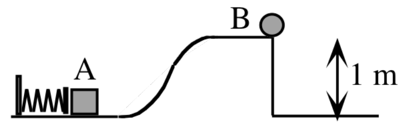
Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Enero de 2011
Problemas (Dos puntos por problema).

Problema 1 (Primer parcial): Un muelle de constante $k = 10^4$ N/m está comprimido 20 cm. Al liberarlo empuja a un cuerpo A de masa $m_A = 4$ kg. Este cuerpo asciende por una rampa sin rozamiento, y colisiona con otro de masa $m_B = 2$ kg.

Determinar:



(a) ¿Qué velocidad adquiere el cuerpo A al estirarse el muelle?
(b) ¿Qué velocidad lleva el cuerpo A justo antes de la colisión?
(c) Determinar la velocidad de los dos cuerpos después de la colisión (e =0.6).
(d) Calcular la energía perdida en el choque.
(e) Determinar el ángulo que forman la velocidad de los dos cuerpos con la horizontal en el momento que colisionan con el suelo.
(f) ¿Cuál es la distancia de separación entre ambos cuerpos cuando tocan el suelo?

Nota: $e = -\frac{v_B' - v_A'}{v_B - v_A}$

Solución:

(a) Dado que en este problema la energía mecánica se conserva, la energía mecánica del sistema muelle bloque A cuando el muelle está comprimido tiene que ser igual a la energía mecánica del sistema cuando el muelle se libera. Es decir, la energía elástica se transforma en energía cinética. Si llamamos $v_{A,1}$ al módulo de la velocidad del bloque A en esta posición inicial, entonces

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m_A v_{A,1}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{A,1}^2 = \sqrt{\frac{kx^2}{m_A}} = 10 \text{ m/s}.$$

Esta velocidad está dirigida ene l sentido positivo del eje x.

(b) En ausencia de rozamiento, la energía mecánica del bloque A se conserva. Llamando $v_{A,2}$ al módulo de la velocidad del bloque A justo antes de la colisión con el bloque B (de nuevo la dirección de la velocidad de A es el sentido positivo del eje x), y tomando como origen de alturas para calcular la energía potencial gravitatoria la base de la rampa, entonces

$$\frac{1}{2}m_A v_{A,1}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{A,2}^2 + m_A g h \Rightarrow \quad v_{A,2}^2 = v_{A,1}^2 - 2gh.$$

Sustituyendo los datos del problema para la altura y la velocidad del bloque A después de haberse estirado el muelle,

$$v_{A,2} = \sqrt{(100 - 2 \times 9{,}80 \times 1)} = 8{,}97 \text{ m/s}.$$

(c) Las ecuaciones a emplear son las de la conservación del momento lineal y la del coeficiente de restitución. Pondremos a las velocidades de las dos partículas antes del choque el subíndice 2, y a las velocidades de las dos partículas después del choque el subíndice 3. Podemos considerar además el choque como central y unidimensional (a lo largo del eje x). Entonces,

$$m_A v_{A,2} + m_B v_{B,2} = m_A v_{A,3} + m_B v_{B,3} \quad \Rightarrow \quad 4 \times 8{,}97 + 0 = 4v_{A,3} + 2v_{B,3} \quad \Rightarrow \quad 35{,}88 = 4v_{A,3} + 2v_{B,3} \quad ($$

$$e = -\frac{v_{B,3} - v_{A,3}}{v_{B,2} - v_{A,2}} \quad \Rightarrow \quad 0{,}6 = -\frac{v_{B,3} - v_{A,3}}{0 - 8{,}97} \quad \Rightarrow \quad 5{,}38 = -v_{A,3} + v_{B,3} \quad (2)$$

Multiplicando la Ec. (2) por 4 y sumándola a (1)

$$57{,}38 = 6\, v_{B,3} \quad \Rightarrow \quad v_{B,3} = 9{,}57 \text{ m/s}.$$

Y despejando en (2)

$$v_{A,3} = v_{B,3} - 5{,}38 \quad \Rightarrow \quad v_{A,3} = 4{,}19 \text{ m/s}.$$

(d) La pérdida de energía será igual a la energía cinética de las dos partículas antes del choque menos la energía cinética de las dos partículas después del choque.

