamente proporcional a su velocidad, con constante de proporcionalidad k. Sin necesidad de resolver la ecuación del movimiento, discútanse los aspectos más relevantes de dicho movimiento y dibújense aproximadamente la aceleración y la velocidad de la partícula en función del tiempo. ¿Cómo se calculará el espacio recorrido por la partícula?

Solución:

Aplicando la segunda ley de Newton, la suma de las fuerzas que actúan es igual a la masa por la aceleración,



$$mg - kv = ma. \qquad (1)$$

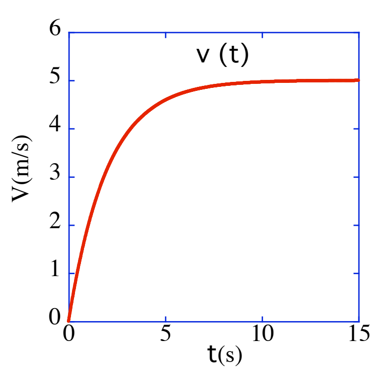
El convenio de signos escogido es que el eje y crece hacia abajo.

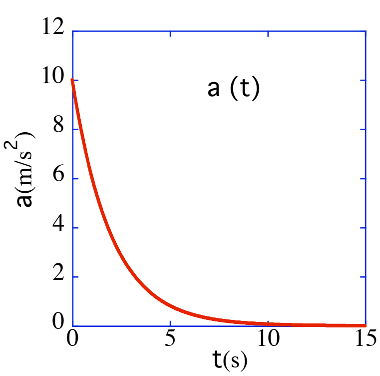
Si la partícula parte del reposo, la velocidad inicial es 0 y, por lo tanto, la aceleración es $a = g$.

A medida que pasa el tiempo, la partícula va adquiriendo velocidad por lo que la aceleración va disminuyendo.

Este proceso continúa hasta que la velocidad es tan grande que la fuerza de rozamiento compensa al peso ($kv = mg$), y la aceleración es $a = 0$, alcanzándose la velocidad límite $v_L = \dfrac{mg}{k}$.

Las gráficas aproximadas son





En cuanto a determinar el **espacio recorrido** por la partícula, si lo queremos calcular **en función de la velocidad**, se parte de la ecuación (1), $mg - kv = ma$, y sustituimos la aceleración como

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx},$$

la ecuación que nos queda es

$$mg - kv = mv\frac{dv}{dx}.$$

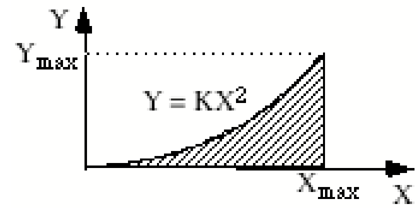
Separando variables (llevando todas las velocidades a un lado y todo lo que dependa de la posición al otro) podemos integrar para conocer $x(v)$.

Si queremos calcular el **espacio recorrido como función del tiempo**, tenemos que hacerlo en dos pasos. Primero escribimos la aceleración como $a = dv/dt$ y sustituimos en la ecuación (1). Esto nos lleva a

$$mg - kv = m\frac{dv}{dt}.$$

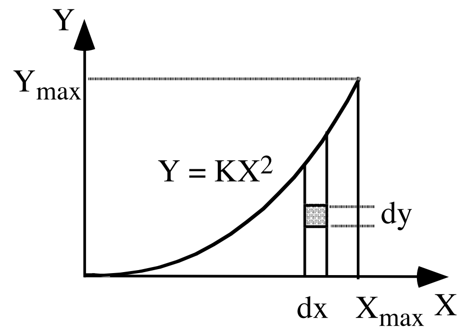
Despejando e integrando, determinamos $v(t)$**.** En un segundo paso, como $v(t) = dx/dt$, despejamos el dx e integramos para calcular $x(t)$.

