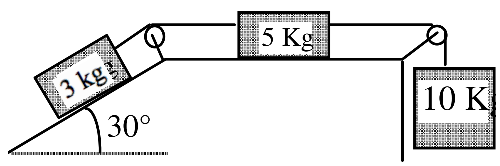
Examen de Física-1, 1° Ingeniería Química
Primer parcial. Diciembre de 2011
Problemas (Dos puntos por problema).

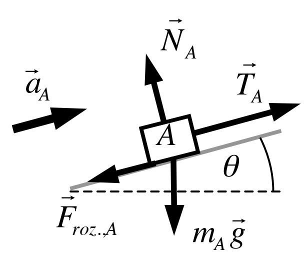
Problema 1: Los tres bloques de la figura están conectados por media de cuerdas ligeras que pasan por poleas sin rozamiento. La aceleración del sistema es de 2 m/s^2 y las superficies son rugosas. Calcular:
(a) Las tensiones de las cuerdas.
(b) El coeficiente de rozamiento entre los bloques y la superficie (suponiendo μ igual para los dos bloques).
(Tomad $g = 10$ m/s^2)



Solución:

Comenzamos la resolución del problema dibujando los diagramas de cuerpo aislado para cada uno de los tres cuerpos.

Para el bloque A tendremos:



Si escogemos un sistema de coordenadas en el cuál el eje x sea paralelo al plano inclinado y el eje y perpendicular al mismo, podemos proyectar las fuerzas sobre cada uno de estos ejes y plantear la segunda ley de Newton.

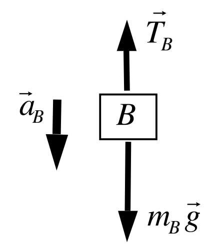
A lo largo del eje y:

$$N_A - m_A g\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A = m_A g\cos\theta.$$

A lo largo del eje x:

$$T_A - F_{roz,A} - m_A g \sin\theta = m_A a_A \quad \Rightarrow$$
$$T_A - \mu N_A - m_A g \sin\theta = m_A a_A \quad \Rightarrow$$
$$T_A - \mu\, m_A g \cos\theta - m_A g \sin\theta = m_A a_A. \qquad (1)$$

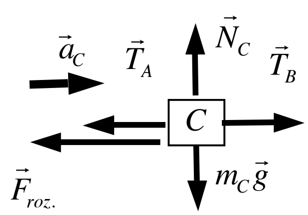
Para el bloque B tendremos:



Para este bloque elegimos un sistema de coordenadas en el cuál el eje y sea vertical, y cuyo sentido positivo apunte hacia abajo. La segunda ley de Newton en este caso se transforma en:

$$m_B g - T_B = m_B a_B. \qquad (2)$$

Por último, para el bloque C, tendremos:



Para este bloque elegimos un sistema de coordenadas en el cuál el eje x sea horizontal (paralelo al plano), y eje y sea vertical (perpendicular al plano). En este caso, las ecuaciones de Newton toman la forma

A lo largo del eje y:

$$N_C - m_C g = 0 \quad \Rightarrow \quad N_C = m_C g.$$

A lo largo del eje x:

$$T_B - T_A - F_{roz,C} = m_C a_C \quad \Rightarrow$$
$$T_B - T_A - \mu N_C = m_C a_C \quad \Rightarrow$$
$$T_B - T_A - \mu\, m_C g = m_C a_C. \qquad (3)$$

Por último, sabemos que el módulo de la aceleración de los tres cuerpos es el mismo:

$$a_A = a_B = a_C \equiv a. \qquad (4)$$

Así pues, tenemos que resolver el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (las tensiones de las cuerdas y el coeficiente de rozamiento):

$$\begin{cases} T_A - \mu\, m_A g\cos\theta - m_A g\sin\theta = m_A a, \\ m_B g - T_B = m_B a, \\ T_B - T_A - \mu m_C g = m_C a. \end{cases}$$

De la segunda ecuación deducimos que

$$T_B = m_B\left(g - a\right).$$

Sustituyendo en la tercera,

$$T_A = m_B\left(g - a\right) - m_C(\mu g + a).$$

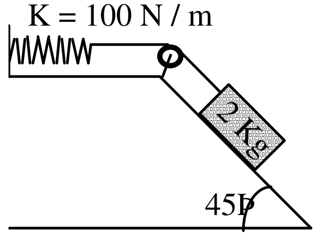
Y finalmente, llevando esta expresión a la primera y despejando μ

$$\mu = \frac{\left(m_B - m_A\sin\theta\right) - \left(m_A + m_B + m_C\right)\dfrac{a}{g}}{m_A\cos\theta + m_C}.$$

