Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Enero de 2011
Cuestiones (Un punto por cuestión).

Cuestión 1: Suponga que conocemos la posición inicial x_i y la velocidad inicial v_i de un oscilador armónico cuya frecuencia angular es también conocida; es decir, $x(0) = x_i$ y $v(0) = v_i$. Determine las expresiones generales para la amplitud y la constante de fase en función de estos parámetros iniciales.

Solución:

La solución general para la posición como función del tiempo de una partícula que sigue un movimiento oscilatorio armónico es

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi),$$

con lo que la velocidad como función del tiempo vale

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \phi).$$

Con las condiciones iniciales que nos da el problema tenemos

$$x_i = A\cos\phi, \qquad v_i = -\omega A\sin\phi.$$

Al dividir estas dos ecuaciones conseguimos eliminar A, lo que nos da

$$\frac{v_i}{x_i} = -\omega\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = -\omega\tan\phi,$$

$$\tan\phi = -\frac{v_i}{\omega x_i}.$$

A continuación, si consideramos la suma

$$x_i^2 + \left(\frac{v_i}{\omega}\right)^2 = A^2\cos^2\phi + A^2\sin^2\phi = A^2,$$

y despejando A encontramos que

$$A = \sqrt{x_i^2 + \left(\frac{v_i}{\omega}\right)^2}.$$

Cuestión 2: Se lanza una pelota de béisbol de 0,150 kg hacia el bateador, con una velocidad de 40,0 m/s. El bateador golpea la pelota y ésta comienza a moverse en dirección contraria con una velocidad de 50,0 m/s.

(a) ¿Qué impulso se suministra a la pelota?

(b) Calcular la fuerza media ejercida sobre la pelota, si están en contacto durante $2{,}0\times10^{-3}$ s.

Solución:

Por el teorema de la cantidad de movimiento y el impulso, sabemos que el impulso total de la fuerza neta que actúa sobre una partícula es igual a la variación de la cantidad de movimiento de la partícula.

Vamos a asumir que el movimiento de la pelota se produce a lo largo del eje *x*, y que inicialmente se mueve hacia la izquierda, es decir, que la velocidad inicial tiene signo menos.

Las cantidades de movimiento inicial y final de la pelota son:

$$\vec{p}_i = m\vec{v}_i = (0{,}15\text{ kg})(-40{,}0\,\vec{i}\text{ m/s}) = -6{,}00\,\vec{i}\text{ kg}\cdot\text{m/s}.$$

$$\vec{p}_f = m\vec{v}_f = (0{,}15\text{ kg})(50{,}0\,\vec{i}\text{ m/s}) = 7{,}50\,\vec{i}\text{ kg}\cdot\text{m/s}.$$

Por tanto, el impulso es

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = 7{,}50\,\vec{i}\text{ kg}\cdot\text{m/s} - (-6{,}00\,\vec{i}\text{ kg}\cdot\text{m/s}) = 13{,}50\,\vec{i}\text{ kg}\cdot\text{m/s}.$$

La fuerza neta ejercida por el bate sobre la pelota es

$$\overline{\vec{F}} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{13{,}50\,\vec{i}\text{ kg}\cdot\text{m/s}}{2{,}00\times10^{-3}\text{ s}} = 6{,}75\times10^{3}\text{ N}.$$

Cuestión 3: Las manecillas de las horas y de los minutos del Big Ben, el reloj de la torre del edificio del parlamento de Londres, tienen una longitud de 2,70 m y 4,50 m y unas masas de 60 kg y 100 kg, respectivamente. Calcular el momento angular total de estas manecillas con respecto al punto central. Modele las manecillas como varillas largas y delgadas de densidad uniforme.

Solución:

Lo primero que tenemos que tener en cuenta a la hora de resolver esta cuestión es que todas las partículas que forman cada una de las agujas describen un movimiento circular uniforme alrededor del punto central.

La celeridad angular de las agujas será:

$$\omega_{\text{horas}} = \frac{2\pi}{12\text{ h}} = \frac{2\pi}{12 \times 3600\text{ s}} = 1{,}45 \times 10^{-4}\text{ rad/s}, \qquad \text{y}$$

$$\omega_{\text{minutos}} = \frac{2\pi}{1\text{ h}} = \frac{2\pi}{1 \times 3600\text{ s}} = 1{,}74 \times 10^{-3}\text{ rad/s}.$$

Si consideramos cada aguja como un sistema continuo, podemos calcular el momento angular dividiendo las mismas en muchos elementos infinitesimales de masa dm.

En un instante dado, la posición de cada uno de estos elementos infinitesimales estará determinada por un vector de posición $\vec{r}$ (suponemos que el origen está localizado en el punto central) y se moverá con una velocidad tangencial $\vec{v}$.

