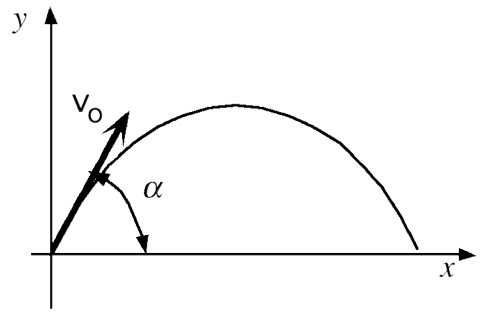
Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Enero de 2012
Cuestiones (Un punto por cuestión).

Cuestión 1 (Primer parcial): Una partícula describe el movimiento parabólico de la Figura. Obtener las expresiones para la altura máxima y el alcance a lo largo del eje x. Demostrar que se obtiene el mismo alcance con el ángulo α y su complementario $\left(90^\circ - \alpha\right)$.



Solución:

Teniendo en cuenta que para un movimiento uniformemente acelerado

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t + \frac{1}{2}\vec{a}\, t^2,$$
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\, t,$$

y que en este caso,

$$\vec{a} = -g\,\vec{j},$$
$$\vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha\, \vec{i} + v_0 \sin\alpha\, \vec{j},$$
$$\vec{r}_0 = 0,$$

entonces

$$\vec{v} = v_0 \cos\alpha\, \vec{i} + \left[v_0 \sin\alpha - g\,t\right]\vec{j},$$
$$\vec{r} = v_0 \cos\alpha\, t\, \vec{i} + \left[v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2\right]\vec{j}.$$

(a) En la altura máxima $v_y = 0 \;\Rightarrow\; \left[v_0 \sin\alpha - g\, t_{y\max}\right] = 0 \;\Rightarrow\; t_{y\max} = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$,

donde $t_{y\max}$ es el tiempo que tarda la partícula en llegar al punto de altura máxima.

Sustituyendo este valor en la componente y de $\vec{r}$, entonces

$$y_{\max} = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 = v_0 \sin\alpha \frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{\left(v_0 \sin\alpha\right)^2}{2g}.$$

(b) En el alcance máximo

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[v_0 \sin\alpha\, t_{x\max} - \frac{1}{2} g\, t_{x\max}^2 \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{x\max} = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g},$$

donde $t_{x\max}$ es el tiempo que tarda la partícula en llegar al punto de alcance máximo.

Sustituyendo este valor en la componente x de $\vec{r}$, entonces

$$x_{\max} = v_0 \cos\alpha \,\frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2 v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Si el ángulo es $\left(90^\circ - \alpha\right)$ utilizamos la ecuación anterior sustituyendo α por $\left(90^\circ - \alpha\right)$. El alcance sería

$$x_{\max}\left(90 - \alpha\right) = \frac{v_0^2 \sin\left(180^\circ - 2\alpha\right)}{g} = \frac{v_0^2 \sin\left(2\alpha\right)}{g} = x_{\max}\left(\alpha\right),$$

donde hemos aplicado $\sin\theta = \sin\left(180^\circ - \theta\right)$.

Cuestión 2 (Primer parcial):

(a) Define el trabajo desarrollado por una fuerza a lo largo de una trayectoria.

(b) Calcular el trabajo efectuado por una fuerza $\vec{F} = 2xy\vec{i} + 3x\vec{j}$ al recorrer su punto de aplicación el arco de curva $x = t+1$, $y = t^3 - 1$, desde el punto A(0,-2), al B(2,0).

Solución:

(a) $dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad \Rightarrow \qquad W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}.$

(b) En este caso $W = \int_A^B \left(2xy\,\vec{i} + 3x\,\vec{j}\right)\cdot d\vec{r},$

donde $x = (t+1)$ e $y = (t^3 - 1)$, por lo que el vector posición a lo largo de la trayectoria vendrá dado por $\vec{r} = (t+1)\,\vec{i} + (t^3-1)\,\vec{j}$. A partir de esta expresión podemos calcular $d\vec{r}$,

$$d\vec{r} = dt\,\vec{i} + 3t^2\,dt\,\vec{j} = \left(\vec{i} + 3t^2\,\vec{j}\right)dt.$$

Además, al cambiar la variable tiempo, los límites son los tiempos para los que la partícula está en los puntos A y B.
En el punto A la coordenada x es 0, por lo que $t_A + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_A = -1\,\text{s}.$
En el punto B la coordenada x es 2, por lo que $t_B^3 - 1 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad t_B = 1\,\text{s}.$

Sustituyendo en la fórmula de trabajo,

$$\begin{aligned} W &= \int_{-1}^{+1}\left[2(t+1)(t^3-1)\,\vec{i} + 3(t+1)\,\vec{j}\right]\cdot\left(\vec{i} + 3t^2\,\vec{j}\right)dt \\ &= \int_{-1}^{+1}\left[2(t+1)(t^3-1) + 3(t+1)3t^2\right]dt = \int_{-1}^{+1}\left(2t^4 + 2t^3 - 2t - 2 + 9t^3 + 9t^2\right)dt \\ &= \int_{-1}^{+1}\left(2t^4 + 11t^3 + 9t^2 - 2t - 2\right)dt = \frac{4}{5} + \frac{18}{3} - 4 = \frac{14}{5} = 2{,}8\ \text{J}. \end{aligned}$$

Cuestión 3 (Segundo parcial):

Un cohete se dispara verticalmente hacia arriba. En el instante en el que alcanza una altitud de 1000 m y una celeridad de 300 m/s, explota en tres fragmentos de igual masa. Después de la explosión, un fragmento continua moviéndose hacia arriba con celeridad de 450 m/s. El segundo fragmento se mueve hacia la derecha con una celeridad de 240 m/s. ¿Cuál es la velocidad (dirección y módulo) del tercer fragmento tras la explosión?.

Solución:

Llamemos M a la masa total del cohete, de tal manera que la masa de cada fragmento es $M/3$. Como las fuerzas que producen la explosión son internas al sistema, no pueden afectar a su momento lineal total. En otras palabras, el momento lineal total del sistema antes de la explosión, $\vec{p}_i$, tiene que ser igual al momento lineal total del sistema después de la explosión, $\vec{p}_f$.

Antes de la explosión

$$\vec{p}_i = M\,\vec{v}_i = M\left(300\ \vec{j}\right)\,\text{kg}\cdot\text{m/s}.$$

Después de la explosión,

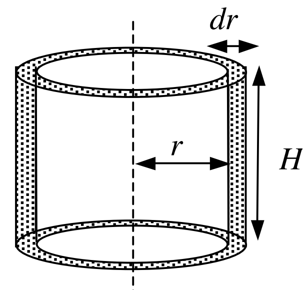
$$\vec{p}_f = \frac{M}{3}\left(240\ \vec{i}\right) + \frac{M}{3}\left(450\,\vec{j}\right) + \frac{M}{3}\vec{v}_f\ \text{kg}\cdot\text{m/s},$$

donde $\vec{v}_f$ es la velocidad desconocida del tercer fragmento.

Igualando las dos expresiones (puesto que $\vec{p}_i = \vec{p}_f$),

$$\frac{M}{3}\left(240\ \vec{i}\right) + \frac{M}{3}\left(450\,\vec{j}\right) + \frac{M}{3}\vec{v}_f = M\left(300\ \vec{j}\right) \quad\Rightarrow\quad \vec{v}_f = \left(-240\,\vec{i} + 450\ \vec{j}\right)\,\text{m/s}.$$

Cuestión 4 (segundo parcial): Calcular el momento de inercia con respecto a su eje de simetría de un cilindro homogéneo hueco de radio interior a y radio exterior b. Expresar el resultado en función de la masa del cilindro M, de a y de b.
Solución:



Podemos dividir el cilindro en "corazas" cilíndricas de radio r y espesor dr. Todos los puntos de esta coraza se encuentran a la misma distancia del eje de giro. Llamando H a la altura del cilindro, su momento de inercia vendrá dado por

$$I = \int r^2\, dm = \int r^2\, \rho\, dV = \int_a^b r^2 \rho\, 2\pi r H\, dr = \rho\, 2\pi H \frac{1}{4}\left(b^4 - a^4\right)$$

$$= \left(\frac{M}{\pi\left(b^2 - a^2\right)H}\right) 2\pi H \frac{1}{4}\left(b^4 - a^4\right) = \left(\frac{M}{b^2 - a^2}\right)\frac{\left(b^2 + a^2\right)\left(b^2 - a^2\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} M\left(b^2 + a^2\right).$$