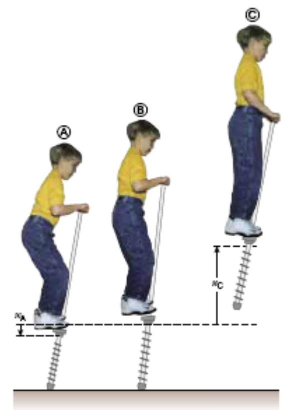
Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Primer parcial. Diciembre de 2012
Problemas (Dos puntos por problema).

Problema 1: Un palo saltador de niño almacena energía en un resorte de constante $k = 2{,}5 \times 10^4\ \mathrm{N/m}$. En la posición A $(x_A = -0.10\ \mathrm{m})$ la compresión del resorte es máxima y el niño está momentáneamente en reposo. En la posición B $(x_B = 0)$ el resorte está relajado y el niño se mueve hacia arriba. En la posición C el niño está de nuevo momentáneamente en reposo en lo alto del salto. La masa combinada del niño y el palo saltador es de 25,0 kg.



- **(a) Calcule la energía total del sistema niño-palo-Tierra si las energías potenciales gravitacional y elástica son cero para $x = 0$.**
- **(b) Determine el valor x_C para la posición C.**
- **(c) Calcule la rapidez del niño en $x = 0$.**
- **(d) Determine el valor de x para el cual la energía cinética del sistema es máxima.**
- **(e) Calcule la rapidez máxima del niño hacia arriba**

Solución:

(a) La energía de nuestro sistema se va a conservar, y en la situación inicial vale

$$E_{\text{sistema}} = mgx_A + \frac{1}{2}kx_A^2 = 25{,}0\ \mathrm{kg} \times 9{,}8\ \mathrm{m/s^2} \times (-0{,}10\ \mathrm{m}) + \frac{1}{2} 2{,}5 \times 10^4\ \mathrm{N/m} \times (-0{,}1\ \mathrm{m})^2 = 100{,}5\ \mathrm{J}.$$

(b) Esta mismo valor de la energía tendremos en la configuración C, en la cual el niño está en reposo y el muelle está en la configuración de equilibrio.

$$E_{\text{sistema}} = mgx_C \quad \Rightarrow \quad x_C = \frac{E_{\text{sistema}}}{mg} = \frac{100{,}5\ \mathrm{J}}{25{,}0\ \mathrm{kg} \times 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}} = 0{,}41\ \mathrm{m} = 41\ \mathrm{cm}.$$

(c) En la posición B, tanto la energía potencial gravitacional y elástica son cero, luego toda la energía es energía cinética y

$$E_{\text{sistema}} = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{\frac{2E_{\text{sistema}}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 100{,}5\ \mathrm{J}}{25{,}0\ \mathrm{kg}}} = 2{,}84\ \mathrm{m/s}.$$

(d) La energía cinética será máxima cuando la energía potencial total sea mínima;

$$K_{\text{maxima}} \quad \Rightarrow \quad U_{\text{minima}}$$

Si la energía potencial es mínima, entonces la fuerza total sobre el sistema es nula (recordad que en el caso de fuerzas conservativas, la fuerza se puede calcular como el gradiente de una función energía potencial)

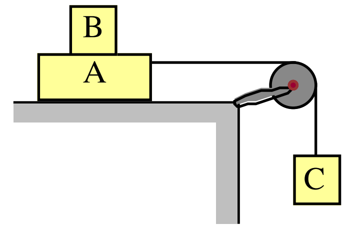
$$U_{\text{minima}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{dx} = -F_{\text{total}} = 0$$

$$F_{\text{total}} = -kx_{\text{D}} - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{\text{D}} = -\frac{mg}{k} = -\frac{25{,}0\ \text{kg} \times 9{,}80\ \text{m/s}}{2{,}5 \times 10^{4}\,\text{N/m}} = -0{,}098\ \text{m} = \text{-9,8 cm}.$$

(e) La velocidad en dicha posición será

$$E_{\text{sistema}} = \frac{1}{2}mv_{\text{D}}^{2} + mgx_{\text{D}} + \frac{1}{2}kx_{\text{D}}^{2} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{D}} = 2{,}85\ \text{m/s}.$$

Problema 2: Un bloque B de masa m_B descansa sobre el A, de masa m_A, que a su vez está sobre una superficie horizontal. El coeficiente de rozamiento dinámico entra A y la superficie horizontal es μ_d y el coeficiente de rozamiento estático entre A y B es μ_e . Un hilo atado a A pasa por una polea, sin masa ni rozamiento, con el bloque C colgado en el otro extremo.