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_A v_{A,2}^2 - \frac{1}{2} m_A v_{A,3}^2 - \frac{1}{2} m_B v_{B,3}^2 = \frac{1}{2} 4 \times 8{,}97^2 - \frac{1}{2} 4 \times 4{,}19^2 - \frac{1}{2} 2 \times 9{,}57^2 = 34{,}37\ J.$$

(e) Después del choque los dos cuerpos siguen un movimiento parabólico sometidos a la acción de la gravedad. En la dirección vertical, los dos cuerpos tienen un movimiento uniformemente acelerado y parten con velocidad inicial $v_{y0} = 0$. El tiempo que tardan en recorrer la distancia que les separa del suelo será el mismo,

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 1}{9{,}80}} = 0{,}45 \text{ s}.$$

La velocidad en la dirección y también será la misma para los dos cuerpos (pondremos un subíndice 4 para las velocidades de las dos partículas en esta parte de su trayectoria),

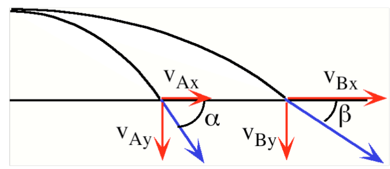
$$v_{A,4y} = v_{B,4y} = gt = 4{,}43 \text{ m/s}.$$

En la dirección x, la velocidad no cambia durante la caída,

$$v_{A,4x} = v_{A,3} = 4{,}19 \text{ m/s}.$$
$$v_{B,4x} = v_{B,3} = 9{,}57 \text{ m/s}.$$

Y el ángulo que forman con la horizontal es

$$\tan\alpha = \frac{v_{4,Ay}}{v_{4,Ax}} = \frac{4{,}43}{4{,}19} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 46{,}6^\circ.$$



$$\tan\beta = \frac{v_{4,By}}{v_{4,Bx}} = \frac{4{,}43}{9{,}57} \quad \Rightarrow \quad \beta = 24{,}8^\circ.$$

(f) En la dirección horizontal el movimiento lleva velocidad constante, por lo que el espacio recorrido es

$$x = v_x t \quad \Rightarrow \quad \Delta x = x_B - x_A = v_{4,Bx}t - v_{4,Ax}t = \left(v_{4,Bx} - v_{4,Ax}\right)t = \left(9{,}57 - 4{,}19\right)0{,}45 = 2{,}43 \text{ m}.$$

Problema 2 (Segundo parcial): Una masa situada en el orígen de coordenadas en un cierto instante explosiona y se divide en tres fragmentos cuyas masas son proporcionales a 1, 2, y 4. La primera sale despedida según la dirección positiva del eje x con $v_1 = 10\text{ m/s}$ y la segunda según la direccoón positiva del eje y con $v_2 = 5\text{ m/s}$. ¿En qué dirección y con qué velocidad sale el tercer fragmento?. Suponga que el movimiento se produce en el plano horizontal xy.

Solución:

Vamos a asumir que el movimiento se realiza en el plano y que, por lo tanto, podemos ignorar la acción de la gravedad (la fuerza de la gravedad se cancelará en todo momento con la normal).

Todas las fuerzas implicadas en la explosión son internas al sistema. Como no hay fuerzas externas, la aceleración del centro de masas se anula,

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{CM}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{\text{CM}} = 0.$$

Por otra parte

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{\text{tot}} \text{ se conserva},$$

donde $\vec{p}_{\text{tot}}$ para un sistema de n partículas se define como

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i .$$

Antes de la explosión, sólo había una partícula de masa $M = (1+2+4)m_0$ colocada en el orígen. Asumimos que la partícula está inicialmente en reposo, así que

$$\vec{p}_{tot}^{\,inicial} = 0.$$

Después de la explosión tenemos tres fragmentos:

