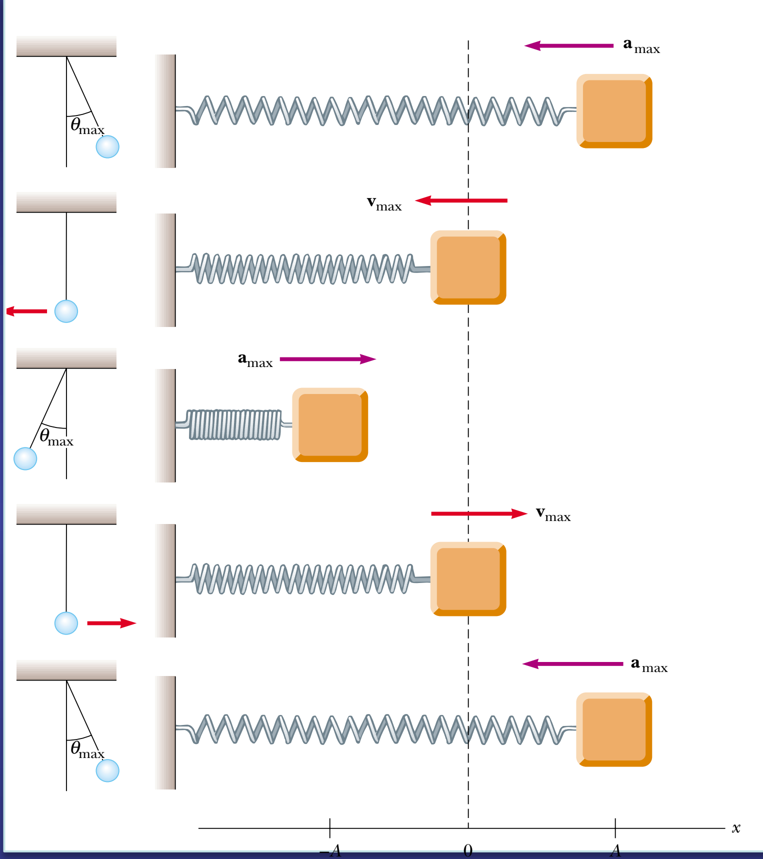
Movimiento oscilatorio



t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$T/4$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$T/2$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$3T/4$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$

Javier Junquera

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Bibliografía

FUENTE PRINCIPAL

Física, Volumen 1, 3° edición

Raymod A. Serway y John W. Jewett, Jr.

Ed. Thomson

ISBN: 84-9732-168-5

Capítulo 12

Física para Ciencias e Ingeniería, Volumen 1, 7° edición

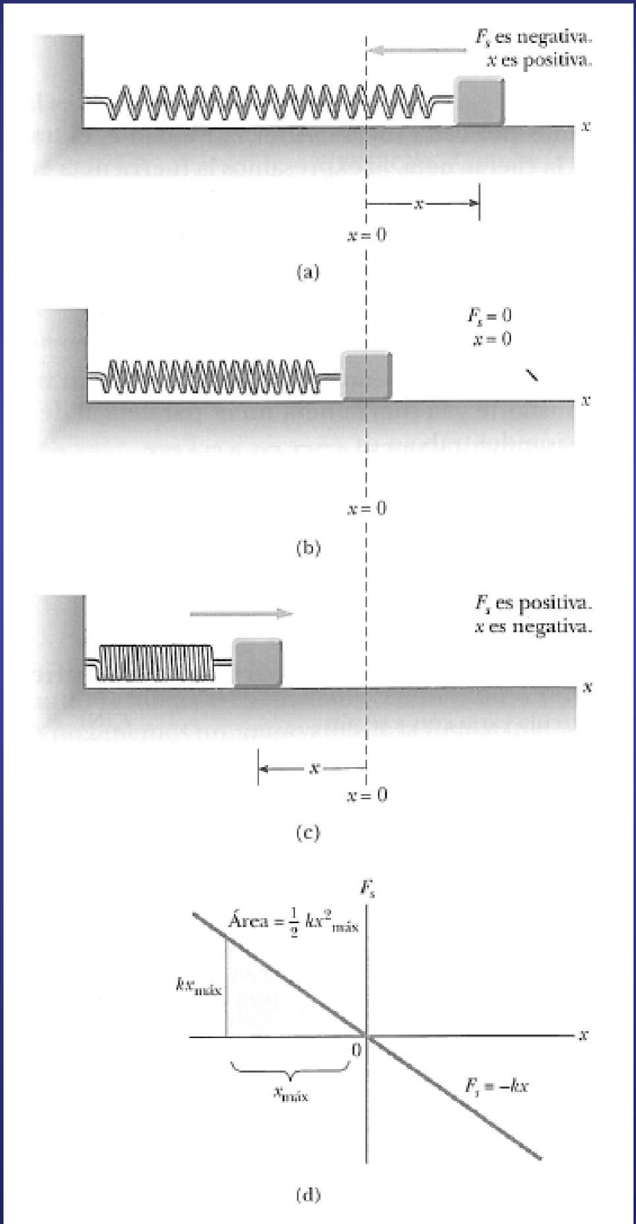
Raymod A. Serway y John W. Jewett, Jr.

Cengage Learning

ISBN 978-970-686-822-0

Capítulo 15

Fuerza que actúa sobre una partícula unida a un muelle sin masa.



Supongamos que el movimiento se realiza sobre una superficie horizontal (unidimensional, a lo largo de la dirección x) y sin rozamiento.

A la posición de equilibrio le hacemos corresponder la posición $x = 0$

$$F_s = -kx$$

Ley de Hooke

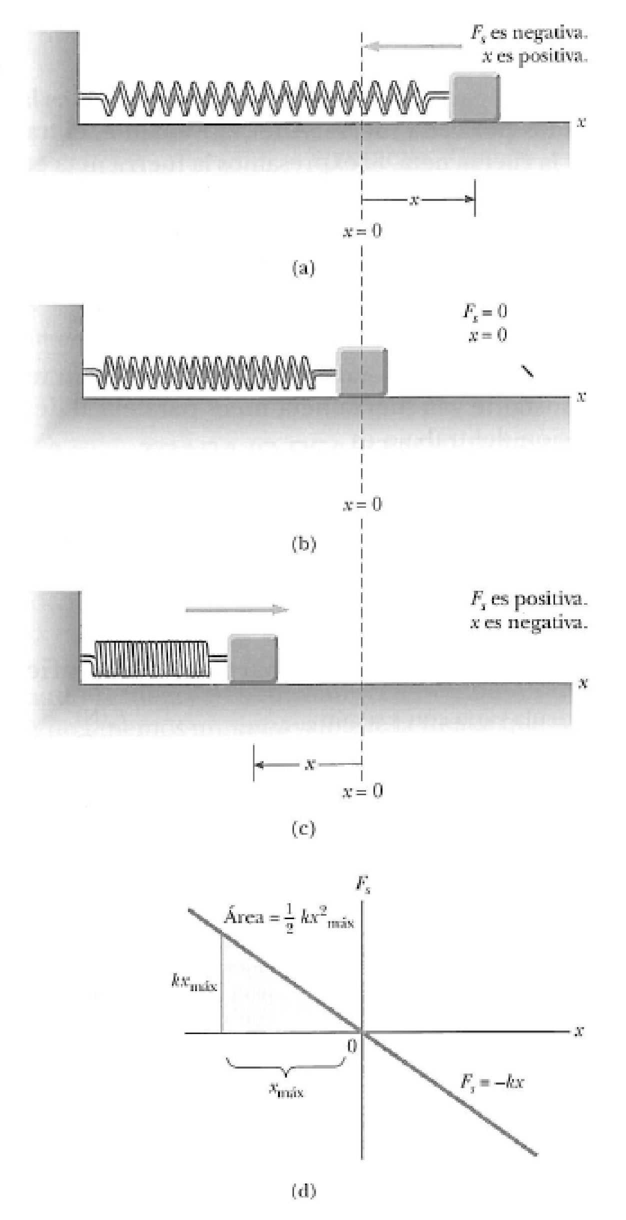
La fuerza varía con la posición, proporcional al desplazamiento con respecto a la posición de equilibrio

k es una constante positiva (constante de recuperación, contante del muelle o constante de rigidez).

El signo menos indica que la fuerza ejercida por el muelle tiene sentido opuesto al desplazamiento con respecto a la posición de equilibrio.

Valida si el desplazamiento no es demasiado grande.

Movimiento de una partícula unida a un muelle sin masa: movimiento armónico simple.



$$F_s = -kx$$

Cuando una partícula está bajo el efecto de una fuerza de recuperación lineal, el movimiento de la partícula se corresponde con un tipo especial de movimiento oscilatorio denominado movimiento oscilatorio armónico.

