Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Segundo parcial. Enero de 2013
Cuestiones (Un punto por cuestión).

Cuestión 1: Una partícula de masa *m* se encuentra en un campo de energía potencial que solo depende de *x* de la forma: $E_p(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}$, donde *a* y *b* son ciertas constantes positivas. Hallar el periodo de oscilaciones de la partícula en su movimiento en la dirección *x* alrededor de las posiciones de equilibrio.

Solución:

Para encontrar los puntos de equilibrio estudiamos dónde se anula la derivada primera:

$$\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_{equil.}} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2\frac{a}{x^3_{equil.}} + \frac{b}{x^2_{equil.}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{equil.} = \frac{2a}{b}$$

Para ver si se trata de un punto de equilibrio estable estudiamos el valor de la derivada segunda en dicha posición:

$$\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_{equil.}} = 6\frac{a}{x^4_{equil.}} - 2\frac{b}{x^3_{equil.}} = \frac{b^4}{8a^3} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{P. Equil. Estable}$$

Expandiendo en serie de Taylor el potencial en torno a la posición de equilibrio,

$$E_p(x) \approx E_p(x_0) + \left.\frac{dE}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{d^3E}{dx^3}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^3 + \dots$$

En esta expresión, el primer sumando de la parte derecha de la ecuación podemos tomarlo como una constante (el cero de energías). La derivada primera se anula si se evalúa en la posición de equilibrio. Además, si nos movemos en un entorno suficientemente cercano a x_0, entonces $(x-x_0)$ es un valor pequeño y el término cúbico (y potencias superiores) son mucho más pequeños que el cuadrático, con lo que podemos despreciarlos. Así nos queda

$$E_p(x) \approx E_p(x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2,$$

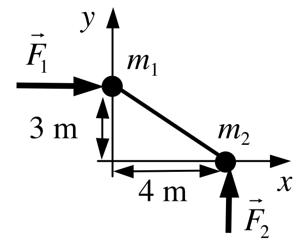
que es la ecuación de un movimiento oscilatorio armónico con constante elástica

$$k = \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_{equil.}} = \frac{b^4}{8a^3}$$

Y el periodo de oscilación será:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \boxed{\frac{4\pi a\sqrt{2ma}}{b^2}}$$

Cuestión 2: Las masas m_1 = 10 kg y m_2 = 6 kg están unidas por una barra rígida de masa despreciable. Estando inicialmente en reposo, se hallan bajo la acción de las fuerzas $\vec{F}_1 = 8\hat{i}$ y $\vec{F}_2 = 6\hat{j}$. Hallar las coordenadas de su centro de masas como función del tiempo. Expresar el momento lineal en función del tiempo.



Solución:

La posición inicial del C.M. será:

$$\vec{r}_{c.m.,0} = \frac{m_1\vec{r}_{1,0} + m_2\vec{r}_{2,0}}{m_1 + m_2} = \left(\frac{3}{2}, \frac{15}{8}, 0\right)$$

La velocidad inicial del C.M. es nula ya que las dos partículas parten del reposo.

La aceleración del C.M. es:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (m_1 + m_2)\vec{a}_{c.m.} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{c.m.} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, 0\right)$$

El C.M. va a realizar por lo tanto un movimiento uniformemente acelerado:

$$\vec{r}_{c.m.} = \vec{r}_{c.m.,0} + \frac{1}{2}\vec{a}_{c.m.}t^2 = \boxed{\left(\frac{6 + t^2}{4}, \frac{30 + 3t^2}{16}, 0\right)}$$

El momento lineal inicial es nulo (por encontrarse en reposo las partículas), el momento lineal final será igual al impulso comunicado por las fuerzas externas:

$$\vec{P}(t) = \int_0^t \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right)dt = \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right)t = \boxed{(8t, 6t, 0)}$$

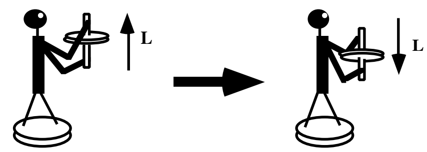
(todos los resultado expresados en unidades del S.I.)

Cuestión 3: (a) Define claramente el momento angular de una partícula con respecto a un sistema de referencia y explica el teorema de conservación del mismo.

Aplica dicho teorema para:

(b) el caso de una partícula sometida a fuerzas centrales.