- **(a) ¿Cuál es la aceleración máxima del sistema que hace que A y B se muevan juntos cuanto el sistema se libera desde el reposo?**
- (b) **¿Cuál es la tensión de la cuerda en dicho caso?**
- (c) **¿Qué valor de masa m_C debe tener C para producir esta aceleración?**

Expresar los resultados en función de $m_A, m_B, \mu_d, y\ \mu_e$

Solución:

(a) La fuerza que acelera al cuerpo B es la de rozamiento con el A. Cuando no hay deslizamiento, la fuerza de rozamiento f^{B}_{roz} puede tomar cualquier valor entre 0 y la fuerza máxima $f^{B}_{roz\,max} = \mu_e N_B$. Como hay una fuerza máxima que le puede acelerar, solo podrá llevar una aceleración máxima. Por la segunda ley de Newton,

$$f^{B}_{roz\,max} = m_B a_{max} \quad \Rightarrow \quad \mu_e N_B = m_B a_{max}.$$

La única incógnita es N_B. En la dirección vertical no hay aceleración, por lo que

$$N_B - m_B g = 0 \quad \Rightarrow \quad N_B = m_B g.$$

Sustituyendo este valor en la fórmula anterior

$$\mu_e m_B g = m_B a_{max} \quad \Rightarrow \quad a_{max} = \mu_e g.$$

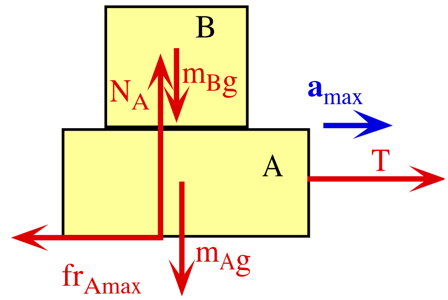
Cuando la tensión hace que A tenga una aceleración superior al valor que hemos calculado, el cuerpo B no puede alcanzar dicha aceleración y desliza hacia atrás con respecto al cuerpo A.

(b) Si A y B se mueven unidos los podemos considerar como un único bloque cuya masa es la suma de las dos, $m_A + m_B$. La normal en la superficie horizontal N_A se opone a su peso,

$$N_A = m_A g + m_B g.$$

En la dirección horizontal solo actúan la tensión y la fuerza de rozamiento, que como hay deslizamiento, será una fuerza de rozamiento dinámica,

$$f_{\mathrm{roz}}^{\mathrm{A}} = \mu_{\mathrm{d}} N_{\mathrm{A}} = \mu_{\mathrm{d}}\left(m_{\mathrm{A}} g + m_{\mathrm{B}} g\right).$$



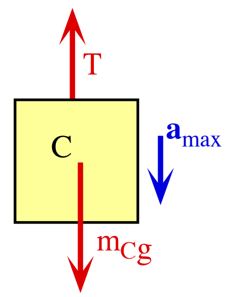
Aplicando la segunda ley de Newton,

$$T - f_{\mathrm{roz}}^{\mathrm{A}} = \left(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}\right) a_{\max} \quad \Rightarrow \quad T = \left(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}\right) a_{\max} + f_{\mathrm{roz}}^{\mathrm{A}},$$

y sustituyendo los valores de $a_{\max}$ y $f_{\mathrm{roz}}^{\mathrm{A}}$,

$$T = \left(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}\right)\mu_{\mathrm{e}} g + \left(m_{\mathrm{A}} g + m_{\mathrm{B}} g\right)\mu_{\mathrm{d}},$$
$$T = \left(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}\right) g\left(\mu_{\mathrm{d}} + \mu_{\mathrm{e}}\right).$$