El módulo de esta velocidad tangencial puede calcularse fácilmente si conocemos la celeridad angular, ω, y la distancia que separa la partícula del eje de giro, r,

$$v = r\omega.$$

Por otra parte, como cada partícula describe un movimiento circular alrededor del centro, siempre se verifica que el vector posición y el vector velocidad son perpendiculares el uno al otro. Entonces, el módulo del momento angular con respecto al punto central de este elemento infinitesimal vendrá dado por:

$$dL = |\vec{r}| \times |\vec{p}| \times \sin 90^\circ = r\, dm\, v = r\, r\, \omega\, dm = r^2\omega\, dm = r^2\omega\, \lambda\, dr,$$

donde hemos sustituido el elemento diferencial de masa por el producto de la densidad lineal, λ, y la longitud del elemento infinitesimal, dr. Esta densidad lineal se puede calcular fácilmente a partir de la masa de cada aguja, M, y de su longitud total, R.

$$\lambda = \frac{M}{R}.$$

Para conocer el momento angular total, tenemos que integrar a todos estos elementos diferenciales

$$L = \int dL = \int_0^R r^2 \omega \frac{M}{R} dr = \frac{M\omega}{R} \int_0^R r^2 dr = \frac{M\omega}{R} \frac{R^3}{3} = \frac{1}{3} M\omega R^2 .$$

Sustituyendo los datos para cada una de las agujas

$$L_{\text{horas}} = \frac{1}{3} M_{\text{horas}} \omega_{\text{horas}} R_{\text{horas}}^2 = \frac{1}{3} 60{,}0 \text{ kg} \times 1{,}45 \times 10^{-4} \text{rad/s} \times \left(2{,}70 \text{ m}\right)^2 = 2{,}12 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2\text{/s},$$

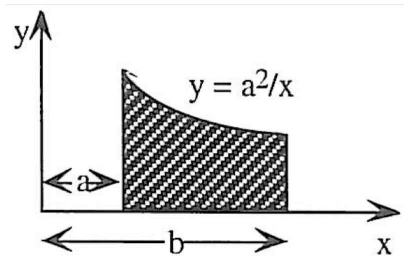
$$L_{\text{minutos}} = \frac{1}{3} M_{\text{minutos}} \omega_{\text{minutos}} R_{\text{minutos}}^2 = \frac{1}{3} 100{,}0 \text{ kg} \times 1{,}74 \times 10^{-3} \text{rad/s} \times \left(4{,}50 \text{ m}\right)^2 = 1{,}17 \text{ kg m}^2\text{/s}.$$

El momento angular total será la suma de los momentos angulares de cada una de las agujas

$$L_{\text{total}} = L_{\text{horas}} + L_{\text{minutos}} = 2{,}12 \times 10^{-2} \text{kg m}^2\text{/s} + 1{,}17 \text{ kg m}^2\text{/s} = 1{,}19 \text{ kg m}^2\text{/s}.$$

La dirección del vector momento angular estará dirigida hacia dentro del plano en el que giran las agujas.

Cuestión 4: Determinar la posición del centro de masas de la placa homogénea de la figura.



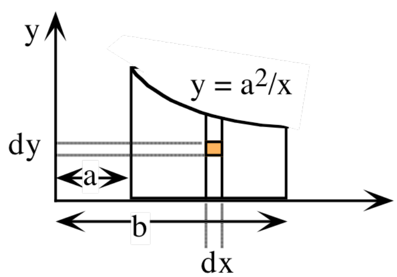
Nota: recordar que $\int \frac{dx}{x} = \ln x$

Solución:

Recordando la definición de centro de masas de una superficie homogénea

$$x_{\text{CM}} = \frac{\int x\, dA}{\int dA}, \qquad y_{\text{CM}} = \frac{\int y\, dA}{\int dA},$$

con $dA = dx\, dy$, integramos primero dy entre 0 y a^2/x, y luego dx entre a y b.



$$\int x\, dA = \iint x\, dx\, dy = \int_a^b x\, dx \int_0^{a^2/x} dy = \int_a^b x\, dx\, [y]_0^{a^2/x} = \int_a^b x\, dx\, \frac{a^2}{x} = \int_a^b a^2 dx = a^2\,[x]_a^b = a^2(b-a),$$

$$\int y\, dA = \iint y\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_0^{a^2/x} y\, dy = \int_a^b dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{a^2/x} = \int_a^b dx\, \frac{a^4}{2x^2} = \frac{a^4}{2}\left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = \frac{a^4}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right),$$

$$\int dA = \iint dx\, dy = \int_a^b dx \int_0^{a^2/x} dy = \int_a^b dx\, \left[y\right]_0^{a^2/x} = \int_a^b dx\, \frac{a^2}{x} = a^2\left[\ln x\right]_a^b = a^2\left(\ln b - \ln a\right) = a^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones iniciales,

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{\int x\, dA}{\int dA} = \frac{a^2(b-a)}{a^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{(b-a)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)},$$

$$y_{\mathrm{CM}} = \frac{\int y\, dA}{\int dA} = \frac{\frac{a^4}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}{a^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{a^2\left(\frac{b-a}{ab}\right)}{2\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{a(b-a)}{2b\ln\left(\frac{b}{a}\right)}.$$