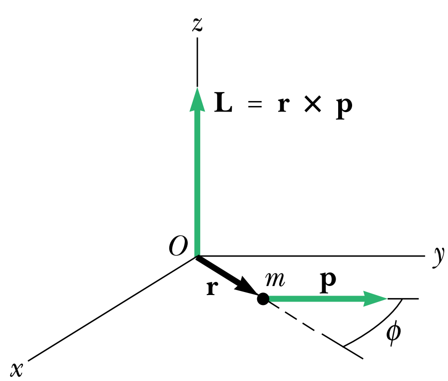
(c) a la persona de la figura cuando gira bruscamente 180° el eje de la rueda que sostiene entre sus manos. Suponer que la persona se encuentra inicialmente en reposo sobre una placa giratoria.



Solución:

Consideremos una partícula de masa m, con un vector de posición $\vec{r}$ y que se mueve con una cantidad de movimiento $\vec{p}$ como se indica en la figura. El momento angular instantáneo $\vec{L}$ de la partícula relativo al origen O se define como el producto vectorial de su vector posición instantáneo $\vec{r}$ y del momento lineal instantáneo $\vec{p}$,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$



Si derivamos esta ecuación con respecto al tiempo, obtenemos que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau},$$

donde $\vec{\tau}$ es el torque o momento neto de las fuerzas que actúa sobre la partícula. Si el momento de las fuerzas es nulo, entonces, el momento angular se conserva.

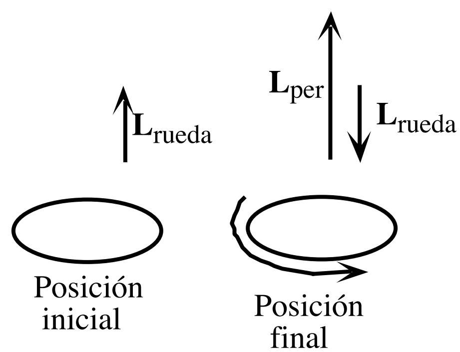
(b En el caso de las fuerzas centrales, la fuerza lleva la misma dirección que el vector posición, $\vec{F} \parallel \vec{r}$ y por lo tanto el momento de la fuerza es cero,

$$\vec{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} \text{ es constante}.$$

(c) En el tercer caso se trataría más de un sistema de partículas. En todo caso, al no actuar ninguna fuerza externa sobre el sistema, el momento de las fuerzas externas se anula y por lo tanto el momento angular total también se conserva. Eso significa que al girar la rueda e invertir el sentido de $\vec{L}_{\text{rueda}}$ ($\vec{L}_{\text{rueda,final}} = -\vec{L}_{\text{rueda, inicial}}$) para que el momento angular total se conserve la persona tiene que empezar a girar adquiriendo un momento angular $\vec{L}_{\text{persona}} = 2\vec{L}_{\text{rueda, inicial}}$ dirigido hacia arriba según el esquema de la figura, de forma que en la posición final

$$\vec{L}_{\text{persona}} + \vec{L}_{\text{rueda,final}} = 2\vec{L}_{\text{rueda,inicial}} - \vec{L}_{\text{rueda,inicial}} = \vec{L}_{\text{rueda,inicial}},$$

de modo que en la posición final e inicial el momento angular del sistema sea el mismo.



Cuestión 4: Se introduce helio puro en estado gaseoso en un depósito que dispone de un émbolo móvil. El volumen, la presión y la temperatura iniciales son $15.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$, 200 kPa y 300 K. Calcule la temperatura final del gas si el volumen disminuye a $12.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$ y la presión aumenta a 350 kPa.

Solución:

Supongamos que el helio se comporta como un gas ideal. Si el gas no puede salir del depósito, el número de moles de gas permanece constante. Por lo tanto, utilizando la ecuación $PV = nRT$ para las situaciones inicial y final, tenemos que

$$nR = \frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f},$$

donde i y f indican los valores inicial y final, respectivamente. Despejando T_f, obtenemos

$$T_f = \frac{P_f V_f}{P_i V_i} T_i = \frac{(350\ \mathrm{kPa})(12.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^3)}{(200\ \mathrm{kPa})(15.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^3)}(300\ \mathrm{K}) = 420\ \mathrm{K}.$$