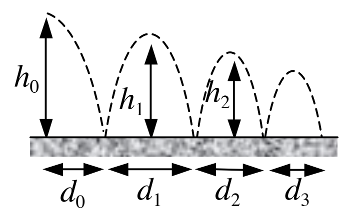
Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Segundo parcial. Enero de 2011
Problemas (Dos puntos por problema).

Problema 1: Una bola abandona el borde de una mesa horizontal con una velocidad de 3 m/s. La altura de la mesa es de 1 m y el coeficiente de restitución entre el suelo y la bola es de 0,6. Determinar:

(a) la relación entre la altura de un bote y el siguiente,
(b) la relación entre el avance horizontal de un bote y el siguiente,
(c) la distancia horizontal entre el pie de la mesa y el último bote de la bola.



Solución:

a) En cada uno de los botes que realiza la bola la componente x de la velocidad no cambia (la dirección del eje X es tangente a la superficie de contacto en el choque oblicuo entre la bola y el suelo).

Si un objeto cae desde una altura h se puede demostrar, utilizando lo aprendido en cinemática, que el tiempo que tarda en caer es: $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$, y que la componente y de la velocidad al llegar al suelo es: $v_y^2 = 2gh$ (esto último se puede demostrar también fácilmente aplicando la conservación de la energía entre su posición inicial a altura h y su posición a ras del suelo). Dada la simetría del movimiento parabólico, las mismas fórmulas pueden aplicarse para el movimiento de subida desde el suelo hasta una altura h.

Si llamamos $v_{y,i}$ a la componente vertical de la bola después de caer de la altura h_i justo antes del bote i+1, y $v'_{y,i+1}$ a la velocidad de la bola justo después del bote i+1, iniciando el movimiento de subida hasta la altura h_{i+1}, tenemos que, puesto que el suelo está quieto, en ese bote se verifica lo siguiente (¡cuidado con los signos de las componentes y de la velocidad!):

$$e=\frac{v'_{y,i+1}-0}{0-v_{y,i}}=-\left(\frac{v'_{y,i+1}}{v_{y,i}}\right)=-\left(\frac{\sqrt{2gh_{i+1}}}{-\sqrt{2gh_i}}\right)=\sqrt{\frac{h_{i+1}}{h_i}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{h_{i+1}=e^2h_i \quad\Rightarrow\quad h_i=e^{2i}h_0}$$

En cada bote la altura es un factor $e^2 = 0.36$ veces la altura del bote anterior.

Si llamamos ahora t_i al tiempo de caída desde la altura h_i entre el bote i y el i+1:

$$\frac{t_{i+1}}{t_i}=\sqrt{\frac{h_{i+1}}{h_i}}=e \quad\Rightarrow\quad t_{i+1}=e\,t_i \quad\Rightarrow\quad t_i=e^i t_0$$

En cada bote el tiempo de caída (o de subida) del movimiento parabólico es un factor e = 0.6 veces el del bote precedente.

b) Para las distancias recorridas tendríamos que (si llamamos v_x a la velocidad con que la bola abandonó la mesa):

$$\left.\begin{array}{l} d_i = 2v_x t_i \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d_{i+1}}{d_i} = \dfrac{t_{i+1}}{t_i} = e \\ d_0 = v_x t_0 = v_x \sqrt{\dfrac{2h_0}{g}} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} d_{i+1} = e\, d_i & i = 1, 2, 3, \ldots \\ d_1 = 2e\, d_0 & \end{array}}$$

En cada bote la distancia recorrida horizontalmente es un factor e = 0.6 veces la recorrida en el bote anterior.

c) La distancia horizontal total recorrida por la bola hasta que deja de botar:

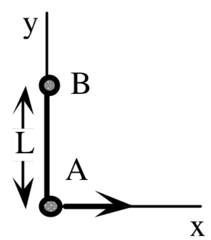
$$d = d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + \ldots = d_0 + 2ed_0 + 2e^2 d_0 + 2e^3 d_0 + \ldots =$$

$$= 2d_0\left(\frac{1}{2} + e + e^2 + e^3 + \ldots\right) = 2v_x\sqrt{\frac{2h_0}{g}}\left(\frac{1}{2} + \frac{e}{1-e}\right) = \boxed{6.78 \text{ m}}$$

Problema 2: Dos esferas puntuales de masas m y 3m respectivamente, están unidas por una varilla rígida de longitud L y masa despreciable. Las dos masas reposan sobre una superficie lisa horizontal cuando se comunica repentinamente a A una velocidad de $\vec{v}_0 = v\,\vec{i}$. Hallar:

(a) el momento del sistema y su momento angular respecto al centro de masas.