(c) La tensión T está originada por el cuerpo C. Cuando los bloques A y B llevan una aceleración máxima $a_{\max}$, el C lleva la misma aceleración. Aplicando la segunda ley de Newton a dicho cuerpo,



$$m_{\mathrm{C}} g - T = m_{\mathrm{C}} a_{\max} \quad \Rightarrow \quad m_{\mathrm{C}}(g - a_{\max}) = T \quad \Rightarrow$$
$$m_{\mathrm{C}}\left(g - \mu_{\mathrm{e}} g\right) = \left(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}\right) g\left(\mu_{\mathrm{e}} + \mu_{\mathrm{d}}\right) \quad \Rightarrow$$
$$m_{\mathrm{C}}\left(1 - \mu_{\mathrm{e}}\right) g = \left(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}\right) g\left(\mu_{\mathrm{e}} + \mu_{\mathrm{d}}\right) \quad \Rightarrow \quad m_{\mathrm{C}} = \left(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}\right)\frac{\left(\mu_{\mathrm{e}} + \mu_{\mathrm{d}}\right)}{\left(1 - \mu_{\mathrm{e}}\right)}.$$

Problema 3: El tripulante de un globo aerostático, subiendo verticalmente con velocidad constante de 5 m/s suelta un saco de arena cuando el globo está a 40 m sobre el suelo. El saco está en caída libre.
(a) Calcule la velocidad y la posición del saco 0.5 s y 2 s después.
(b) ¿Cuánto tardará el saco en chocar contra el suelo?
(c) ¿Cuál será la velocidad al chocar?.
(d) ¿Qué altura máxima alcanza el saco sobre el suelo?.
(e) Trace las curvas *a*(*t*), *v*(*t*), *y*(*t*) para el movimiento.

a) Vamos a situar nuestro origen de coordenadas en el suelo justo debajo del globo, el eje Y vertical hacia arriba y ponemos a cero nuestro cronómetro cuando se suelta el saco de arena. Escribamos las condiciones iniciales del movimiento y las ecuaciones de movimiento para el saco:

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = 40 \text{ m} \quad , \quad v_0 = 5 \text{ m/s} \\ t_0 = 0 \quad , \quad a = -g = -9.8 \text{ m/s}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y(t) = y_0 + v_0\, t - \dfrac{1}{2} g\, t^2 \\ v(t) = v_0 - g\, t \end{array}\right.$$

En los instantes $t_1 = 0.5$ s y $t_2 = 2$ s la posición y la velocidad del saco serán:

$$y(t_1) = y_0 + v_0\, t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = \boxed{41.3 \text{ m}} \qquad y(t_2) = y_0 + v_0\, t_2 - \frac{1}{2} g\, t_2^2 = \boxed{30.4 \text{ m}}$$

$$v(t_1) = v_0 - g t_1 = \boxed{0.1 \text{ m/s}} \qquad v(t_2) = v_0 - g t_2 = \boxed{-14.6 \text{ m/s}}$$

b) Cuando el saco choca contra el suelo:

$$y(t_{choque}) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 + v_0\, t_{choque} - \frac{1}{2} g\, t_{choque}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{choque} = \boxed{3.41 \text{ s}}$$

(la segunda soluc. da un tiempo negativo que no tiene sentido en nuestro problema)

c) En ese instante la velocidad será:

$$v(t_{choque}) = v_0 - g\, t_{choque} = \boxed{-28.4 \text{ m/s}}$$

d) La altura será máxima en el instante $t_{máx.}$ en el que la velocidad se anule:

$$v(t_{máx.}) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 - g\, t_{máx.} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{máx.} = 0.51 \text{ s}$$

y su valor será:

$$y_{máx.} = y(t_{máx.}) = y_0 + v_0\, t_{máx.} - \frac{1}{2} g\, t_{máx.}^2 = \boxed{41.3 \text{ m}}$$

e) Las gráficas del movimiento serán las siguientes: