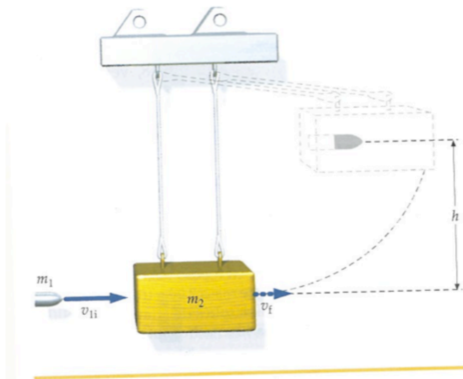
Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Enero de 2012
Cuestiones (Un punto por cuestión).

Cuestión 1: En una prueba pública de puntería, una persona dispara una bala sobre un bloque de madera suspendido (ver figura) que es un dispositivo llamado péndulo balístico. El bloque, con el proyectil en su seno, oscila como un péndulo hacia arriba. A partir de la altura alcanzada por este péndulo, se informa inmediatamente al público de la velocidad de la bala. ¿A qué velocidad iba la bala?



Solución:

Aunque el bloque se mueva hacia arriba tras la colisión, podemos considerar esta colisión como unidimensional, pues la dirección de la bala y del bloque justo después de la colisión está en la misma dirección que la velocidad inicial de la bala. La velocidad incial de la bala $v_{1,\mathrm{i}}$ está relacionada con la velocidad del sistema bala-bloque, v_f, justo después del choque inelástico, por la conservación del momento lineal. La velocidad v_f está relacionada con la altura h por la conservación de la energía mecánica. Sea m_1 la masa de la bala y m_2 la masa del blanco.

Utilizando la ley de conservación del momento lineal *durante* el choque, podemos determinar $v_{1,\mathrm{i}}$ en función de v_f:

$$m_1 v_{1,\mathrm{i}} = (m_1 + m_2) v_\mathrm{f},$$
$$v_{1,\mathrm{i}} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_\mathrm{f}. \qquad (1)$$

Después del choque, la energía mecánica del sistema bala-bloque se conserva. Así, podemos determinar v_f en función de la altura máxima h

$$\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)v_\mathrm{f}^2=\left(m_1+m_2\right)g\,h \quad \Rightarrow \quad v_f=\sqrt{2\,g\,h} \qquad (2)$$

Sustituyendo la Ecuación (2) en la Ecuación (1)

$$v_{1,\mathrm{i}}=\frac{m_1+m_2}{m_1}\sqrt{2\,g\,h}.$$

Como comprobación: la masa de la bala es mucho menor que la masa del bloque. Por tanto, es de esperar que la velocidad de la bala sea mucho mayor que la del bloque después de la colisión. El resultado de la Ecuación (1) confirma este razonamiento.

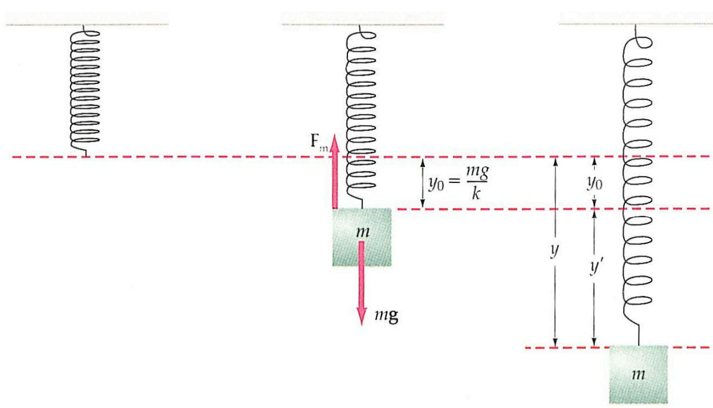
Cuestión 2: Colgamos un muelle de longitud inicial L_0 y masa despreciable de un techo. Si en la parte inferior del muelle situamos un masa m de modo que el conjunto queda en reposo,

(a) ¿Cuánto se estira el muelle?
(b) Explica el movimiento que realiza.
(c) Encuentra la ecuación del movimiento.

