Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Examen final. Enero de 2011
Cuestiones (Un punto por cuestión).

Cuestión 1 (Primer parcial): El vector de posición de una partícula es $\vec{r} = t^3\,\vec{i} + 2t\,\vec{j} + 2\vec{k}$. Calcular en función del tiempo:

(a) El vector velocidad y su módulo.
(b) El vector aceleración y su módulo.
(c) Las componentes tangencial y normal de la aceleración.
(d) El radio de curvatura.

Solución:

(a) La velocidad es la derivada del vector posición

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = 3t^2\,\vec{i} + 2\,\vec{j}.$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{9t^4 + 4}$$

(b) La aceleración es la derivada del vector velocidad

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = 6t\,\vec{i}.$$
$$|\vec{a}| = 6t$$

(c) La aceleración tangencial es la derivada del módulo de la velocidad

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \quad \Rightarrow \quad a_t = \frac{1}{2}\frac{36t^3}{\sqrt{9t^4+4}} = \frac{18t^3}{\sqrt{9t^4+4}}$$

La aceleración normal es igual al módulo de la velocidad al cuadrado dividido por el radio de curvatura. Como no conocemos el radio de curvatura tenemos que utilizar el hecho de que la aceleración normal y tangencial son perpendiculares,

$$|\vec{a}|^2 = a_t^2 + a_N^2 \quad \Rightarrow \quad a_N = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_t^2} = \sqrt{36\,t^2 - \frac{324\,t^6}{9\,t^4+4}} = \frac{12\,t}{\sqrt{9t^4+4}}.$$

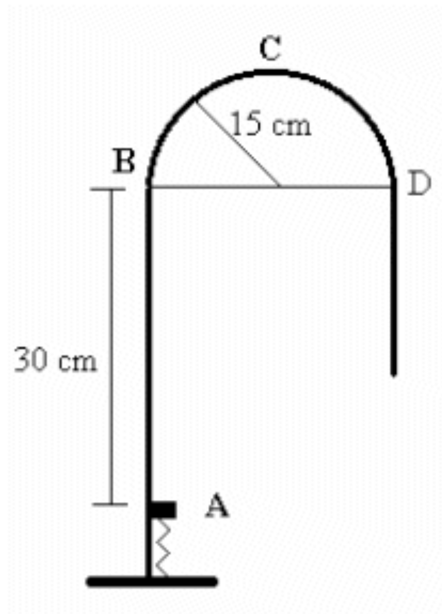
(d) El radio de curvatura ρ lo calculamos a partir de la fórmula de la aceleración normal

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{9t^4+4}{\dfrac{12t}{\sqrt{9t^4+4}}} = \frac{\left(9t^4+4\right)^{3/2}}{12t}.$$

Cuestión 2 (Primer parcial): Un bloque de 200 g permanece en reposo en A cuando el muelle de constante 500 N/m está comprimido 7,5 cm. Se suelta el dispositivo de sujeción y el bloque recorre el camino ABCD. Calcular:

(a) El módulo de la velocidad del bloque cuando pasa por B, C, y D

(b) La fuerza que ejerce el rail sobre el bloque cuando pasa por el punto más alto, C.



Solución:

(a) Suponiendo que no hay rozamiento, la energía mecánica del sistema se conserva.

Tenemos que considerar:
- Energía cinética del bloque, K.
- Energía potencial elástica del sistema muelle-bloque, U_e
- Energía potencial gravitatoria del sistema Tierra-muelle, U_g.

Tomamos como origen de alturas para el cálculo de la energía potencial gravitatoria el punto más bajo una vez que el muelle está comprimido. Llamaremos a esa posición y^A.

Así, en la posición A:

$$K^A = 0, \qquad U_g^A = 0, \qquad U_e^A = \frac{1}{2} k \Delta y^2 = \frac{1}{2} 500 \times \left(7{,}5 \times 10^{-2}\right)^2 \text{ J} = 1{,}41 \text{ J}.$$

$$E_{\text{mec}}^A = K^A + U_g^A + U_e^A = 1{,}41 \text{ J}.$$

En la expresión anterior, Δy es la elongación del muelle en el instante A.