Sustituyendo los datos del problema:

$$\mu = 0{,}645$$
$$T_A = 37{,}75\ \mathrm{N}$$
$$\mathrm{T}_B = 80{,}0\ \mathrm{N}$$

Problema 2: Un bloque de 2 kg situado sobre un plano inclinado áspero se conecta a un resorte ligero que tiene una constante $k = 100$ N/m . El bloque se libera a partir del reposo cuando el resorte no está estirado y la polea carece de fricción. El bloque se mueve 20 cm hacia abajo antes de quedar en reposo. Hallar el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano.



Solución:

Calculamos la energía mecánica del sistema en la situación inicial:

- Como el muelle no está estirado, la energía elástica del sistema muelle-bloque es nula.
- El muelle carece de masa, luego su energía cinética es nula.
- El bloque parte del reposo, luego su energía cinética también es nula.
- Tomando como origen de energía potencial gravitatoria el suelo, la energía potencial gravitatoria del bloque será $m\,g\,h_{\text{ini}}$.

Luego

$$E_{\text{ini}}^{\text{mec}} = m\,g\,h_{\text{ini}} .$$

Ahora calculamos la energía mecánica del sistema en la situación final:

- El muelle carece de masa, luego su energía cinética es nula.
- El bloque queda en reposo, luego su energía cinética también es nula.
- El muelle se estira 20 cm, luego hay una energía potencial elástica $E_{\text{pot elastica}} = \dfrac{1}{2} k\,\Delta x^2$.
- Al descender 20 cm por la rampa, la altura a la que se encuentra el objeto también disminuye:

$$\Delta h = h_{\text{ini}} - h_{\text{fin}} .$$

Pero un simple análisis de trigonometría nos permite calcular la variación de altura,

$$\sin 45 = \frac{\Delta h}{0,2} \quad \Rightarrow \quad \Delta h = 0,2 \cdot \sin 45.$$

La energía potencial gravitatoria del bloque en la situación final vale $m\,g\,h_{\text{fin}}$.

Luego, la energía mecánica del sistema en la situación final toma el valor

$$E_{\text{fin}}^{\text{mec}} = \frac{1}{2} k\,\Delta x^2 + m\,g\,h_{\text{fin}}.$$

La variación en la energía mecánica es el trabajo disipado por la fuerza de rozamiento.

$$\begin{aligned}
\Delta E^{\text{mec}} = E_{\text{fin}}^{\text{mec}} - E_{\text{ini}}^{\text{mec}} &= \frac{1}{2} k\,\Delta x^2 + m\,g\,h_{\text{fin}} - m\,g\,h_{\text{ini}} \\
&= \frac{1}{2} k\,\Delta x^2 + m\,g\left(h_{\text{fin}} - h_{\text{ini}}\right) \\
&= \frac{1}{2} k\;\Delta x^2 - m\,g\,\Delta h \\
&= -0,772\text{ J} = \mathrm{W}_{\text{roz}}.
\end{aligned}$$

Por definición de trabajo,

$$W_{\text{roz}} = \vec{f}_{\text{roz}} \cdot \Delta\vec{r} = f_{\text{roz}} \cdot \Delta r \cdot \cos 180 = -f_{\text{roz}} \cdot \Delta r,$$

donde $\Delta\vec{r}$ se refiere al desplazamiento del bloque de magnitud 20 cm a lo largo de la rampa, y donde hemos dado por hecho que la fuerza de rozamiento se opone al deslizamiento y por lo tanto forma un ángulo de 180° con el mismo. Despejando la fuerza de rozamiento, llegamos a

$$f_{\text{roz}} = -\frac{W_{\text{roz}}}{\Delta r} = -\frac{-0,772\text{ J}}{0,2\text{ m}} = 3{,}859\text{ N}.$$

Pero el módulo de la fuerza de rozamiento se puede calcular como $f_{\text{roz}} = \mu N$, y como la aceleración del bloque en la dirección perpendicular al plano es nula,

$$N = m\,g \sin 45 = 1{,}386\text{ N}.$$

Luego,

$$\mu = \frac{f_{\text{roz}}}{N} = \frac{3{,}859\text{ N}}{1{,}386\text{ N}} = 0,278.$$