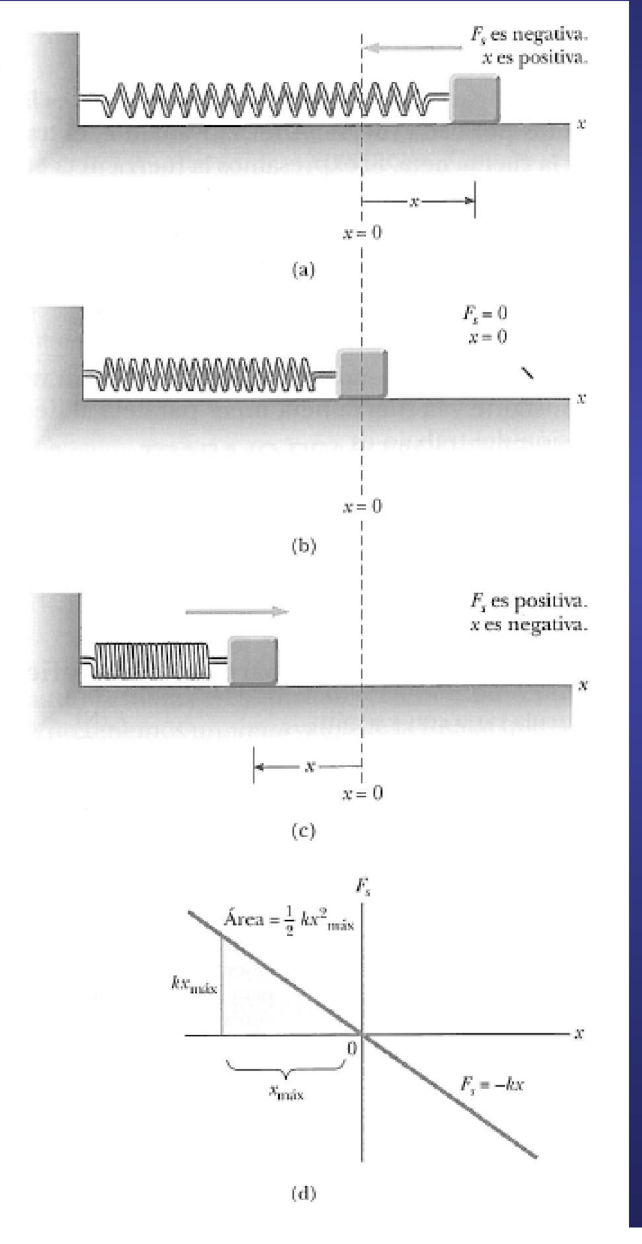
Aplicando a la partícula la segunda ley de Newton en la dirección x

$$\sum F = F_s = ma \rightarrow -kx = ma$$

$$a = -\frac{k}{m}x$$

La aceleración es proporcional al desplazamiento de la partícula con respecto a la posición de equilibrio y va dirigida en sentido opuesto.

Movimiento de una partícula unida a un muelle sin masa: movimiento armónico simple.



$$F_s = -kx$$

$$a = -\frac{k}{m}x$$

Por definición de aceleración

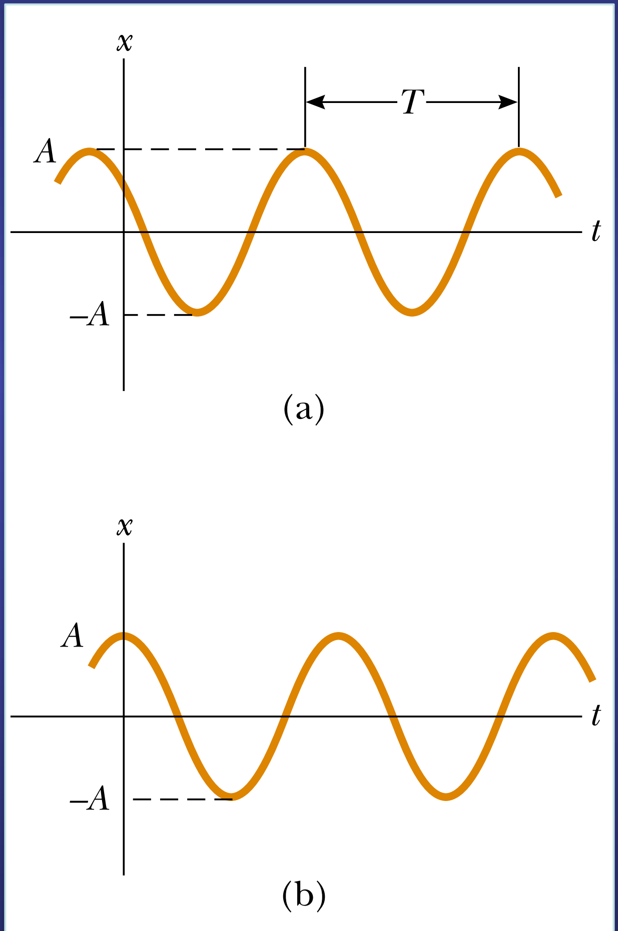
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Definiendo una nueva constante

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Movimiento armónico simple: solución para la posición como función del tiempo.



$$F_s = -kx$$

Ecuación de movimiento: ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

La siguiente función coseno es una solución

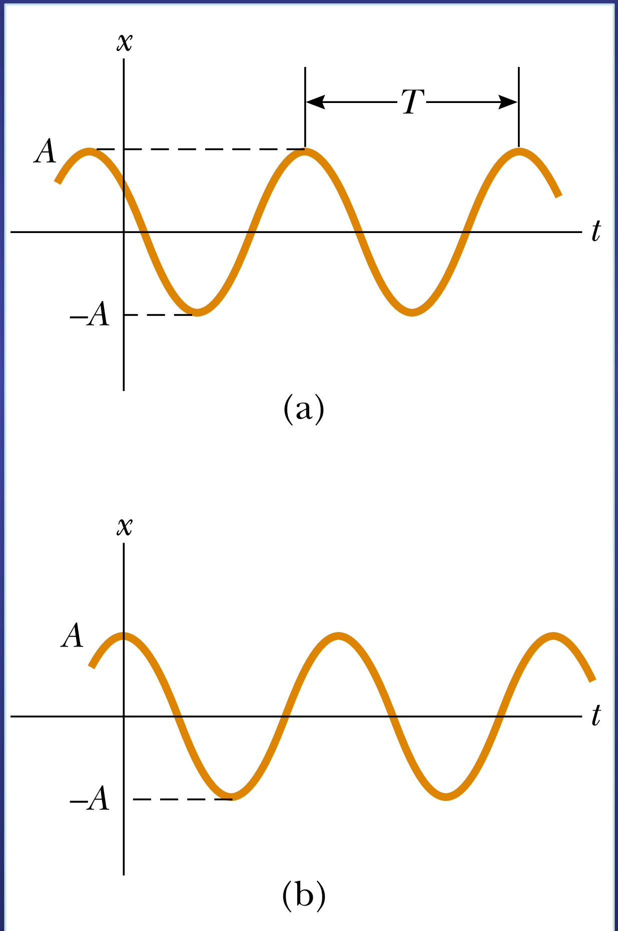
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

A **Amplitud del movimiento: el valor máximo de la posición de la partícula, tanto en la dirección positiva como en la negativa**

ϕ **Constante de fase (o ángulo de fase)**

Las dos quedan determinadas únicamente por la posición y velocidad de la partícula en el instante t = 0.

Movimiento armónico simple: definición de frecuencia angular y fase.



$$F_s = -kx$$

Ecuación de movimiento:
ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

La siguiente función coseno es una solución

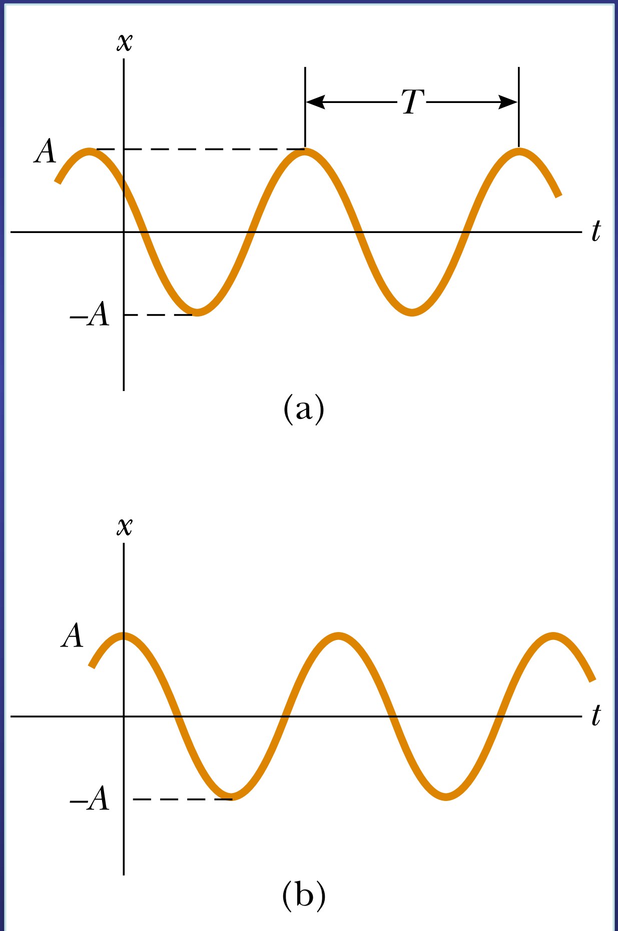
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ **Frecuencia angular (en el sistema internacional se mide en rad/s).**

$$\omega t + \phi$$ **Fase del movimiento**

La solución es periódica y su valor es el mismo cada vez que ωt se incrementa en 2π radianes

Movimiento armónico simple: definición de periodo.



$$F_s = -kx$$

Ecuación de movimiento: ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

La siguiente función coseno es una solución

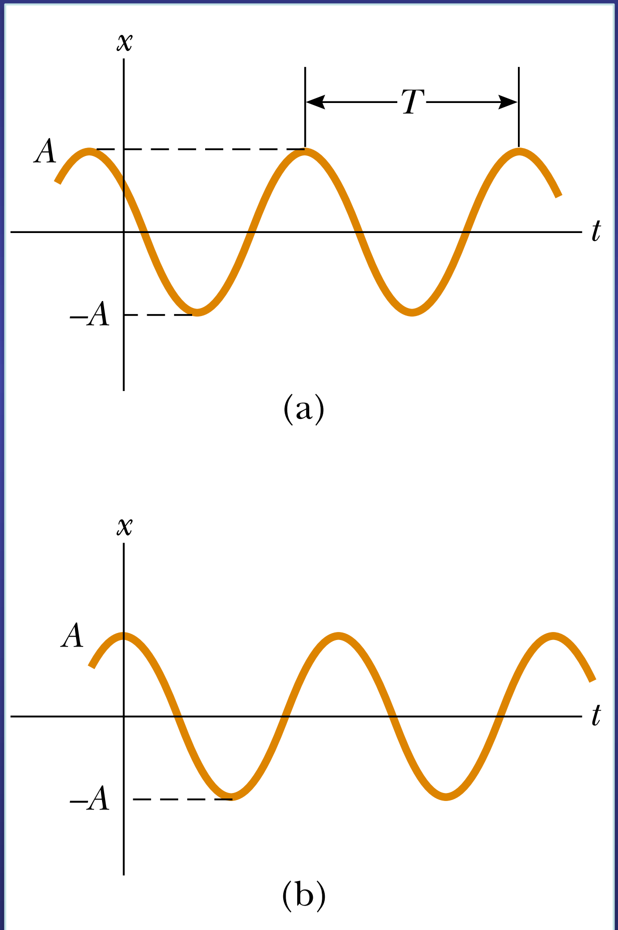
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