En la posición B:

$$K^B = \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} 0{,}2 \times v_B^2 \text{ J}, \qquad U_g^A = mg\left(y^B - y^A\right) = 0{,}2 \times 9{,}8 \times 0{,}3 \text{ J} = 0{,}588 \text{ J}, \qquad U_e^B = 0.$$

$$E_{\text{mec}}^B = K^B + U_g^B + U_e^B = \left(0{,}588 + 0{,}1\, v_B^2\right) \text{J}.$$

Como la energía mecánica del sistema se conserva

$$E_{\text{mec}}^A = E_{\text{mec}}^B \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{\frac{(1{,}41 - 0{,}588)}{0{,}1}} \text{ m/s} = 2{,}87 \text{ m/s}$$

En la posición C:

$$K^C = \frac{1}{2} m v_C^2 = \frac{1}{2} 0{,}2 \times v_C^2 \text{ J}, \qquad U_g^C = mg\left(y^C - y^A\right) = 0{,}2 \times 9{,}8 \times 0{,}45 \text{ J} = 0{,}882 \text{ J}, \qquad U_e^C = 0.$$

$$E_{\text{mec}}^A = E_{\text{mec}}^C \quad \Rightarrow \quad v_C = \sqrt{\frac{(1{,}41 - 0{,}882)}{0{,}1}} \text{ m/s} = 2{,}30 \text{ m/s}$$

En la posición D:

$$K^D = \frac{1}{2} m v_D^2 = \frac{1}{2} 0{,}2 \times v_D^2 \text{ J}, \qquad U_g^D = mg\left(y^D - y^A\right) = 0{,}2 \times 9{,}8 \times 0{,}30 \text{ J} = 0{,}882 \text{ J}, \qquad U_e^D = 0.$$

$$E_{\text{mec}}^A = E_{\text{mec}}^D \quad \Rightarrow \quad v_D = \sqrt{\frac{(1{,}41 - 0{,}588)}{0{,}1}} \text{ m/s} = 2{,}87 \text{ m/s}$$

Evidentemente, como los puntos B y D están a la misma altura, el modulo de la velocidad en esos puntos tiene que ser el mismo.

(b) En el punto más alto, el bloque está siguiendo una trayectoria circular uniforme y, por lo tanto, estará sujeta a una aceleración centrípeta (dirigida hacia el centro de la curva), de módulo

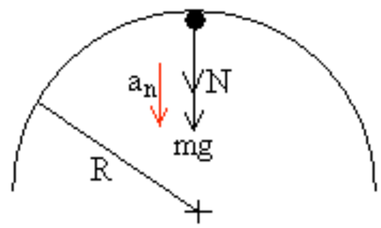
$$a_c = \frac{v^2}{R},$$

donde R es el radio de curvatura de la semicircunferencia (15 cm = 0,15 m). A partir de ahora supondremos siempre que el módulo de la velocidad se refiere al módulo de la velocidad en el punto C.

Aplicando la segunda ley de Newton, la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula tiene que ser igual a la masa de la misma multiplicada por la aceleración.

En ese punto, sobre el bloque están actuando dos fuerzas: su peso y la normal ejercida por el rail sobre el mismo. Tomando como sentido positivo hacia arriba y como sentido negativo hacia abajo,

$$-mg - N = -m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right) \quad \Rightarrow \quad N = 5.09 \text{ N}.$$



El módulo de la normal vale 5.09 N, y su dirección está dirigida hacia abajo (hacia el centro del círculo).

Cuestión 3 (Segundo parcial): En un choque central en una dimension estre dos partículas,

(a) ¿Cuál es el valor máximo y mínimo del coeficiente de restitución $e = -\frac{v_B^{'} - v_A^{'}}{v_B - v_A}$?

Comenta qué le pasa a las partículas después del choque en ambos casos.

(b) Demuestra que cuando $e = 1$ se conserva la energía cinética del sistema.

Solución:

(a) El valor máximo es 1 y el mínimo es 0.

En el primer caso $(e = 1)$, el choque es elástico, y la velocidad relativa de los dos objetos antes de la collision es igual a la velocidad relativa después de la colisión, pero con signo negativo. La energía cinética en un choque elástico se conserva.

En el segundo caso $(e = 0)$ el choque es elástico, y las partículas sequedan “pegadas”, moviendose con la misma velocidad.

(b) Por la conservación del momento lineal

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A^{'} + m_B v_B^{'} \quad \Rightarrow \quad m_A\left(v_A - v_A^{'}\right) = m_B\left(v_B^{'} - v_B\right). \qquad (1)$$

Por otra parte, si $(e = 1)$,

$$\left(v_B - v_A\right) = -\left(v_B^{'} - v_A^{'}\right) \quad \Rightarrow \quad v_A + v_A^{'} = v_B + v_B^{'}. \qquad (2)$$

Multiplicando las Ecuaciones (1) y (2)

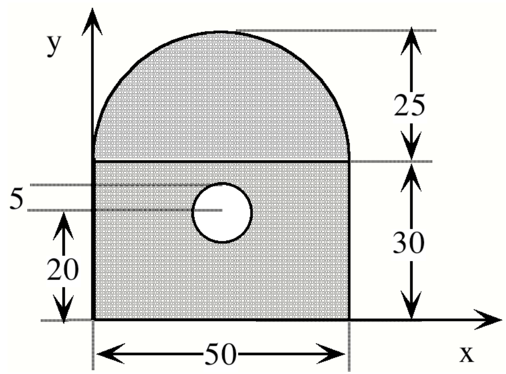
$$m_A\left(v_A - v_A^{'}\right)\left(v_A + v_A^{'}\right) = m_B\left(v_B^{'} - v_B\right)\left(v_B + v_B^{'}\right) \quad \Rightarrow \quad m_A v_A^2 - m_A v_A^{'2} = m_B v_B^{'2} - m_B v_B^2.$$