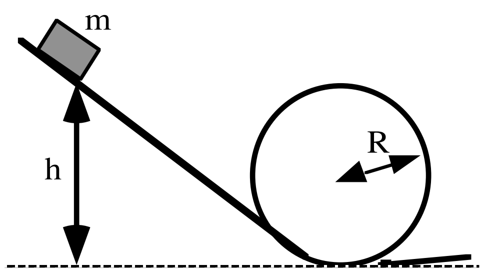
Problema 3: Un pequeño bloque de masa m se desliza sin rozamiento por una vía en forma de lazo como la indicada en la figura. El lazo circular tiene un radio R. El bloque parte del reposo a una altura h por encima de la parte inferior del lazo.

(a) ¿Cuál es la energía cinética del bloque cuando alcanza la parte superior del lazo?.

(b) ¿Cuál es la aceleración en la parte superior del lazo admitiendo que no se sale de la vía?

(c) ¿Cuál es el menor valor de h sabiendo que el bloque ha de alcanzar la parte superior del lazo sin salirse de la vía?

(d) Calcular numéricamente los apartados anteriores para $m = 4$ kg, $h = 8$ m, y $R = 2$ m.



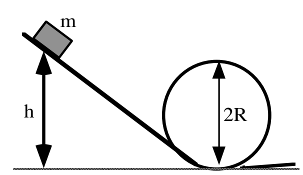
Nota: en el apartado (c), aplicad que la condición de contacto es que la normal sea siempre ≥ 0.

Solución:

(a) Como no hay rozamiento, la energía mecánica del sistema se conserva,

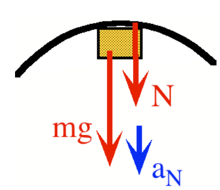
$$E_{\text{ini}}^{\text{mec}} = E_{\text{fin}}^{\text{mec}} \quad \Rightarrow \quad m\,g\,h_{\text{ini}} + \frac{1}{2}mv_{\text{ini}}^2 = m\,g\,h_{\text{fin}} + \frac{1}{2}mv_{\text{fin}}^2.$$

Si consideramos $h = 0$ en la parte inferior del lazo, entonces $h_{\text{ini}} = h$, y $h_{\text{fin}} = 2R$. Además, como parte de reposo, la energía cinética inicial es nula, por lo que la ecuación de conservación de la energía queda como sigue



$$m\,g\,h = m\,g\,2R + \frac{1}{2}mv_{\text{fin}}^2 \quad \Rightarrow \quad K_{\text{fin}} = \frac{1}{2}mv_{\text{fin}}^2 = m\,g\,(h - 2R).$$

(b) Dentro del lazo el cuerpo realiza un movimiento circular. En la parte superior, las únicas fuerzas que actúan son el peso y la normal, y las dos llevan la misma dirección, apuntando hacia el centro del círculo. Por ello, la única aceleración en la parte superior del lazo es la aceleración normal, de módulo $a_N = \dfrac{v^2}{R}$.



El cuadrado de la velocidad lo podemos despejar de la energía cinética calculada en el apartado anterior

$$v_{\text{fin}}^2 = 2g(h-2R) \quad \Rightarrow \quad a_N = 2g\frac{(h-2R)}{R}.$$

(c) Aplicando la segunda ley de Newton en la parte superior de la vía,

$$N + mg = m\frac{v^2}{R},$$

obtenemos que la normal vale

$$N = m\frac{v^2}{R} - mg.$$

La condición de contacto es que la normal sea siempre ≥ 0. Luego,

$$m\frac{v^2}{R} - mg \geq 0 \quad \Rightarrow \quad v^2 \geq Rg.$$

Además, en el apartado (b) hemos calculado que el cuadrado de la velocidad del bloque en la parte superior es $v^2 = 2g(h-2R)$, por lo que sustituyendo este valor en la desigualdad anterior

$$2g(h-2R) \geq Rg \quad \Rightarrow \quad 2h - 4R \geq R \quad \Rightarrow \quad h \geq \frac{5}{2}R.$$

(d) Sustituyendo los datos en las diferentes expresiones resulta

$$K_{\text{fin}} = mg(h-2R) = 156{,}96 \text{ J}$$

$$\mathrm{a}_N = 2g\frac{(h-2R)}{R} = 39{,}24\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$h \geq \frac{5}{2}R = 5\,\text{m}$$