El periodo T del movimiento es el tiempo que necesita la partícula en cubrir un ciclo completo de su movimiento

$$[\omega(t+T)+\phi] - (\omega t + \phi) = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$ **Se mide en segundos**

Movimiento armónico simple: definición de frecuencia.



$$F_s = -kx$$

Ecuación de movimiento: ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

La siguiente función coseno es una solución

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

La frecuencia f es el inverso del periodo, y representa el número de oscilaciones que la partícula lleva a cabo la partícula por unidad de tiempo

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Se mide en ciclos por segundo o Herzios (Hz)

Movimiento armónico simple: relación entre frecuencia angular, periodo y frecuencia.

$$F_s = -kx$$

Ecuación de movimiento: ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

La siguiente función coseno es una solución

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Relación entre las distintas variables

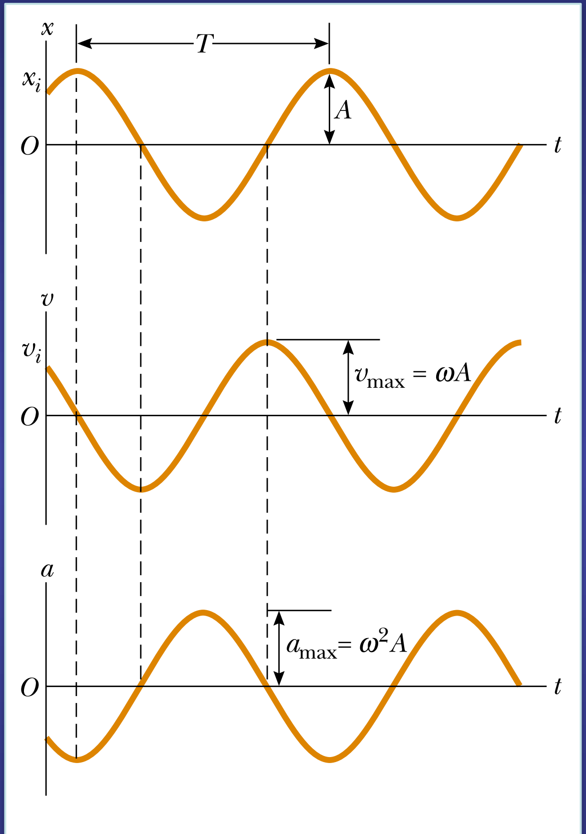
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Para un sistema muelle partícula

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

No depende de los parámetros del movimiento como A y ϕ

Movimiento armónico simple: velocidad y aceleración.



Velocidad

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

Valores límites: ± ωA

Aceleración

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

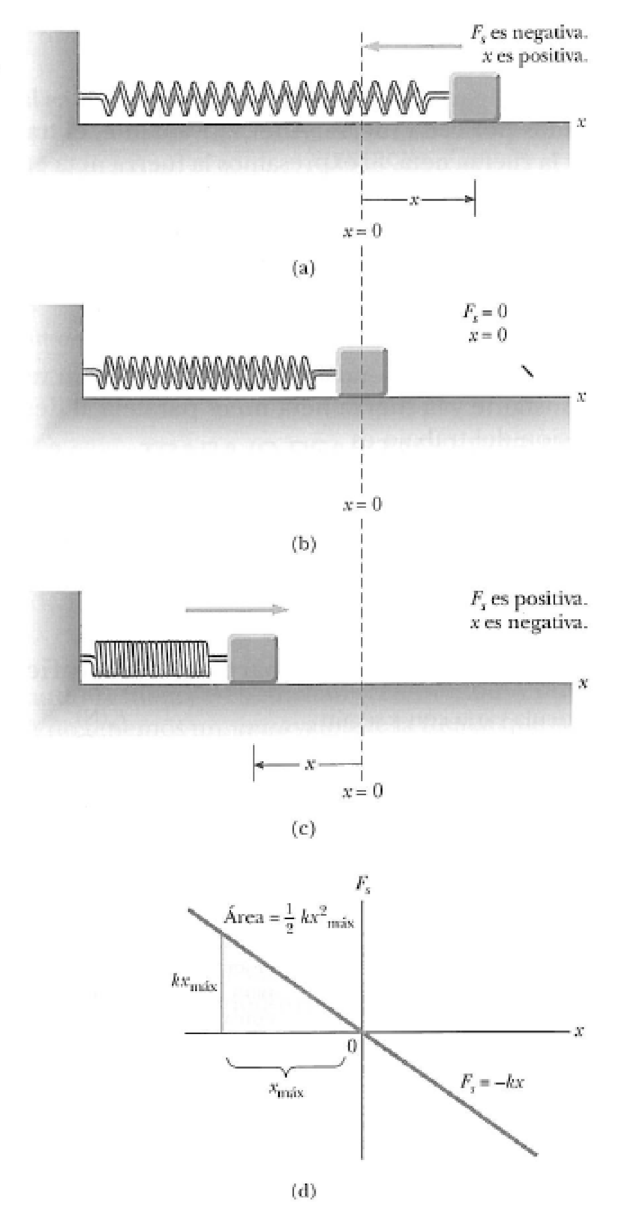
Valores límites: ± $\omega^2 A$

Valores máximos del módulo de la aceleración y la velocidad

$$v_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} A$$

$$a_{max} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A$$

Movimiento armónico simple: consideraciones energéticas.



Supongamos que el movimiento se realiza sobre una superficie horizontal (unidimensional, a lo largo de la dirección x) y sin rozamiento.

Podemos considerar a la combinación del muelle y del objeto unido a él como un sistema aislado.

Como la superficie no tiene rozamiento, la energía mecánica total del sistema permanece constante

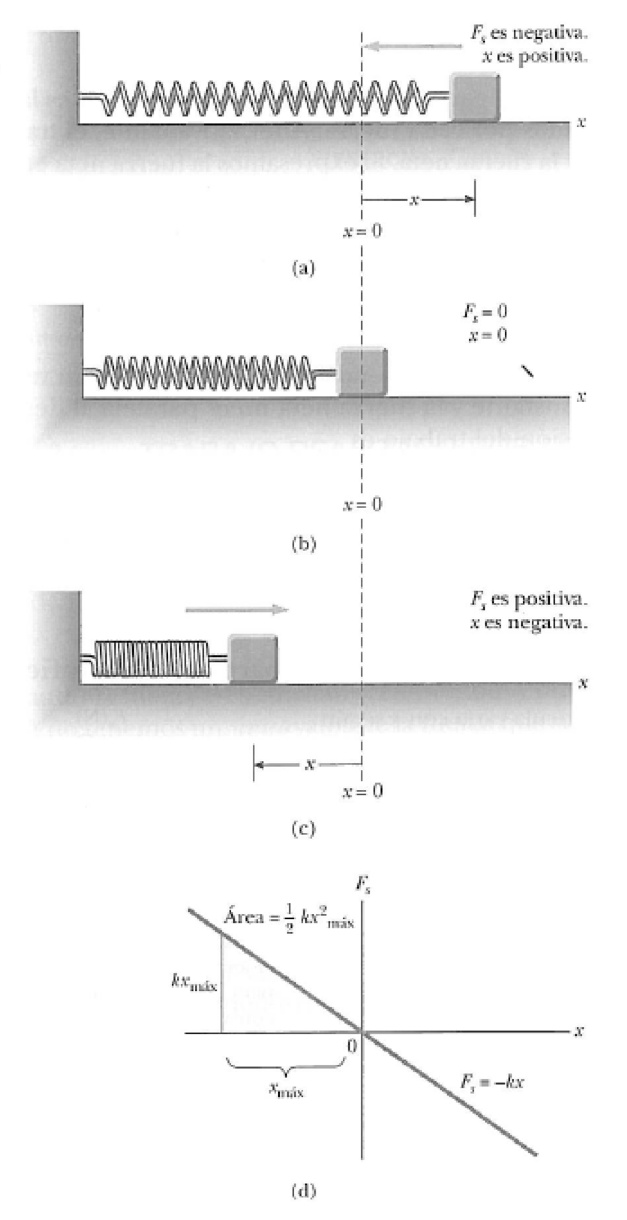
Suponiendo que el muelle carece de masa, la energía cinética se debe al movimiento de la partícula

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

La energía potencial elástica del sistema se debe al muelle

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

Movimiento armónico simple: consideraciones energéticas.



