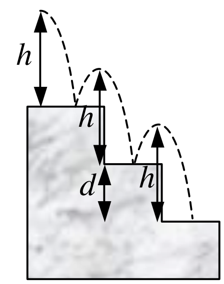
Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Segundo parcial. Enero de 2012
Problemas (Dos puntos por problema).

Problema 1: Una bola se deja caer desde una altura h sobre el rellano de una escalera y desciende rebotando como se muestra en la Figura. ¿Cuál es el valor del coeficiente de restitución e para la cuál la bola rebotará a la misma altura sobre cada escalón?



(Nota: $e = -\frac{v'}{v}$)

Solución:

Primeramente aplicaremos el principio de conservación de la energía para calcular la velocidad con la que la bola impacta con el escalón superior. Tomando el nivel nulo de energía potencial gravitatoria a la altura del impacto, los ejes x e y horizontal y vertical respectivamente, y teniendo en cuenta que la componente x de la velocidad no cambia en el movimiento parabólico de la bola,

$$\left.\begin{array}{r} E_{inicial} = mgh + \frac{1}{2}mv_x^2 \\ \\ E_{final} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) \end{array}\right\} \quad E_{inicial} = E_{final} \quad \Rightarrow \quad v_y = -\sqrt{2gh}$$

La componente x de la velocidad no cambia en el choque (no hay ninguna fuerza que actúe a lo largo de esa dirección. Para hallar la componente y aplicamos la ecuación del coeficiente de restitución,

$$e = -\frac{v_y'}{v_y} \quad \Rightarrow \quad v_y' = -e\,v_y = e\sqrt{2gh}$$

Aplicando de nuevo el principio de la energía para calcular la altura h' hasta la que rebota,

$$\left.\begin{array}{r} E_{inicial} = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y'^2\right) \\ \\ E_{final} = mgh' + \frac{1}{2}mv_x^2 \end{array}\right\} \quad E_{inicial} = E_{final} \quad \Rightarrow \quad h' = \frac{v_y'^2}{2g} = e^2 h$$

Si queremos que la altura sobre el siguiente escalón sea igual a la altura inicial

$$h = h' + d = e^2 h + d \quad \Rightarrow \quad e = \sqrt{1 - \frac{d}{h}}.$$

Problema 2: Un bloque descansa sobre el tablero de una mesa que realiza un movimiento armónico simple de amplitud A y periodo T.

(a) Si la oscilación es vertical, ¿cuál es el máximo valor de A que permitiría al bloque permanecer siempre en contacto con la mesa?

(b) Si la oscilación es horizontal, y el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la mesa es μ ¿cuál es el máximo valor de A para que el bloque no se deslice?

Solución:

(a) Supongamos que la mesa se mueve en la dirección vertical z siguiendo un movimiento oscilatorio armónico simple

$$z(t) = A\cos(\omega t + \phi).$$

Derivando una vez con respecto al tiempo, podemos calcular la velocidad de la mesa,

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi).$$

Derivando una segunda vez, calculamos la aceleración de la misma,

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi).$$

El módulo del valor máximo que puede alcanzar la aceleración es

$$|a_{\max}| = A\omega^2 = A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = A\frac{4\pi^2}{T^2}.$$

La partícula estará en contacto con la mesa siempre que la aceleración de la mesa sea menor o igual que la aceleración de la gravedad g. Luego el valor máximo de A que permitirá al bloque seguir en contacto con la mesa será

$$A\frac{4\pi^2}{T^2} = g \quad \Rightarrow \quad A = \frac{g\,T^2}{4\pi^2}.$$

(b) Si ahora el movimiento se produce en el plano, por ejemplo a lo largo de la dirección x,

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi),$$

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi),$$

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi).$$

El módulo de la fuerza máxima de rozamiento estático, justo en el umbral de deslizamiento, vale

$$f_{s,\max} = \mu N = \mu m g,$$

donde N es el módulo de la componente normal de la fuerza de la mesa sobre el bloque.