(b) las velocidades de A y B cuando la varilla ha girado un ángulo de 90°



Solución:

Notación: A lo largo del problema denotaremos como cantidades con prima aquellas que están medidas con respecto al centro de masas del sistema. Las cantidades sin prima se refieren a las medidas con respecto al sistema de referencia del laboratorio. El superíndice i se refiere a las cantidades en el instante inicial, mientras que el superíndice f hace referencia a la configuración rotada.

(a) El momento total del sistema en el sistema de referencia del laboratorio lo podemos calcular simplemente a partir de la suma de los momentos individuales de las dos partículas,

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_A^{\,i} + \vec{p}_B^{\,i} = m_A\vec{v}_A^{\,i} + m_B\vec{v}_B^{\,i} = mv\,\vec{i}\,.$$

En el instante inicial, el centro de masas del sistema estará colocado en

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j \vec{r}_j^{\,i}}{\sum_{j=1}^{n} m_j} = \frac{m_A\vec{r}_A^{\,i} + m_B\vec{r}_B^{\,i}}{m_A + m_B} = \frac{3mL}{4m}\vec{j} = \frac{3L}{4}\vec{j}\,.$$

Con respecto al centro de masas del sistema, las posiciones de las partículas A y B en el instante inicial son

$$\vec{r}_A^{\,\prime i} = \vec{r}_A^{\,i} - \vec{r}_{\text{CM}} = -\frac{3L}{4}\vec{j},$$

$$\vec{r}_B^{\,\prime i} = \vec{r}_B^{\,i} - \vec{r}_{\text{CM}} = \left(L - \frac{3L}{4}\right)\vec{j} = \frac{L}{4}\vec{j}\,.$$

La velocidad inicial del centro de masas es

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j \vec{v}_j^{\,i}}{\sum_{j=1}^{n} m_j} = \frac{m_A \vec{v}_A^{\,i} + m_B \vec{v}_B^{\,i}}{m_A + m_B} = \frac{mv}{4m}\vec{i} = \frac{v}{4}\vec{i},$$

con lo que las velocidades iniciales de las dos partículas con respecto al centro de masas valen

$$\vec{v}_A^{\,\prime i} = \vec{v}_A^{\,i} - \vec{v}_{\text{CM}} = v\vec{i} - \frac{v}{4}\vec{i} = \frac{3v}{4}\vec{i},$$

$$\vec{v}_B^{\,\prime i} = \vec{v}_B^{\,i} - \vec{v}_{\text{CM}} = -\frac{v}{4}\vec{i}.$$

Podemos calcular el momento angular del sistema con respecto a su centro de masas como

$$\vec{L}_{\text{CM}}^{\prime i} = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j^{\,\prime i} \times m_j \vec{v}_j^{\,\prime i} = \vec{r}_A^{\,\prime i} \times m_A \vec{v}_A^{\,\prime i} + \vec{r}_B^{\,\prime i} \times m_B \vec{v}_B^{\,\prime i} = -\frac{9mvL}{16}\left(\vec{j} \times \vec{i}\right) - \frac{3mvL}{16}\left(\vec{j} \times \vec{i}\right) = \frac{3mvL}{4}\vec{k}.$$

(b) Una vez que a la partícula A se le ha suministrado una velocidad $v\,\vec{i}$, y asumiendo que ni la gravedad ni el rozamiento juegan ningún papel (el sistema se mueve en una superficie lisa y horizontal), sobre el sistema no actúa ninguna fuerza externa y, por lo tanto, el momento lineal y angular del sistema se conserva,

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{\text{tot}} \text{ es constante},$$
$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_{\text{tot}} \text{ es constante}.$$

Así, basta calcular $\vec{p}_{\text{tot}}$ y $\vec{L}_{\text{tot}}$ en un instante dado. Su valor será el mismo en cualquier instante posterior.

También se conservará la velocidad del centro de masas del sistema,

$$\vec{p}_{\text{tot}} = M\vec{v}_{\text{CM}} = \text{constante}.$$

Las velocidades de las partículas en el sistema de referencia del laboratorio toman el valor

$$\vec{v}_A^{\,f} = v_{A,x}^f \vec{i} + v_{A,y}^f \vec{j},$$

$$\vec{v}_B^{\,f} = v_{B,x}^f \vec{i} + v_{B,y}^f \vec{j}.$$

Tenemos cuatro incógnitas por conocer (las dos componentes de las velocidades de cada una de las dos partículas). Para resolver el problema necesitamos cuatro ecuaciones.