Como la superficie no tiene rozamiento, la energía mecánica total del sistema permanece constante

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

La energía mecánica total vendrá dada por:

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi$$

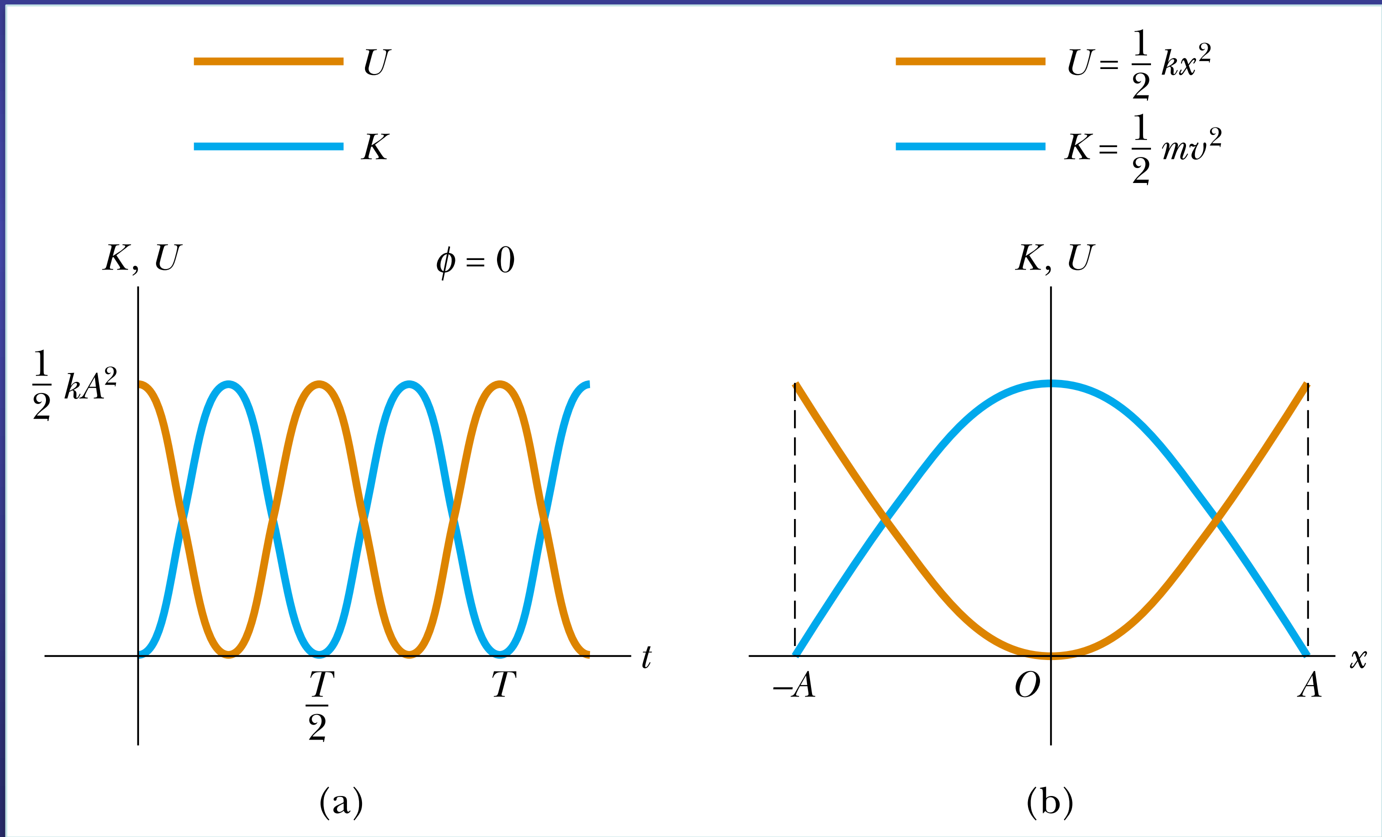
Como $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \left[\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)\right]$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

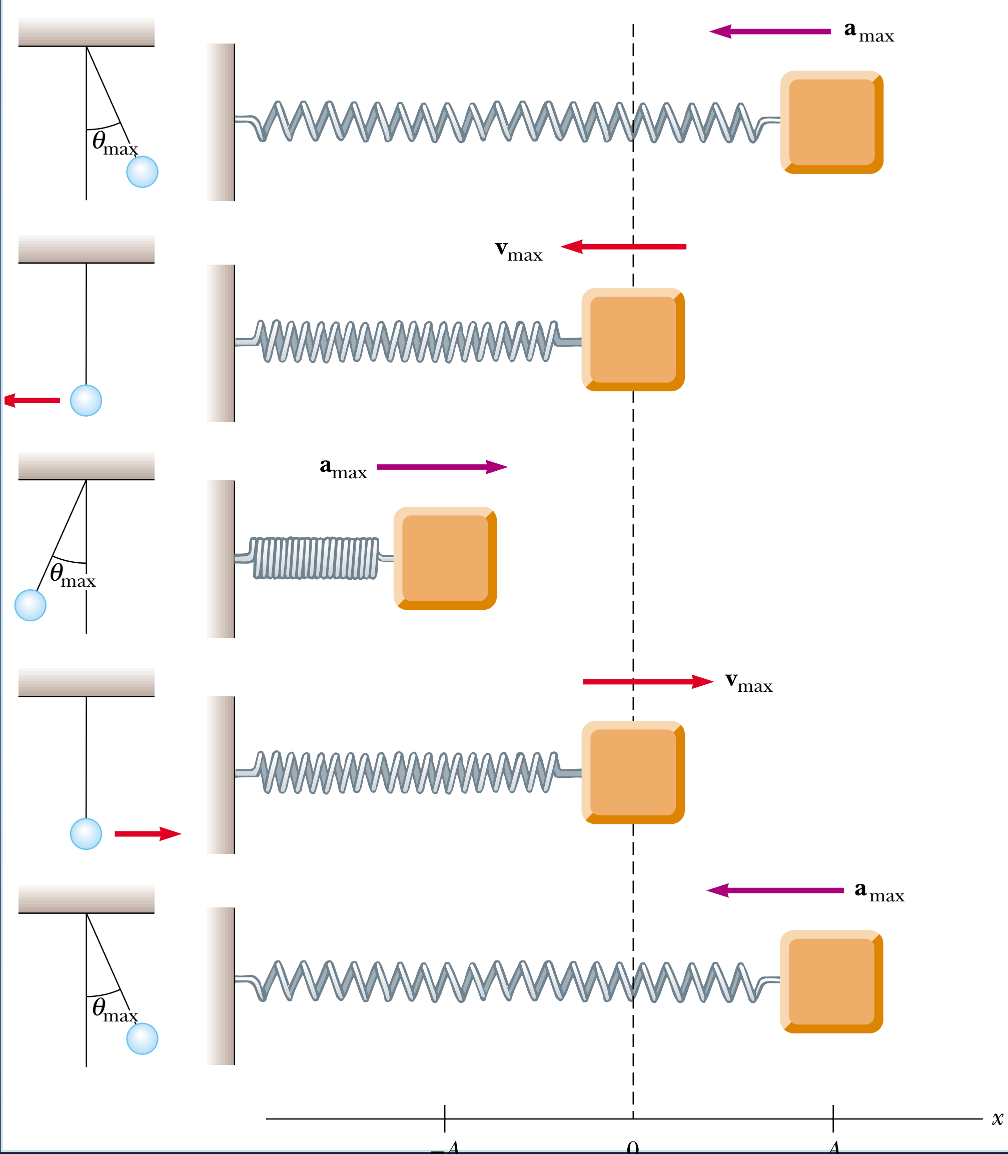
Movimiento armónico simple: Representación gráfica de la energía

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \qquad U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$



Como función del tiempo **Como función de la posición**

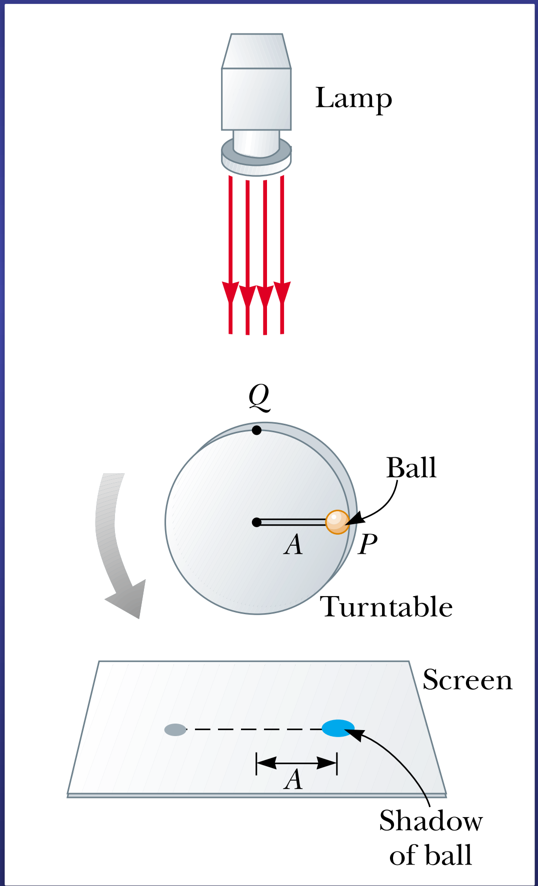
Movimiento armónico simple: Representación gráfica del movimiento



t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$T/4$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$T/2$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$3T/4$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$

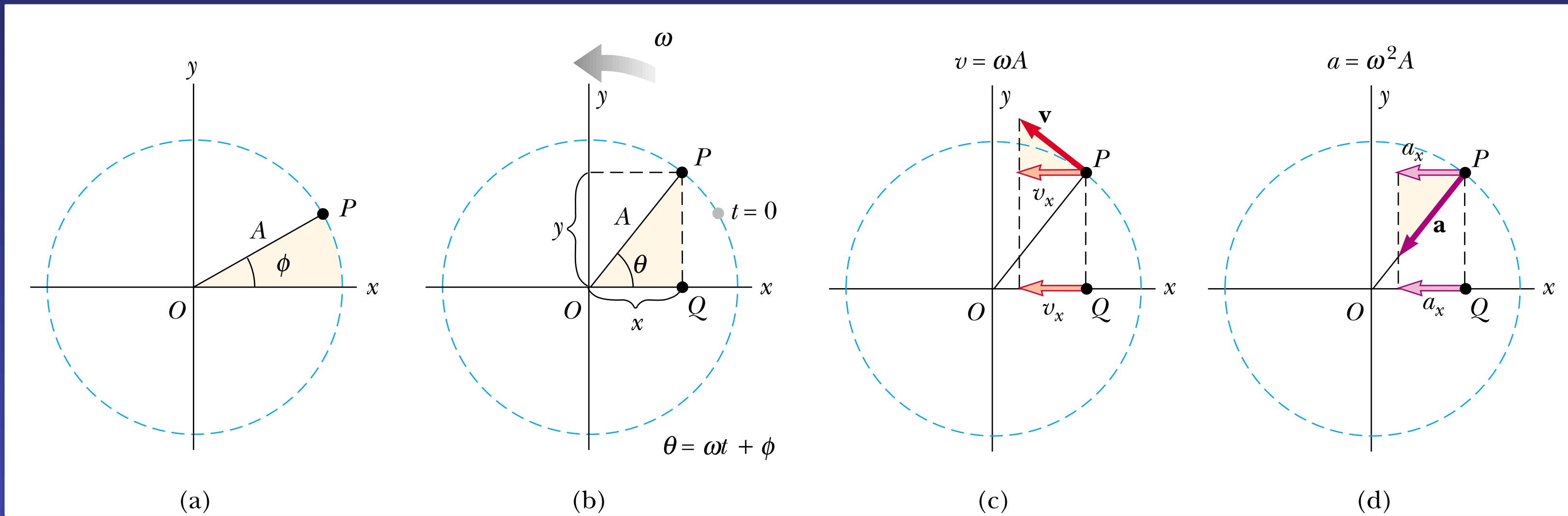
Comparación del movimiento armónico simple con el movimiento circular uniforme

