Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Enero de 2012
Problemas (Dos puntos por problema).

Problema 1 (Primer parcial): Un pescador desea cruzar un río de 1 km de ancho el cual tiene una corriente de 5 km/h hacia el norte. El pescador está sobre el lado oeste. El bote lleva una rapidez de 4 km/h respecto al agua.

(a) ¿En qué dirección debe apuntar para hacer el recorrido en un tiempo mínimo?
(b) En ese caso, ¿cuánto tiempo tardará en cruzar?
(c) ¿Qué velocidad lleva el bote respecto de un observador en la orilla (tanto en dirección como en módulo?

Solución:

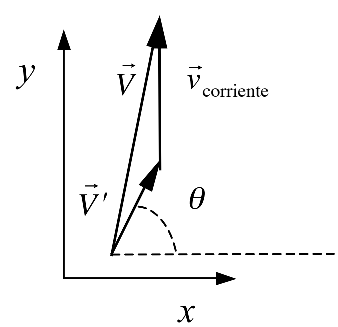
Vamos a considerar los siguientes observadores:

Observador O: Observador situado en la ribera del río, y quieto con respecto a ésta.
Observador O': Observador situado dentro del agua, dejándose arrastrar por la corriente.

Vamos a tomar el eje y en la dirección y sentido de la corriente (dirigida hacia el norte) y el eje x en la dirección transversal.

La velocidad relativa de O' respecto de O vendrá dada por la velocidad de la corriente del río, $\vec{v}_{O'O} = \vec{v}_{\text{corriente}}$.
La relación entre las velocidades $\vec{V}$ y $\vec{V}'$ del pescador vistas por los dos observadores es:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{v}_{O'O} = \vec{V}' + \vec{v}_{\text{corriente}}$$



Según la figura,

$$\vec{V}' = V'\cos\theta\,\vec{i} + V'\sin\theta\,\vec{j},$$

con lo que la velocidad vista por O será

$$\vec{V} = \left(V'\cos\theta\right)\vec{i} + \left(V'\sin\theta + v_{\text{corriente}}\right)\vec{j}.$$

Para que cruce de un lado a otro en un tiempo mínimo, la componente x de la velocidad debería ser lo mayor posible. Ello se consigue cuando

$$\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{V}' \perp \vec{v}_{\text{corriente}}.$$

(b) Si llamamos d a la anchura del río, el tiempo invertido en cruzar será

$$\Delta t = \frac{d}{V_x} = \frac{d}{V'_x} = \frac{1\text{ km}}{4\text{ km/h}} = 0{,}25\text{ h} = 15\text{ min}.$$

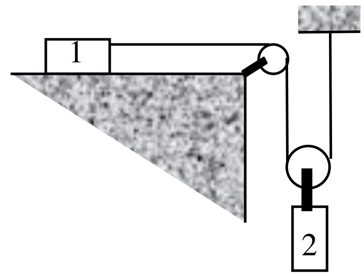
(c) La velocidad respecto de O será

$$\vec{V} = V'\,\vec{i} + v_{\text{corriente}}\,\vec{j},$$

y su módulo

$$V = \sqrt{V'^2 + v_{\text{corriente}}^2} = 6{,}4\text{ km/h}.$$

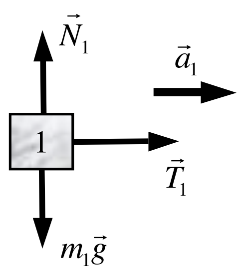
Problema 2 (Primer parcial): Calcular las aceleraciones de m_1 y m_2 y la tensión de las cuerdas en el caso representado. Todas las poleas tienen un peso despreciable y fricción nula.



Solución:

Dibujamos el diagrama de cuerpo aislado tanto para las dos masas como para la polea móvil.

Para el cuerpo 1:

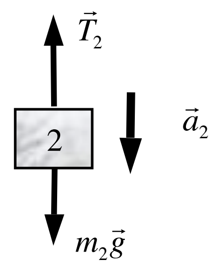


Si tomamos la dirección positiva del eje x hacia la derecha y la dirección positiva del eje y hacia arriba, podemos descomponer esas fuerzas en las direcciones de los ejes y aplicar la segunda ley de Newton,

$$\sum F_y = N_1 - m_1 g = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = m_1 g,$$

$$\sum F_x = T_1 = m_1 a_1.$$

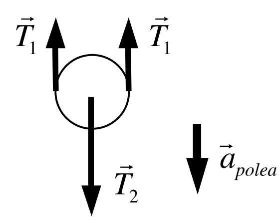
Para el cuerpo 2:



Si tomamos la dirección positiva del eje x hacia la derecha y la dirección positiva del eje y hacia abajo,

$$\sum F_y = -T_2 + m_2 g = m_2 a_2.$$

Para la polea móvil,



Si tomamos la dirección positiva del eje x hacia la derecha y la dirección positiva del eje y hacia arriba,

$$\sum F_y = 2T_1 - T_2 = m_{\text{polea}} a_{\text{polea}} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 2T_1.$$

Como la cuerda es inextensible, $a_2 = \frac{a_1}{2}$. Dicho de otra manera, si el objeto 1 se desplaza hacia la derecha una distancia Δx, el objeto 2 desciende $\frac{\Delta x}{2}$ en el mismo tiempo (la parte de la cuerda 1 a la izquierda y a la derecha de la polea móvil aumenta $\frac{\Delta x}{2}$.