Las dos primeras saldrán de la ley de conservación del momento lineal total del sistema. El momento lineal total del sistema rotado es

$$\vec{p}_{\text{tot}}^{\,f} = \vec{p}_A^{\,f} + \vec{p}_B^{\,f} = m_A \vec{v}_A^{\,f} + m_B \vec{v}_B^{\,f} = \left(m v_{A,x}^f + 3m v_{B,x}^f \right) \vec{i} + \left(m v_{A,y}^f + 3m v_{B,y}^f \right) \vec{j}.$$

Como el sistema conserva su momento lineal total,

$$\vec{p}_{\text{tot}}^{\,i} = \vec{p}_{\text{tot}}^{\,f} \Rightarrow \begin{cases} m v_{A,x}^f + 3m v_{B,x}^f = mv \\ m v_{A,y}^f + 3m v_{B,y}^f = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{A,x}^f + 3 v_{B,x}^f = v & (1) \\ v_{A,y}^f = -3 v_{B,y}^f & (2) \end{cases}$$

La tercera ecuación saldrá de la ley de conservación del momento angular total del sistema. Cuando el sistema haya rotado 90°, las posiciones de las partículas en el sistema de referencia del centro de masas serán

$$\vec{r}_A^{\,\prime f} = \frac{3L}{4} \vec{i},$$
$$\vec{r}_B^{\,\prime f} = -\frac{L}{4} \vec{i}.$$

Y las correspondientes velocidades con respecto al centro de masas

$$\vec{v}_A^{\,\prime f} = \vec{v}_A^{\,f} - \vec{v}_{\text{CM}} = \left(v_{A,x}^f - v \right) \vec{i} + v_{A,y}^f \vec{j},$$

$$\vec{v}_B^{\,\prime f} = \vec{v}_B^{\,f} - \vec{v}_{\text{CM}} = \left(v_{B,x}^f - v \right) \vec{i} + v_{B,y}^f \vec{j}.$$

Aquíe hemos tenido en cuenta que la velocidad del centro de masas se mantiene constante. Por lo tanto, el momento angular final con respecto al sistema del centro de masas

$$\vec{L}_{\text{CM}}^{\,\prime f} = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j^{\,\prime f} \times m_j \vec{v}_j^{\,\prime f} = \vec{r}_A^{\,\prime f} \times m_A \vec{v}_A^{\,\prime f} + \vec{r}_B^{\,\prime f} \times m_B \vec{v}_B^{\,\prime f} = \frac{3mLv_{A,y}^f}{4} \vec{k} - \frac{3mLv_{B,y}^f}{4} \vec{k} = \frac{3mL}{4} \left(v_{A,y}^f - v_{B,y}^f \right) \vec{k}.$$

Como el sistema conserva su momento angular total,

$$\vec{L}'^{i}_{CM} = \vec{L}'^{f}_{\mathrm{CM}} \Rightarrow \frac{3mL}{4}\left(v^{f}_{A,y} - v^{f}_{B,y}\right) = \frac{3mL}{4} v \Rightarrow v^{f}_{A,y} - v^{f}_{B,y} = v. \qquad (3)$$

Por último, la cuarta ecuación vendrá del análisis del movimiento del sistema en torno al centro de masas. Visto desde el centro de masas, el movimiento de las dos esferas es un movimiento circular uniforme. Por lo tanto, después de haber girado 90° la velocidad de la partícula A tendrá únicamente una componente a lo largo de la dirección j.

$$\vec{v}'^{f}_{A} = v'^{f}_{A,y}\vec{j}.$$

En el sistema de referencia del laboratorio, el movimiento de las esferas será una combinación de dicho movimiento circular uniforme y del movimiento de traslación uniforme del C.M.

$$\vec{v}^{f}_{A} = \vec{v}'^{f}_{A} + \vec{v}_{CM} = \frac{\vec{p}_{\mathrm{tot}}}{4m}\vec{i} + v'^{f}_{A,y}\vec{j} = \frac{v}{4}\vec{i} + v'^{f}_{A,y}\vec{j}. \qquad (4)$$