Dispositivo experimental que muestra la relación



Cuando el plato giratorio rota con velocidad angular constante, la sombra de la pelota se mueve hacia delante y hacia atrás con un movimiento oscilatorio armónico simple

Comparación del movimiento armónico simple con el movimiento circular uniforme



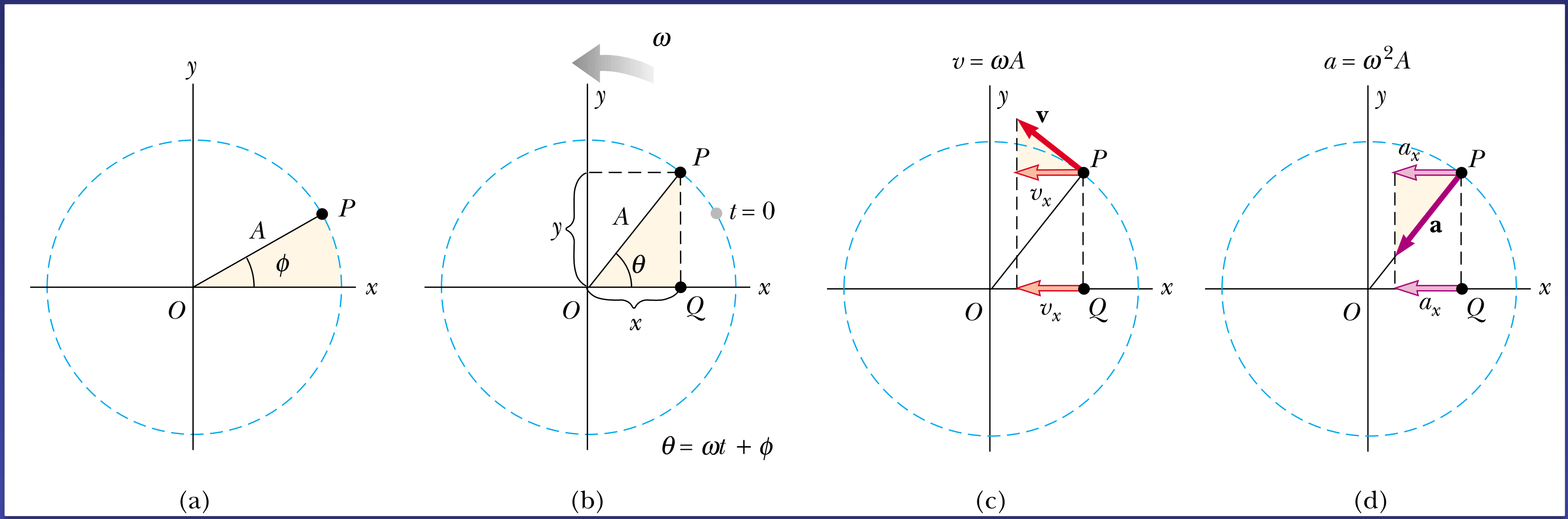
Círculo de referencia

Consideremos una partícula P colocada sobre una circunferencia de radio A. La línea OP define un ángulo ϕ con el eje X en el instante $t = 0$

Si la partícula se mueve a lo largo de la circunferencia con velocidad angular ω constante, hasta que OP forme un ángulo θ con el eje de las x para un tiempo dado $t > 0$ el ángulo entre OP y el eje de las X es $\theta = \omega t + \phi$

Como la partícula se mueve en una circunferencia, la proyección de P sobre el eje de las X (punto Q), se mueve hacia delante y hacia atrás a lo largo del eje x entre los límites $x = \pm A$

Comparación del movimiento armónico simple con el movimiento circular uniforme

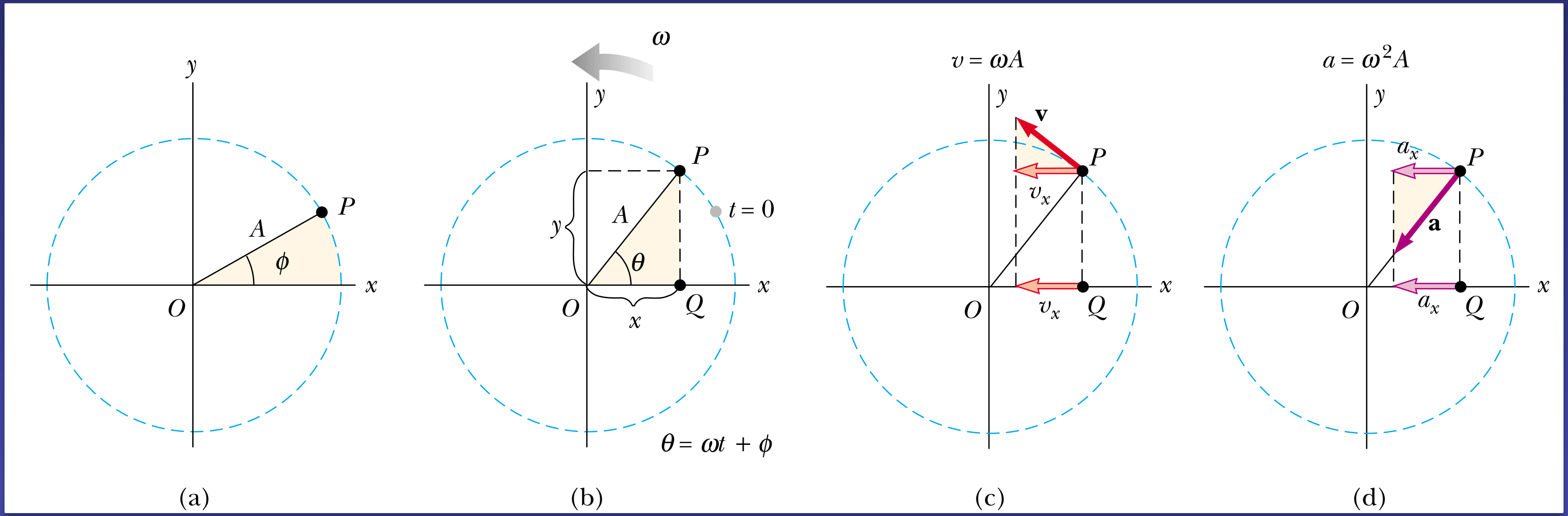


Los puntos P y Q siempre tienen el mismo valor de la componente x .
A partir del triángulo rectángulo

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

El movimiento armónico simple a lo largo de una línea recta puede representarse como la proyección de un movimiento circular uniforme a lo largo de un diámetro de la circunferencia de referencia

Comparación del movimiento armónico simple con el movimiento circular uniforme

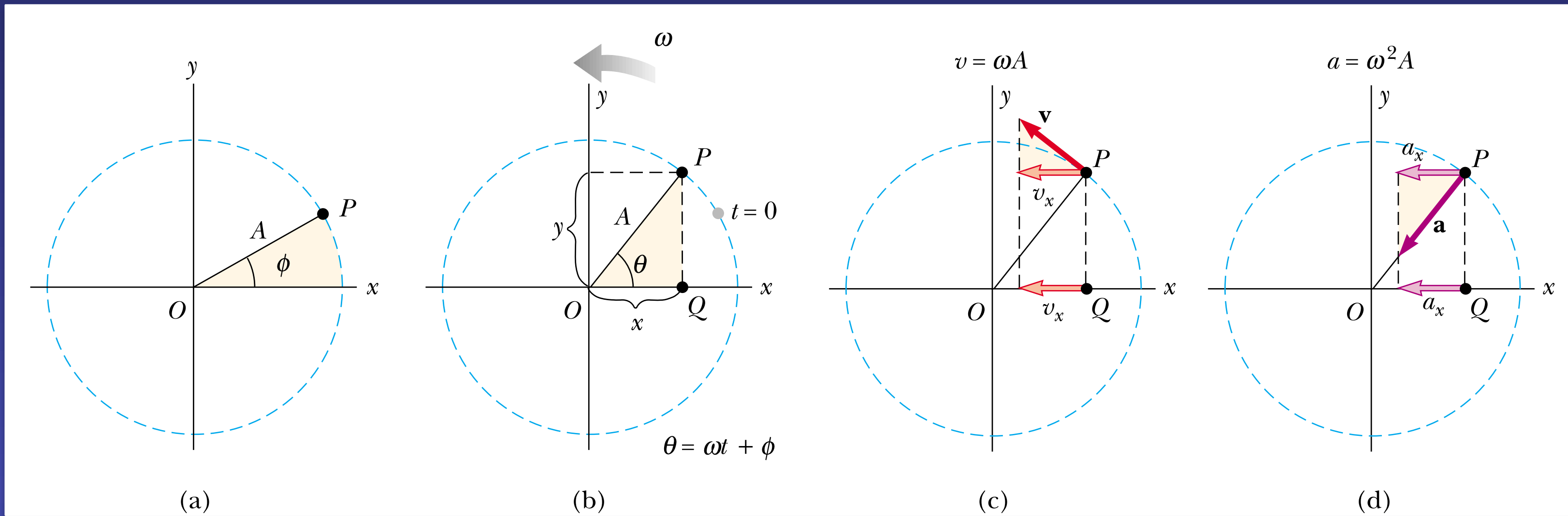


La celeridad angular de P es la misma que la frecuencia angular ω del movimiento armónico simple a lo largo del eje x