Solución:

El muelle estará en equilibrio estático para una posición y_0 que cumpla

$$mg - ky_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{mg}{k}. \qquad (1)$$



Cuando oscila:

$$mg - ky = ma \quad \Rightarrow \quad mg - k\left(y_0 + y^{'}\right) = ma \quad \Rightarrow \quad mg - ky_0 - ky^{'} = ma.$$

Teniendo en cuenta la Ecuación (1)

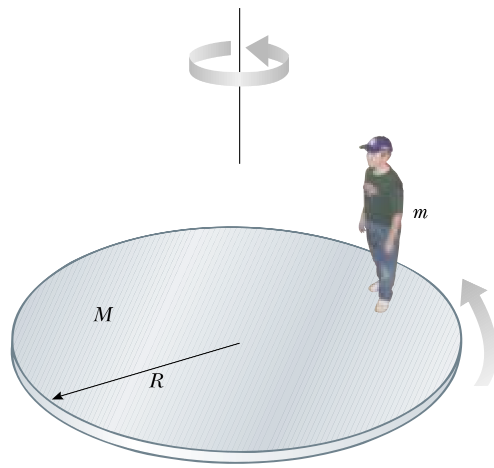
$$-ky^{'} = ma = m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{d^2\left(y_0 + y^{'}\right)}{dt^2} = m\frac{d^2y^{'}}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y^{'}}{dt^2} + \frac{k}{m}y^{'} = 0.$$

Nos queda una ecuación diferencial de segundo orden cuya solución es

$$y^{'}\left(t\right) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi\right).$$

El efecto de la gravedad es desplazar la posición de equilibrio. El muelle realiza un movimiento oscilatorio armónico simple en torno a una posición de equilibrio y_0 con el mismo periodo T que el de un muelle horizontal.

Cuestión 3: Una plataforma horizontal con la forma de un disco circular rota libremente y sin rozamiento en un plano horizontal alrededor de un eje vertical (ver Figura). La plataforma tiene una masa $M = 100\ \text{kg}$ y un radio $R = 2.0\ \text{m}$. Un estudiante de masa $m = 60\ \text{kg}$ camina lentamente desde el borde del círculo hasta su centro. Si la celeridad angular del sistema es de $2.0\ \text{rad/s}$ cuando el estudiante se encuentra en el borde, ¿cuánto vale la celeridad angular cuando se encuentre en un punto a $r = 0.50\ \text{m}$ del centro?



(Nota: el momento de inercia de la plataforma con respecto al eje es $\frac{1}{2}MR^2$).

Solución:

Denotaremos el momento de inercia de la plataforma como I_p, y el del estudiante como I_e. Supondremos además que podemos tratar al estudiante como si fuera una única partícula. De esta manera, podemos escribir el momento de inercia total del sistema (estudiante más plataforma) con respecto al eje de rotación al inicio del movimiento como

$$I_\text{tot}^\text{i} = I_\text{p}^\text{i} + I_\text{e}^\text{i} = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2.$$

Cuando el estudiante camina hacia el centro, y va ocupando posiciones con $r < R$, su momento de inercia cambia, y el momento de inercia total del sistema se reduce a

$$I_\text{tot}^\text{f} = I_\text{p}^\text{f} + I_\text{e}^\text{f} = \frac{1}{2}MR^2 + mr^2.$$

Es de recalcar que aún utilizamos el radio R a la hora de calcular el momento de inercia de la plataforma porque éste no cambia con el movimiento.