De la ecuación (4) deducimos que

$$v^{f}_{A,x} = \frac{v}{4},$$

que sustituido a la ecuación (1), conduce a

$$v^{f}_{B,x} = \frac{v}{4}.$$

Por otra parte, combinando las ecuaciones (2) y (3), podemos hallar que

$$v^{f}_{A,y} = \frac{3v}{4}, \qquad v^{f}_{B,y} = -\frac{v}{4}.$$

Con lo cual, las velocidades de las dos partículas en el sistema de referencia del laboratorio cuando la varilla ha girado 90° valen

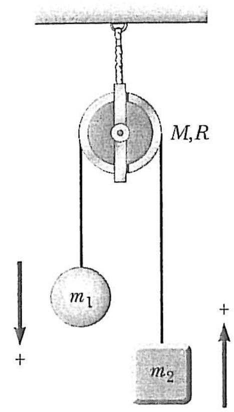
$$\vec{v}^{f}_{A} = \frac{v}{4}\vec{i} + \frac{3v}{4}\vec{j},$$

$$\vec{v}^{f}_{B} = \frac{v}{4}\vec{i} - \frac{v}{4}\vec{j}.$$

Problema 3: Dos objetos de masas distintas cuelgan de una cuerda que pasa por una polea que se puede considerar como un disco de masa M y radio R. Hallar:

(a) Cuánto vale el módulo de la aceleración de los dos cuerpos.

(b) Las tensiones de la cuerda.



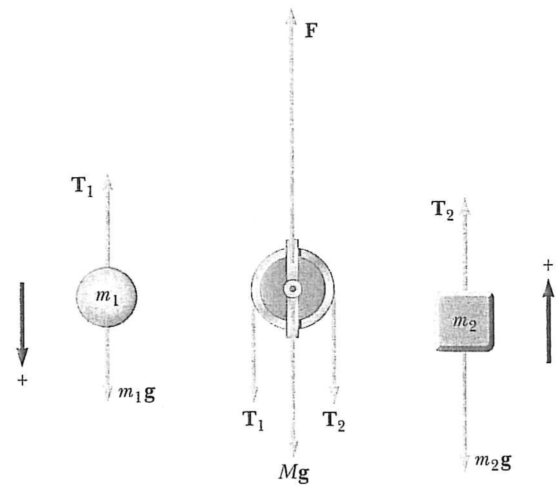
Nota: El momento de inercia de un disco de masa M y radio R con respecto a un eje que pase por su centro es $\frac{1}{2}MR^2$.

Solución: Supongamos que $m_1 > m_2$. En este caso la masa 1 se acelerará hacia abajo mientras que la masa 2 se acelerará hacia arriba. En este supuesto, la polea se moverá en el sentido contrario a las agujas del reloj, en la dirección que en el convenio usual de signos en los problemas de rotaciones se toma como positivo.

Si la polea tiene masa, las tensiones T_1 y T_2 en la cuerda a cada uno de los lados de la polea no son iguales en módulo. De hecho, la diferencia entre el torque (o par) correspondiente a estas dos tensiones distintas es la que proporciona un par neto que provoca una aceleración angular a la polea.

El peso de la polea y la fuerza ejercida por el gancho que sostiene a la polea actúan las dos a través del eje de la polea, de modo que estas fuerzas no contribuyen al par total sobre la polea.

Dibujamos los diagramas de cuerpo aislado de los tres cuerpos (las dos masas y la polea).



Aplicamos la segunda ley de Newton a la masa 1

$$\sum F_y = m_1 g - T_1 = m_1 a, \qquad (1)$$

y para la masa 2

$$\sum F_y = T_2 - m_2 g = m_2 a. \qquad (2)$$

Al plantear estas dos ecuaciones ya hemos tenido en cuenta que el módulo de la aceleración de las dos masas es el mismo.

Necesitamos una tercera ecuación para resolver nuestras tres incógnitas $T_1, T_2,$ y a. La tercera ecuación resulta de aplicar la segunda ley de Newton, adaptada a las rotaciones, a la polea.

$$\sum \tau = T_1 R - T_2 R = I\alpha = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{a}{R}\right) = \frac{1}{2}MRa \quad \Rightarrow \quad T_1 - T_2 = \frac{1}{2}Ma. \quad (3)$$

Sustituimos en (3) las expresiones para T_1 y T_2 obtenidas en (1) y (2)

$$\left(m_1 g - m_1 a\right) - \left(m_2 a + m_2 g\right) = \frac{1}{2}Ma,$$

$$a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} \right) g.$$

Las correspondientes expresiones para las tensiones se obtienen al sustituir la aceleración obtenida en las ecuaciones (1) y (2).