La constante de fase ϕ del movimiento oscilatorio armónico simple se corresponde con el ángulo inicial que OP forma con el eje x

El radio A de la circunferencia de referencia se corresponde con la amplitud del movimiento oscilatorio armónico simple

Comparación del movimiento armónico simple con el movimiento circular uniforme



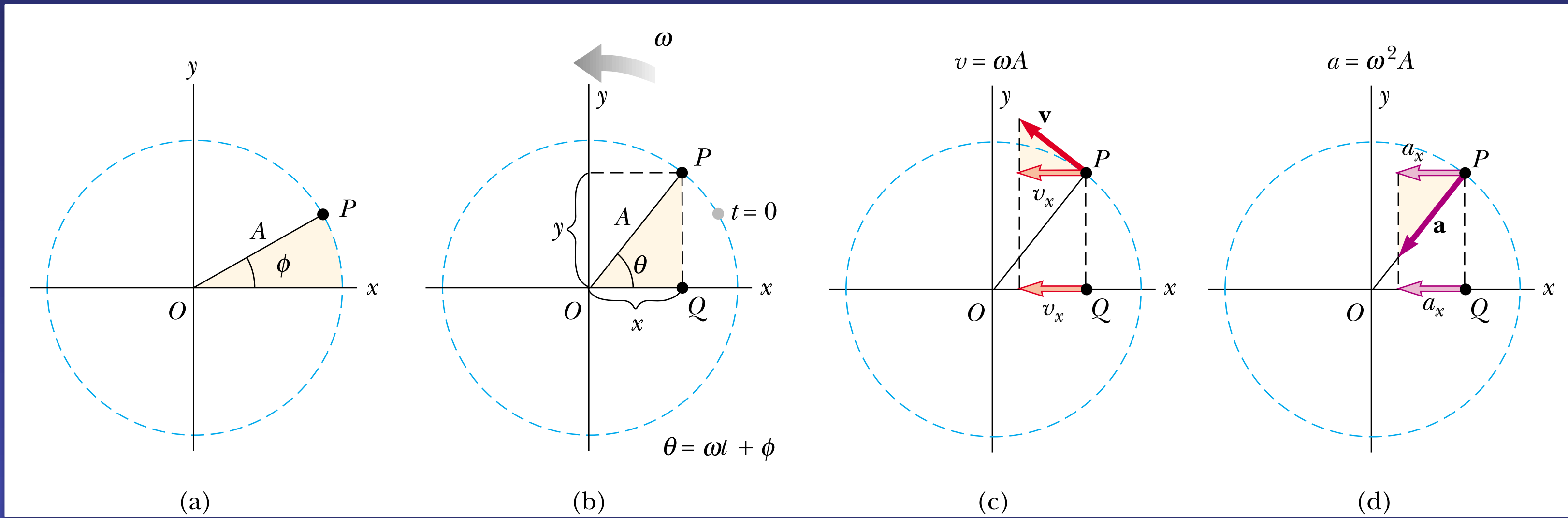
La celeridad de P cuando se mueve por la circunferencia de referencia es

$$v = r\omega = A\omega$$

Por argumentos geométricos se deduce que la componente x de la velocidad es

$$-\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

Comparación del movimiento armónico simple con el movimiento circular uniforme

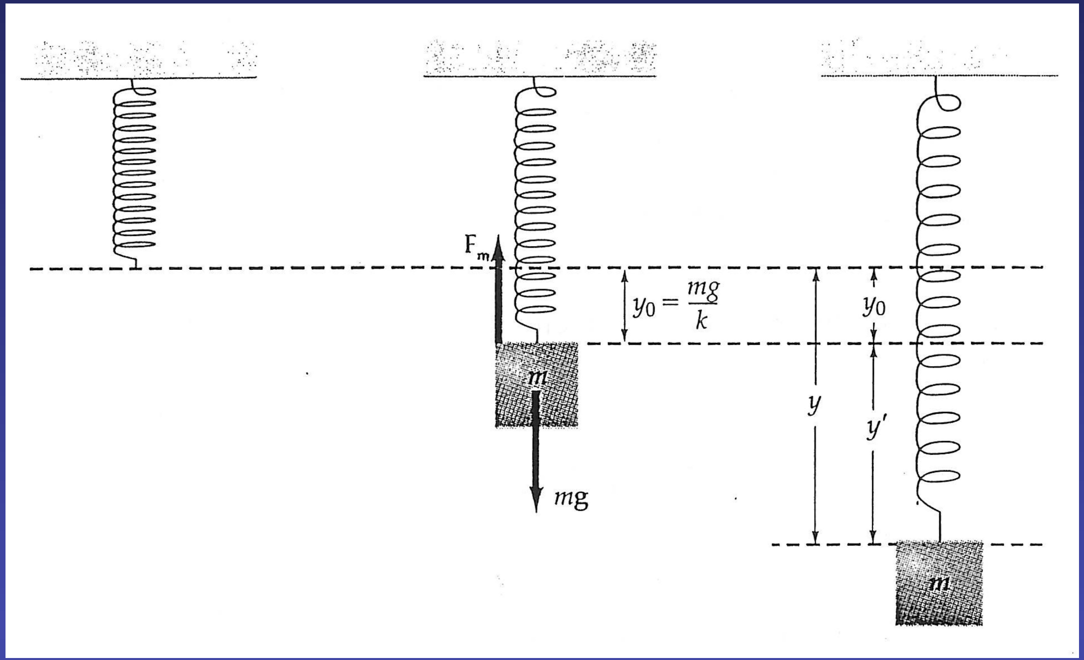


La aceleración de P en la circunferencia de referencia está dirigida hacia el centro del círculo y tiene por módulo $v^2/A = \omega^2 A$

Por argumentos geométricos se deduce que la componente x de la aceleración es

$$-\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

El muelle vertical



El muelle estará en equilibrio estático para una posición y_0 que cumpla

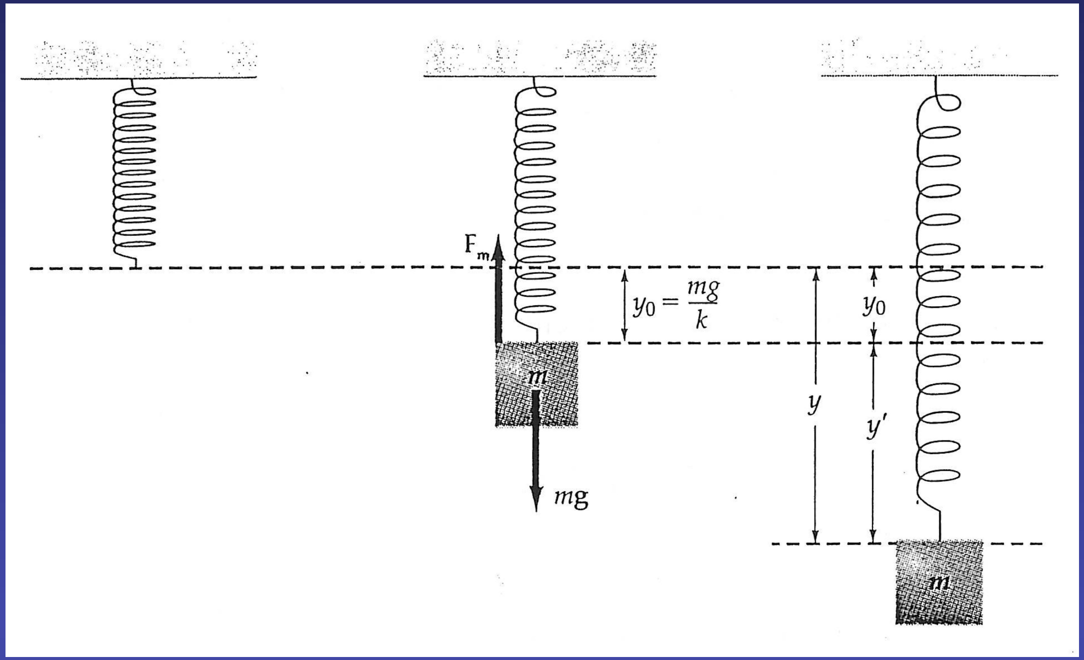
$$mg - ky_0 = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{mg}{k}$$

Cuando oscila

$$mg - ky = ma \Rightarrow mg - k(y_0 + y^{'}) = ma \Rightarrow mg - ky_0 - ky^{'} = ma$$

$$-ky^{'} = m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{d^2(y_0 + y^{'})}{dt^2} = m\frac{d^2y^{'}}{dt^2}$$

El muelle vertical



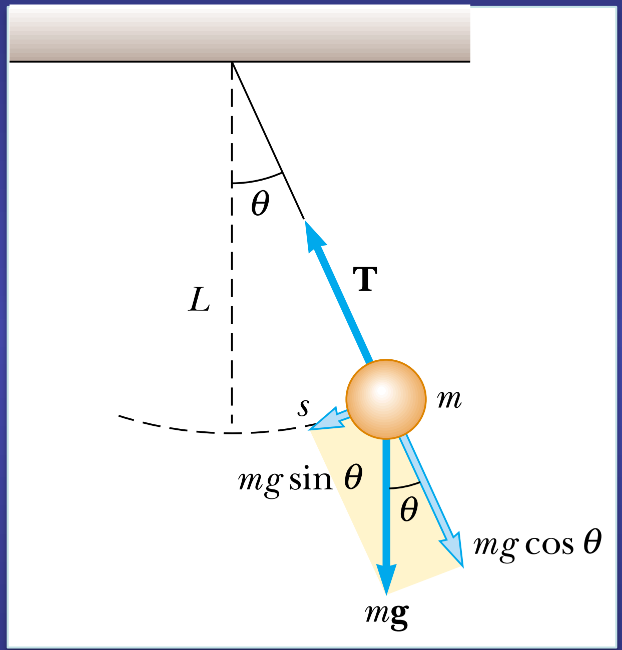
$$-ky' = m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{d^2(y_0 + y')}{dt^2} = m\frac{d^2y'}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{k}{m}y' = 0$$

$$y'(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$$

El efecto de la gravedad es desplazar la posición de equilibrio. El muelle realizará un movimiento oscilatorio armónico en torno a esta nueva posición de equilibrio y_0, con el mismo periodo que el de un muelle horizaontal.