Cuestión 3 (Segundo parcial): Determinar la posición del centro de masas de la placa homogénea de la figura



Solución:

Recordando la definición de centro de masas de una superficie homogénea $x_{\mathrm{CM}} = \dfrac{\int x\, dS}{\int dS}$ y teniendo en cuenta que $dS = dx\, dy$, donde este diferencial de área se integra en la superficie delimitada por la parábola $y = kx^2$ y el eje x, llegamos a la ecuación de partida,



$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{\iint x\, dx\, dy}{\iint dx\, dy} = \frac{\int_0^{x_{\max}} x\, dx \int_0^{kx^2} dy}{\int_0^{x_{\max}} dx \int_0^{kx^2} dy} = \frac{\int_0^{x_{\max}} x\, dx \left[y\right]_0^{kx^2}}{\int_0^{x_{\max}} dx \left[y\right]_0^{kx^2}} = \frac{\int_0^{x_{\max}} x\, dx\, kx^2}{\int_0^{x_{\max}} dx\, kx^2},$$

donde primero hemos integrado dy entre el eje x y la parábola $y = kx^2$ y posteriormente integraremos la variable x entre 0 y $x_{\max}$.

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{\int_0^{x_{\max}} x\, dx\, kx^2}{\int_0^{x_{\max}} dx\, kx^2} = \frac{\int_0^{x_{\max}} kx^3\, dx}{\int_0^{x_{\max}} kx^2\, dx} = \frac{\left[k\dfrac{x^4}{4}\right]_0^{x_{\max}}}{\left[k\dfrac{x^3}{3}\right]_0^{x_{\max}}} = \frac{k\dfrac{x_{\max}^4}{4}}{k\dfrac{x_{\max}^3}{3}} = \frac{3}{4}x_{\max}.$$

Procediendo de forma análoga para la coordenada y,

$$y_{\mathrm{CM}} = \frac{\iint y\, dx\, dy}{\iint dx\, dy} = \frac{\int_0^{x_{\max}} dx \int_0^{kx^2} y\, dy}{\int_0^{x_{\max}} dx \int_0^{kx^2} dy} = \frac{\int_0^{x_{\max}} dx \left[\dfrac{y^2}{2}\right]_0^{kx^2}}{\int_0^{x_{\max}} dx \left[y\right]_0^{kx^2}} = \frac{\int_0^{x_{\max}} dx\, \dfrac{k^2x^4}{2}}{\int_0^{x_{\max}} dx\, kx^2} =$$

$$= \frac{\left[\dfrac{k^2}{2}\dfrac{x^5}{5}\right]_0^{x_{\max}}}{\left[k\dfrac{x^3}{3}\right]_0^{x_{\max}}} = \frac{\dfrac{k^2}{2}\dfrac{x_{\max}^5}{5}}{k\dfrac{x_{\max}^3}{3}} = \frac{3}{10}kx_{\max}^2 = \frac{3}{10}y_{\max}.$$

Cuestión 4 (Segundo parcial): Calcular el trabajo realizado sobre un gas ideal en una expansión isotérmica cuasi-estática desde un volumen V_i hasta un volumen V_f.

El trabajo realizado sobre un gas viene determinado por la expresión

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} P\,dV.$$

Como el gas es ideal y el proceso es cuasiestático, podemos utilizar la expresión $PV = nRT$ para cada estado intermedio en el proceso. De esta manera tenemos que

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} P\,dV = -\int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V}\,dV.$$

Como T es constante en este proceso, puede salir fuera de la integral, al igual que n y R,

$$W = -nRT\int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = -nRT \ln V\Big|_{V_i}^{V_f} = -nRT\left(\ln V_f - \ln V_i\right) = nRT\left(\ln V_i - \ln V_f\right) = nRT \ln\left(\frac{V_i}{V_f}\right).$$

Si el gas se expande, $V_f > V_i$ y el valor del trabajo realizado sobre el gas es negativo. Por el contrario, si el gas se comprime, $V_f < V_i$ y el trabajo realizado sobre el gas es positivo.