Mientras el bloque no se desliza, la mesa ejerce una fuerza sobre el bloque igual a la masa del bloque por su aceleración

$$F(t) = m a(t) = -m A \omega^2 \cos(\omega t + \phi).$$

El módulo del valor máximo de la fuerza es

$$\left|F_{\max}\right| = m A \omega^2.$$

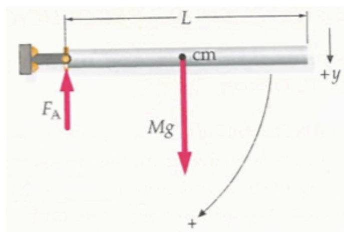
Esta fuerza tiene que ser menor que la fuerza máxima de rozamiento estático para que el bloque no deslice. En el caso límite, justo en el umbral de deslizamiento,

$$\mu m g = m A \omega^2 = m A \frac{4\pi^2}{T^2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\mu g T^2}{4\pi^2}.$$

Problema 3: Una barra delgada y uniforme de longitud L y masa M pivota sobre un extremo. Se coloca en posición horizontal y se deja en libertad. Se supone que no hay rozamiento en el pivote. Determinar:

(a) La aceleración angular de la barra inmediatamente después de dejarla en libertad.

(b) Las fuerza F_A ejercida por el pivote sobre la barra en ese instante.



Solución:

(a) Para comenzar el problema, dibujamos el diagrama de fuerzas sobre la barra, como indica la Figura.

Escribimos la segunda ley de Newton para las rotaciones,

$$\sum \tau_{\text{ext}} = I\,\alpha. \qquad (1)$$

Sobre la barra actúan dos fuerzas externas: la gravedad y la fuerza que ejerce el pivote. De estas dos fuerzas, sólo la gravedad presenta un momento no nulo con respecto al punto con respecto al cuál rota la barra. El momento de F_A es nulo puesto que está aplicada directamente en el origen. Así pues, calculamos el momento debido a la gravedad alrededor del eje dado. La barra es uniforme, por lo que el centro de masas está en su centro, es decir, a una distancia $L/2$ de su eje,

$$\tau_{\text{ext}} = \tau_{\text{grav}} = M\,g\frac{L}{2}. \qquad (2)$$

Como el momento de inercia respecto al extremo de la barra es

$$I = \frac{1}{3}M\,L^2, \qquad (3)$$

y sustituyendo las Ecuaciones (2) y (3) en (1), podemos despejar el valor de la aceleración angular

$$\alpha = \frac{M\,g\,\frac{L}{2}}{\frac{1}{3}M\,L^2} = \frac{3g}{2L}.$$

(b) Para resolver esta parte, comenzamos escribiendo la segunda ley de Newton para la barra

$$\sum F_{\text{ext},\,y} = M\,a_{\text{cm},y} \qquad \Rightarrow \qquad Mg - F_{\text{A}} = M\,a_{\text{cm},y} \qquad (4)$$

Inmediatamente después de soltar la barra, la velocidad angular ω es nula. Como conocemos la relación entre la velocidad angular y la aceleración centrípeta ($a_{\text{c}} = r\,\omega^2$), podemos determinar esta última para el punto del centro de masas,

$$a_{\text{cm c}} = r_{\text{cm}}\omega^2 = \frac{L}{2}\omega^2 = 0.$$

También conocemos la relación entre la aceleración tangencial y la aceleración angular ($a_{\text{t}} = r\,\alpha$), por lo que podemos calcular la aceleración tangencial del centro de masas como

$$a_{\text{cm}\,y} = a_{\text{cm t}} = r_{\text{cm}}\alpha = \frac{L}{2}\frac{3g}{2L} = \frac{3}{4}g. \qquad (5)$$

Reemplazando la Ecuación (5) en (4),

$$M\,g - F_{\text{A}} = M\,\frac{3}{4}g \qquad \Rightarrow \qquad F_{\text{A}} = \frac{1}{4}M\,g$$

Inmediatamente después de soltar la barra, la aceleración del centro de masas apunta verticalmente hacia abajo. Dado que la fuerza externa neta y la aceleración deben ir en la misma dirección, se deduce que $\vec{F}_{\text{A}}$ en ese instante no puede tener una componente horizontal.