El péndulo simple: definición



Consiste en un objeto puntual de masa m, suspendido de una cuerda o barra de longitud L, cuyo extremo superior está fijo.

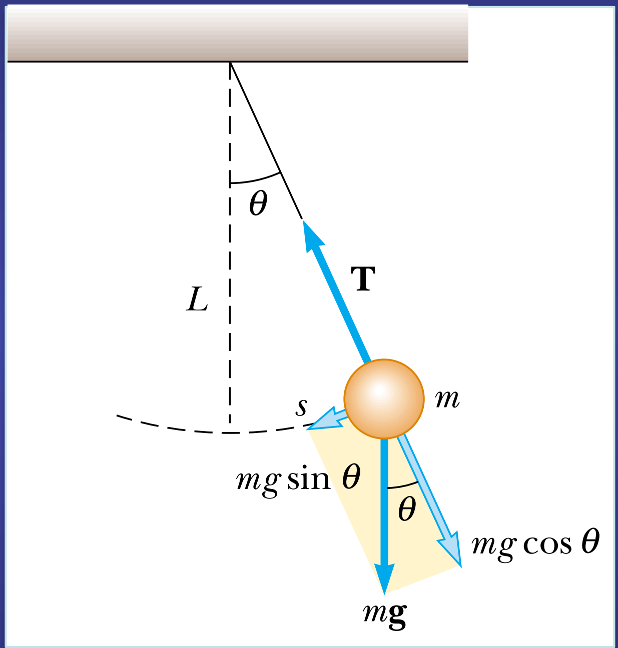
En el caso de un objeto real, siempre que el tamaño del objeto sea pequeño comparado con la longitud de la cuerda, el péndulo puede modelarse como un péndulo simple.

Cuando el objeto se desplaza hacia un lado y luego se suelta, oscila alrededor del punto más bajo (que es la posición de equilibrio).

El movimiento se produce en un plano vertical.

El péndulo está impulsado por la fuerza de la gravedad.

El péndulo simple: ecuación de movimiento



Fuerzas que actúan sobre el objeto:

-La fuerza ejercida por la cuerda, $\vec{T}$

- Gravedad, $m\vec{g}$

La componente tangencial de la fuerza de la gravedad, $mg\sin(\theta)$ siempre actúa hacia la posición de equilibrio, en sentido opuesto al desplazamiento.

La componente tangencial de la fuerza de la gravedad es una fuerza de recuperación.

Ley de Newton para escribir la ecuación del movimiento en la dirección tangencial

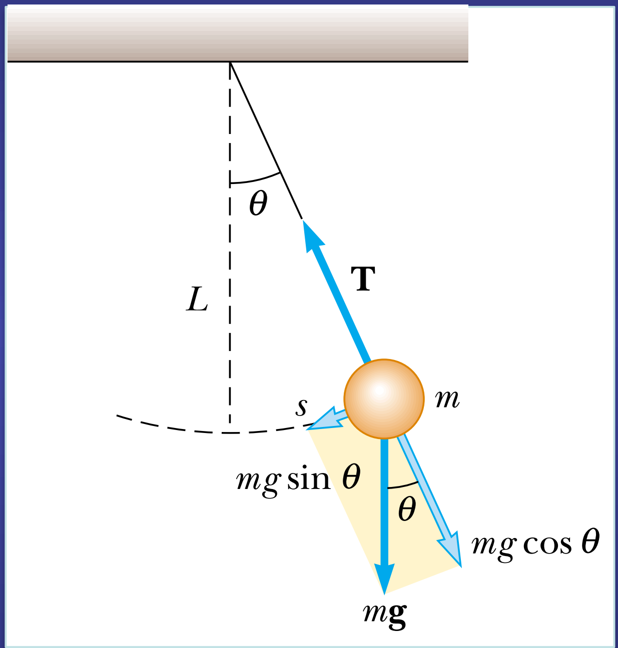
$$F_t = ma_t \rightarrow -mg\sin(\theta) = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

s es la posición medida a lo largo del arco circular.

El signo menos indica que la fuerza tangencial apunta hacia la posición de equilibrio.

El péndulo simple: ecuación de movimiento

Ley de Newton para escribir la ecuación del movimiento en la dirección tangencial.



$$F_t = m a_t \rightarrow -mg\sin(\theta) = m\frac{d^2 s}{dt^2}$$

Si medimos el ángulo en radianes

$$s = L\theta$$

Como la longitud del hilo es constante

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Finalmente, la ecuación de movimiento es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin(\theta)$$

En general no se trata de un auténtico movimiento armónico simple

El péndulo simple: ecuación de movimiento para ángulos pequeños

Aproximación para ángulos pequeños, si están expresados en radianes

$$\sin(\theta) \approx \theta$$

TABLA 12.1 Ángulos y senos de ángulos

Ángulo (grados)	Ángulo (radianes)	Seno del ángulo	Porcentaje de diferencia (%)
0	0,0000	0,0000	0,0
1	0,0175	0,0175	0,0
2	0,0349	0,0349	0,0
3	0,0524	0,0523	0,0
5	0,0873	0,0872	0,1
10	0,1745	0,1736	0,5
15	0,2618	0,2588	1,2
20	0,3491	0,3420	2,1
30	0,5236	0,5000	4,7

El péndulo simple:
ecuación de movimiento para ángulos pequeños

Aproximación para ángulos pequeños, si están expresados en radianes

$$\sin(\theta) \approx \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin(\theta) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

Ecuación del movimiento armónico simple con $\omega^2 = \frac{g}{L}$

Solución $\theta = \theta_{max}\cos(\omega t + \phi)$

Posición angular máxima

Frecuencia angular $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

Periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Independiente de la masa y de la posición angular máxima

Oscilaciones amortiguadas: Definición

Las fuerzas resistivas, como el rozamiento, frenan el movimiento del sistema.

La energía mecánica del sistema disminuye con el tiempo y el movimiento se amortigua.

Supongamos una fuerza resistiva proporcional a la velocidad y de sentido es opuesto a la misma

$$\vec{R} = -b\vec{v}$$

Donde b es una constante relacionada con la intensidad de la fuerza resistiva.

La segunda ley de Newton sobre la partícula vendría dada por

$$\sum F_x = -kx - bv = ma_x$$

Por definición de velocidad y aceleración

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Oscilaciones amortiguadas: Ecuación de movimiento

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Si suponemos que los parámetros del sistema son tales que $b < \sqrt{4mk}$
(fuerza resistiva pequeña)

La solución vendría dada por

$$x = \left(Ae^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t}\right)\cos(\omega t + \phi)$$

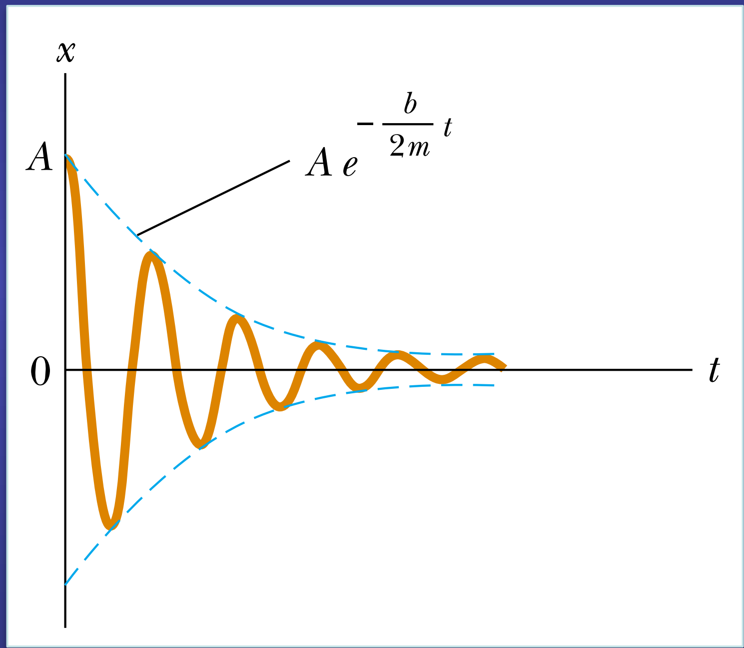
Donde la frecuancia angular del movimiento sería

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

La solución formal es muy similar a la de un movimiento oscilatorio sin amortiguar, pero ahora la amplitud depende del tiempo

Oscilaciones amortiguadas: Representación gráfica

$$x = \left(Ae^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t}\right)\cos(\omega t + \phi)$$



Oscilador subamortiguado

Cuando la fuerza resistiva es relativamente pequeña, el carácter oscilatorio del movimiento se conserva, pero la amplitud de la vibración disminuye con el tiempo, y el movimiento, en última instancia, cesa.

Oscilaciones amortiguadas:
Oscilaciones críticamente amortiguadas y sobreamortiguadas

Si definimos la frecuencia natural como

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Podemos escribir la frecuencia angular de vibración del oscilador amortiguado como

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

A medida que la fuerza resistiva aumenta, las oscilaciones se amortiguan con mayor rapidez.

Cuando b alcanza un valor crítico b_c tal que $\frac{b_c}{2m} = \omega_0$ **:Oscilador críticamente amortiguad**

El sistema ya no oscila más. Vuelve a la posición de equilibrio siguiendo una exponencial

Si el medio es tan viscoso que $\frac{b}{2m} > \omega_0$ **:Oscilador sobreamortiguado**

El sistema no oscila. Retorna a la posición de equilibrio. Cuando más viscoso sea el medio, más tarda en volver.