<u>Fragmento 1:</u>

Masa $\quad m_1 = m_0$.
Velocidad $\quad \vec{v}_1^{\text{después}} = 10\,\vec{i}\ \text{m/s}.$
Momento $\quad \vec{p}_1^{\text{después}} = m_1\vec{v}_1^{\text{después}} = 10\,m_0\,\vec{i}\ \text{kg m/s}.$

Fragmento 2:

Masa $m_2 = 2\ m_0$.
Velocidad $\vec{v}_2^{\text{después}} = 5\ \vec{j}$ m/s.
Momento $\vec{p}_2^{\text{después}} = m_2 \vec{v}_2^{\text{después}} = 10\ m_0\ \vec{j}$ kg m/s.

Fragmento 3:

Masa $m_3 = 4\ m_0$.
Velocidad $\vec{v}_3^{\text{después}} = v_{3,x}^{\text{después}}\ \vec{i} + v_{3,y}^{\text{después}}\ \vec{j}\ (\text{m/s})$.
Momento $\vec{p}_3^{\text{después}} = m_3 \vec{v}_3^{\text{después}} = 4 m_0 v_{3,x}^{\text{después}}\ \vec{i} + 4 m_0 v_{3,y}^{\text{después}}\ \vec{j}\ (\text{m/s})$.

El momento total del sistema después de la explosión es

$$\vec{p}_{\text{tot}}^{\text{después}} = m_1 \vec{v}_1^{\text{después}} + m_2 \vec{v}_2^{\text{después}} + m_3 \vec{v}_3^{\text{después}} = \left(10\ m_0 + 4\ m_0 v_{3,x}^{\text{después}}\right) \vec{i} + \left(10\ m_0 + 4\ m_0 v_{3,y}^{\text{después}}\right) \vec{j}.$$

Como el momento total se conserva en este problema, debido a la ausencia de fuerzas externas,

$$\vec{p}_{\text{tot}}^{\text{antes}} = \vec{p}_{\text{tot}}^{\text{después}}.$$

Descomponiendo la ecuación en componentes

$$\begin{cases} 0 = 10\ m_0 + 4 m_0 v_{3,x}^{\text{después}} \quad \Rightarrow \quad v_{3,x}^{\text{después}} = -\dfrac{10}{4}\ \text{m/s} = -2{,}5\ \text{m/s}. \\ 0 = 10\ m_0 + 4 m_0 v_{3,y}^{\text{después}} \quad \Rightarrow \quad v_{3,y}^{\text{después}} = -\dfrac{10}{4}\ \text{m/s} = -2{,}5\ \text{m/s}. \end{cases}$$

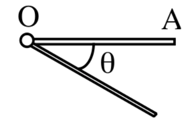
El módulo de la velocidad de la partícula 3 vale

$$v_3^{\text{después}} = \sqrt{v_{3,x}^{\text{después}} + v_{3,y}^{\text{después}}} = \sqrt{2}\ 2{,}5\ \text{m/s} = 3{,}53\ \text{m/s}.$$

Y el ángulo que forma con el eje x es (enemos en cuenta que está en el tercer cuadrante)

$$\alpha = \arctan \frac{v_{3,y}^{\text{después}}}{v_{3,x}^{\text{después}}} = \arctan \frac{-2{,}5}{-2{,}5} = \arctan 1 = 225^\circ.$$

Problema 3 (Segundo parcial): Una varilla homogénea OA de masa m y longitud L, puede girar en un plano vertical en torno a un eje que pasa por O (ver figura).

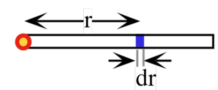


(a) Calcular el momento de inercia de la varilla con respecto al eje que pasa por O.
(b) Calcular la aceleración angular de la varilla en el instante en que se abandona desde la posición horizontal.
(c) Calcular la velocidad angular y la aceleración angular cuando la varilla forma un ángulo θ con la horizontal.
(d) Aplicar las ecuaciones encontradas en los tres apartados anteriores para determinar $I, \alpha(0), \omega(\theta)$, y $\alpha(\theta)$ en el caso de $m = 2$ kg, $L = 0{,}5$ m, $y\ \theta = 30^\circ$.