Multiplicando los dos miembros de esta ecuación por (1/2) y despejando los términos iniciales a la izquierda y los finales a la derecha, la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}m_A v_A^{'2} + \frac{1}{2}m_B v_B^{'2},$$

que es la ecuación de conservación de la energía cinética.

Cuestión 4 (segundo parcial): Determinar la posición del cetro de masas de la placa homogénea de la figura. (Unidades en cm).



Solución:

Podemos suponer que la placa se compone de la suma de dos placas (una rectangular y otra semicircular) a la que se resta una placa circular.

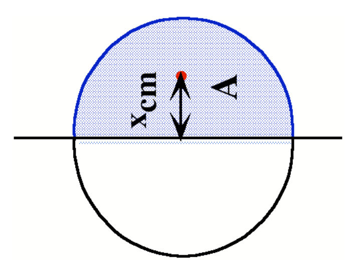
Por simetría, los centros de masa de la placa rectangular y la circular están en el centro.

El centro de masas de la placa semicircular podemos determinarlo por el teorema de Pappus Guldin. El teorema de Pappus Guldin nos dice que para un cuerpo de revolución

$$V = 2\pi y_{\mathrm{CM}} A, \qquad (1)$$

donde A es el área de la placa y V es el volumen de la esfera que genera al rotar. En el caso de la superficie semicircular,

$$A = \frac{1}{2}\pi r^2, \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

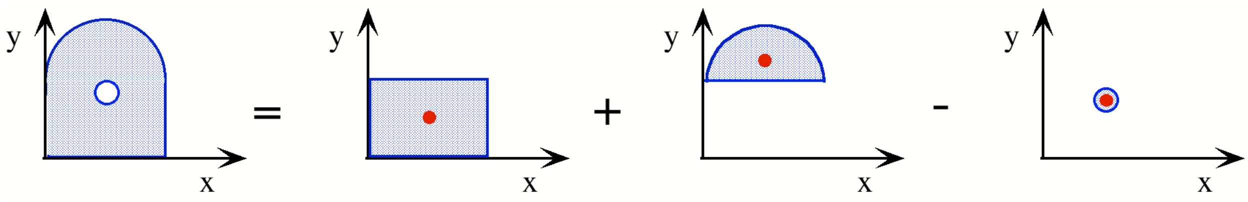


Introduciendo estos valores en la Ecuación (1),

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi y_{\mathrm{CM}}\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right) \Rightarrow y_{\mathrm{CM}} = \left(\frac{4r}{3\pi}\right)$$

Sustituyendo los datos del problema ($r = 25$ cm), entonces

$$y_{\mathrm{CM}} = \left(\frac{100}{3\pi}\right) = 10.61\,\mathrm{cm}.$$



A continuación, descomponemos la placa en la suma de tres placas. Como éstas son homogéneas, en lugar de utilizar masas podemos utilizar las correspondientes áreas.

Podemos calcular el área del rectángulo y su centro de masas (por simetría):

$$A_1 = 50 \times 30 \text{ cm}^2$$

$$x_{\text{CM1}} = 25 \text{ cm}, \qquad y_{\text{CM1}} = 15 \text{ cm}.$$

Igualmente, para el semicírculo

$$A_2 = \frac{1}{2}\pi\, 25^2 \text{ cm}^2 = 981.75 \text{ cm}^2.$$

$$x_{\text{CM2}} = 25 \text{ cm}, \qquad y_{\text{CM2}} = (30 + 10.61) \text{ cm} = 40.61 \text{ cm}.$$

Finalmente, para el círculo

$$A_3 = \pi\, 5^2 \text{ cm}^2 = 25\pi \text{ cm}^2.$$
$$x_{\text{CM3}} = 25 \text{ cm}, \qquad y_{\text{CM3}} = 20 \text{ cm}.$$

Conocidas las áreas y los centros de masas de los tres fragmentos, podemos calcular el centro de masas de la figura total.

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{3} A_i x_{\text{CM}i}}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = 25 \text{ cm}.$$

(Esta también se puede deducir viendo que hay un plano de simetría paralelo al eje y que pasa por $x = 25$ cm.)

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{3} A_i y_{\text{CM}i}}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{1500 \times 15 + 981.75 \times 40.61 - 25\pi \times 20}{1500 + 981.75 - 25\pi} \text{ cm} = 25.3 \text{ cm}.$$