Como no hay momentos externos con respecto al eje de rotación actuando sobre el sistema, podemos aplicar la ley de conservación del momento angular,

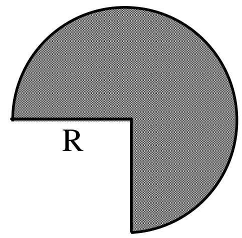
$$I_{\mathrm{tot}}^{\mathrm{i}}\omega_{\mathrm{i}} = I_{\mathrm{tot}}^{\mathrm{f}}\omega_{\mathrm{f}},$$

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_{\mathrm{i}} = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)\omega_{\mathrm{f}} \quad \Rightarrow \quad \omega_{\mathrm{f}} = \left(\frac{\frac{1}{2}MR^2 + MR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2}\right)\omega_{\mathrm{i}}.$$

Sustituyendo los datos del problema, resulta

$$\omega_{\mathrm{f}} = 4.1\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}.$$

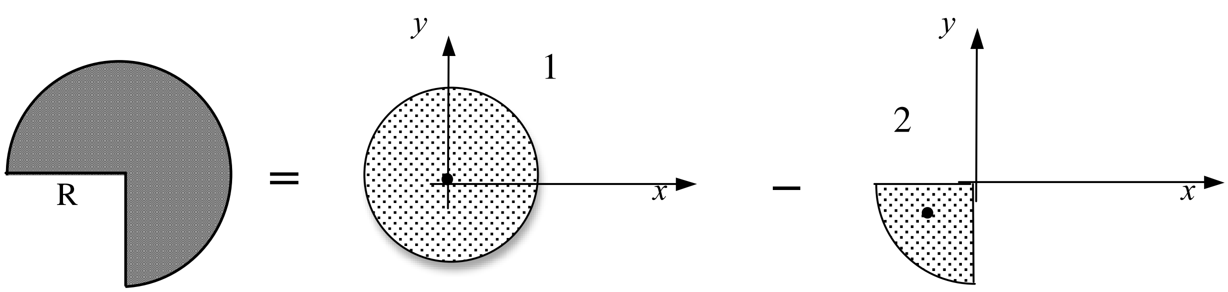
Cuestión 4: Determinar la posición del centro de masas de la placa homogénea de la figura.



Nota: para calcular el centro de masas de la porción que falta, aplicar el Teorema de Pappus-Gulding.

Solución:

Para calcular la posición del centro de masas de la placa, vamos a dividirla en dos partes, cuyos centros de masa podemos conocer o calcular:



Por simetría, las posición del centro de masas del círculo 1 está situado en el origen,

$$\vec{r}_1 = (0,0)$$

Podemos calcular el *valor absoluto* de las coordenadas del centro de masas del cuarto de círculo, 2 en la figura, a partir del Teorema de Pappus-Gulding. En efecto, rotando el cuarto de círculo alrededor del eje x se generaría una semiesfera de volumen

$$V_{\text{semiesfera}} = \frac{2}{3}\pi\, R^3.$$

Por el segundo Teorema de Pappus-Gulding, sabemos que

$$V_{\text{semiesfera}} = A_{\text{cuarto de círculo}} \times (\text{Recorrido del c.m. del cuarto de círculo}),$$

y, por lo tanto

$$\frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{1}{4}\pi R^2 \times 2\pi\, y_{\text{CM}} \quad \Rightarrow \quad y_{\text{CM}} = \frac{4R}{3\pi}.$$

Por simetría, $x_{CM} = y_{CM} = \dfrac{4R}{3\pi}$.

Evidentemente, si tomamos como origen el centro del círculo, las coordenadas del centro de masas del cuarto de círculo habrá que tomarlas con signo negativo

$$\vec{r}_2 = \left(-\frac{4R}{3\pi}, -\frac{4R}{3\pi}\right).$$

Las coordenadas del centro de masas de toda la pieza vendrán dadas por

$$x_{\text{CM}} = \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{\dfrac{4R}{3\pi} \times \dfrac{\pi R^2}{4}}{\pi R^2 - \dfrac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R}{9\pi}.$$

De igual manera se calcularía la coordenada y del centro de masas

$$y_{\text{CM}} = \frac{4R}{9\pi}.$$