Así pues, las 4 ecuaciones a resolver son:

$$T_1 = m_1 a_1 \qquad (1)$$
$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \qquad (2)$$
$$T_2 = 2T_1 \qquad (3)$$
$$a_2 = \frac{a_1}{2} \qquad (4)$$

Reemplazando (3) y (4) en (2),

$$m_2 g - 2T_1 = m_2 \frac{a_1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2T_1 = m_2 g - \frac{1}{2} m_2 a_1.$$

Y reemplazando en esta última ecuación T_1 [que viene de la ecuación (1)],

$$2m_1 a_1 = m_2 g - \frac{1}{2} m_2 a_1$$

$$4m_1 a_1 = 2m_2 g - m_2 a_1$$

$$\left(4m_1 + m_2\right) a_1 = 2m_2 g.$$

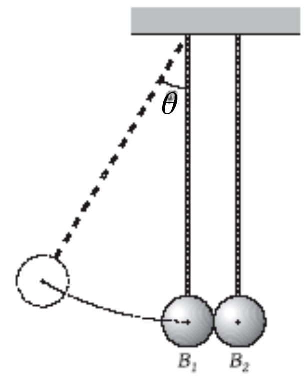
Y de esta última ecuación podemos despejar a_1,

$$a_1 = \frac{2m_2 g}{\left(4m_1 + m_2\right)} \qquad a_2 = \frac{a_1}{2}.$$

Sustituyendo en la ecuación (1), accedemos a las tensiones de las cuerdas,

$$T_1 = \frac{2m_1 m_2 g}{\left(4m_1 + m_2\right)} \qquad T_2 = 2T_1.$$

Problema 3 (Segundo parcial): Dos bolas de marfil B_1 y B_2 de masas M_1 y M_2, están suspendidas de dos hilos inextensibles de longitud 1 m. Las bolas se tocan, sin presión, cuando los hilos están verticales. Separamos B_1 de su posición de equilibrio un ángulo $\theta = 60^\circ$ manteniendo el hilo extendido y en el mismo plano vertical que el otro hilo; soltamos B_1 y entonces viene a chocar contra la bola B_2, que estaba inmóvil. Para los tres casos siguientes



(a) $M_2 = 2M_1$
(b) $M_2 = M_1/2$
(c) $M_2 = M_1$
calculad:
(1) La velocidad de B_1 cuando esta choque con B_2
(2) Las velocidades de ambas bolas después del choque, supuesto perfectamente elástico.
(3) Las alturas a que ascenderán después del choque en el tercer caso.

Solución:

1) Aplicando la conservación de la energía entre la situación inicial en la que se suelta la bola B_1 y la situación final que es justo cuando dicha bola entra en contacto con la bola B_2 (tomamos el nivel nulo de energía potencial en la situación final) podemos calcular la velocidad con la que la primera bola impacta en la segunda y que será igual en los tres casos:

$$M_1 g L(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}M_1 V_1^2 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \sqrt{2gL(1-\cos\theta)} = \boxed{3.13 \text{ m/s}}$$

2) Aplicando la conservación del momento lineal y el hecho de que el coeficiente de restitución es $e = 1$:

$$\left.\begin{aligned} M_1V_1 &= M_1V_1' + M_2V_2' \\ e &= \frac{V_2' - V_1'}{V_1} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} V_1' &= \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}\right)V_1 \\ V_2' &= \left(\frac{2M_1}{M_1 + M_2}\right)V_1 \end{aligned}\right.$$

aplicándolo a los tres casos propuestos:

a) $V_1' = \boxed{-1.04 \text{ m/s}}$ $\quad V_1' = \boxed{2.09 \text{ m/s}}$

b) $V_1' = \boxed{1.04 \text{ m/s}}$ $\quad V_1' = \boxed{4.17 \text{ m/s}}$

c) $V_1' = \boxed{0 \text{ m/s}}$ $\quad V_1' = \boxed{3.13 \text{ m/s}}$

3) En el tercer caso las bolas (que tienen la misma masa) intercambian sus velocidades y por conservación de la energía es fácil ver que la segunda bola alcanzará exactamente la misma altura desde la que partió la primera:

$$h_2 = L(1 - \cos\theta) = \boxed{0.5 \text{ m}}$$