Solución:

(a) La definición de momento de inercia es $I = \int dm\, r^2$, con $dm = \rho\, dV = \rho\, S\, dr$, donde S es la sección transversal de la barra.

$$I = \int_0^L \rho\, S\, dr\, r^2 = \rho\, S \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^L = \frac{1}{3}\rho\, S\, L^3.$$

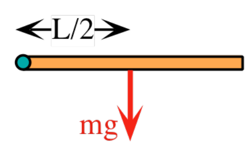


donde ρ y S han salido fuera de la integral por ser una barra uniforme. Como la masa total de la barra es $m = \rho\, S\, L$, entonces el momento de inercia se puede escribir como

$$I = \frac{1}{3} M\, L^2.$$

(b) Para calcular la aceleración angular, utilizamos la ecuación $\sum \tau_{\text{ext}} = I\,\alpha$. La única fuerza externa con un momento o torque no nulo sobre la varilla es el peso, situado en su centro de masas.

Al ser una varilla homogénea, el centro de masas estará situada en el centro de la misma. Cuando la varilla está en posición horizontal, el vector posición que une el punto O con el centro de masas es perpendicular al peso, luego el módulo del momento o torque del peso vale

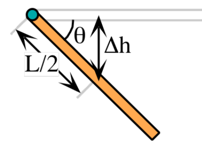


$$\tau = mg\frac{L}{2}\sin 90^\circ = mg\frac{L}{2},$$

y la aceleración angular

$$\sum \tau_{ext} = I\,\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\sum \tau_{\text{ext}}}{I} = \frac{mg\frac{L}{2}}{\frac{1}{3}mL^2} = \frac{3g}{2L} = \frac{14{,}71}{L}\ \text{rad/s}^2.$$

(c) La forma más sencilla de determinar la velocidad angular es por energías. Respecto al eje, la varilla realiza un movimiento de rotación puro, por lo que la pérdida de energía potencial gravitatoria se convierte en energía cinética de rotación,

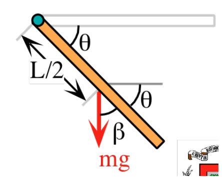


$$-\Delta E_p = \Delta E_c \quad \Rightarrow \quad mg(-\Delta h) = \frac{1}{2} I\left(\omega^2 - \omega_0^2\right).$$

Teniendo en cuenta que parte del reposo, $\omega_0 = 0$. Además la pérdida de energía potencial se contabiliza en el centro de masas, por lo que $-\Delta h = \frac{L}{2}\sin\theta$. Con estas consideraciones, la ecuación de conservación de la energía se transforma en

$$mg\frac{L}{2}\sin\theta = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{mgL\sin\theta}{\frac{1}{3}mL^2}} = \sqrt{\frac{3g\sin\theta}{L}} \text{ rad/s}.$$

En cuanto a la aceleración angular, aplicamos de nuevo $\tau = I\alpha$,



$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{mg\frac{L}{2}\sin\beta}{\frac{1}{3}mL^2} = \frac{3g\cos\theta}{2L} = 14{,}71\frac{\cos\theta}{L} \text{ rad/s}^2.$$

(d) Si $m = 2$ kg, $L = 0{,}5$ m, y $\theta = 30^\circ$,

$$I = \frac{1}{3}2\,(0{,}5)^2 = 0{,}1667 \text{ kg m}^2.$$

$$\alpha(0) = \frac{14{,}71}{0{,}5} = 29{,}42 \text{ rad/s}^2.$$

$$\omega(30^\circ) = \sqrt{\frac{3 \times 9{,}80 \times \sin 30^\circ}{0{,}5}} = 5{,}42 \text{ rad/s}.$$

$$\alpha\left(30^\circ\right) = 14{,}71\frac{\cos 30^\circ}{0{,}5} = 25{,}48 \text{ rad/s}^2.$$