Oscilaciones amortiguadas:
Oscilaciones críticamente amortiguadas y sobreamortiguadas

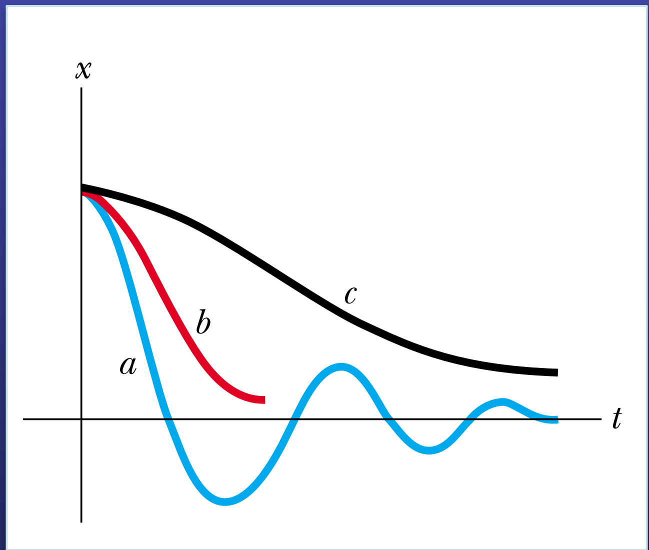
A medida que la fuerza resistiva aumenta, las oscilaciones se amortiguan con mayor rapidez.

Cuando b alcanza un valor crítico b_c tal que $\dfrac{b_c}{2m} = \omega_0$ **:Oscilador críticamente amortiguado**

El sistema ya no oscila más. Vuelve a la posición de equilibrio siguiendo una exponencial

Si el medio es tan viscoso que $\dfrac{b}{2m} > \omega_0$ **:Oscilador sobreamortiguado**

El sistema no oscila. Retorna a la posición de equilibrio. Cuando más viscoso sea el medio, más tarda en volver.



Oscilaciones forzadas: Definición

La energía mecánica de un oscilador amortiguado disminuye con el tiempo.

Es posible compensar esta pérdida de energía aplicando una fuerza externa que realice un trabajo positivo sobre el sistema.

La amplitud del movimiento permanece constante si la energía que se aporta en cada ciclo del movimiento es exactamente igual a la pérdida de energía mecánica en cada ciclo debida a las fuerzas resistivas.

Ejemplo de oscilador forzado: oscilador amortiguado al que se le comunica una fuerza externa que varía periódicamente con el tiempo.

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

constante **frecuencia angular externa**

La segunda ley de Newton queda como

$$\sum F = ma \rightarrow F_0 \sin(\omega t) - b\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Oscilaciones forzadas: Definición

$$\sum F = ma \rightarrow F_0 \sin(\omega t) - b\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Tras un periodo de tiempo suficientemente largo, cuando el aporte de energía por cada ciclo que realiza la fuerza externa iguale a la cantidad de energía mecánica que se transforma en energía interna en cada ciclo, se alcanzará una situación de estado estacionario.

Solución

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

En un oscilador forzado, la partícula vibra con la frecuencia de la fuerza externa

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

$$\tan(\phi) = \frac{b\omega}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}$$

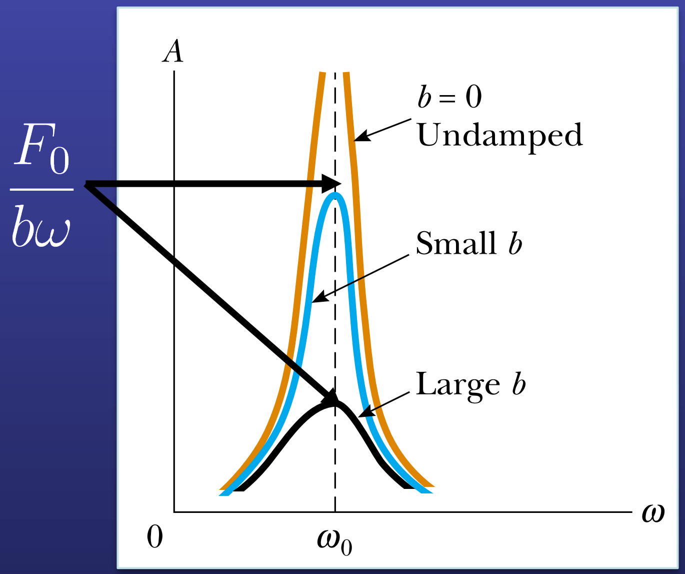
La amplitud del oscilador forzado es constante para una fuerza externa dada

Oscilaciones forzadas: Amplitud

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

$$\tan(\phi) = \frac{b\omega}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}$$



La amplitud incrementa al disminuir la amortiguación.

Cuando no hay amortiguación, la amplitud del estado estacionario tiende a infinito en la frecuencia de resonancia.

Oscilaciones forzadas: Amplitud

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

$$\tan(\phi) = \frac{b\omega}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}$$

La amplitud del oscilador forzado es constante para una fuerza externa dada (es esa fuerza externa la que conduce al sistema a un estado estacionario).

Si la amortiguación es pequeña, la amplitud se hace muy grande cuando la frecuencia de la fuerza externa se aproxima a la frecuencia propia del oscilador.

Al drástico incremento en la amplitud cerca de la frecuencia natural se le denomina resonancia, y la frecuencia natural del oscilador se le denomina también frecuencia de resonancia.

Oscilaciones forzadas: Amplitud

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

$$\tan(\phi) = \frac{b\omega}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}$$

La razón por la cual en la frecuencia de resonancia la amplitud es máxima es porque en ese momento la energía se transfiere al sistema en las condiciones más favorables.

Velocidad del oscilador

$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$$

Misma función trigonométrica que la fuerza externa

La fuerza externa está en fase con la velocidad

Energía suministrada por la fuerza externa por unidad de tiempo

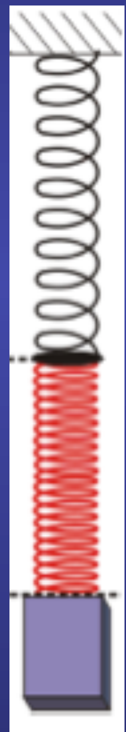
$$\vec{F}\cdot\vec{v}$$

La potencia transferida el oscilador es máxima cuando la fuerza aplicada está en fase con la velocidad

Muelles acoplados en serie

Supongamos dos muelles de masa despreciable y de constantes elásticas k_1 y k_2.

Supongamos además que colocamos los dos muelles en serie, y de ellos colgamos un objeto de masa m



¿Cuánto se va estirar el sistema en su conjunto?

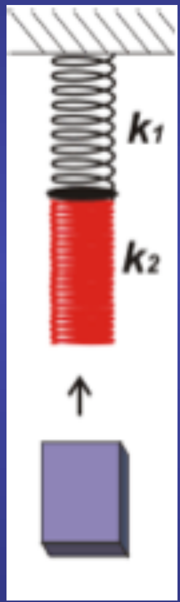
Cortesía de Ricardo Cabrera
http://neuro.qi.fcen.uba.ar/ricuti/intro_NMS.html

Muelles acoplados en serie

Supongamos dos muelles de masa despreciable y de constantes elásticas k_1 y k_2.

Supongamos además que colocamos los dos muelles en serie, y de ellos colgamos un objeto de masa m

Podemos imaginar que colgamos los dos muelles del techo, aún sin colgarles la masa.
En esta configuración, los muelles no están deformados (no están estirados)



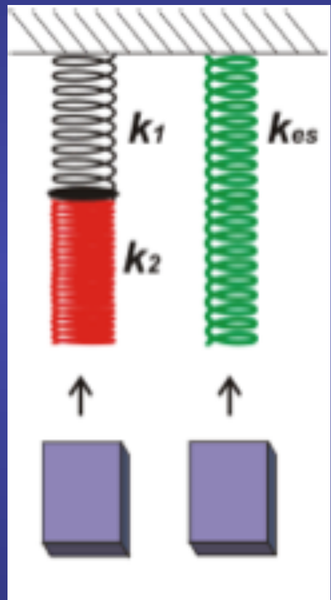
Cortesía de Ricardo Cabrera
http://neuro.qi.fcen.uba.ar/ricuti/intro_NMS.html

Muelles acoplados en serie

Supongamos dos muelles de masa despreciable y de constantes elásticas k_1 y k_2.

Supongamos además que colocamos los dos muelles en serie, y de ellos colgamos un objeto de masa m

Podemos imaginar que colgamos los dos muelles del techo, aún sin colgarles la masa.
En esta configuración, los muelles no están deformados (no están estirados)



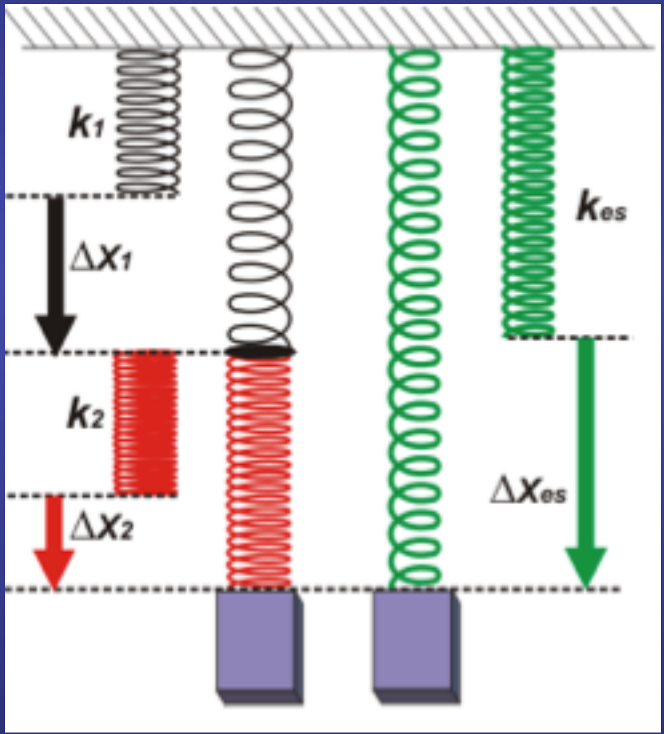
Vamos a suponer que podemos sustituir el conjunto de esos dos muelles por un **muelle equivalente.**

Cortesía de Ricardo Cabrera
http://neuro.qi.fcen.uba.ar/ricuti/intro_NMS.html

Muelles acoplados en serie

Supongamos dos muelles de masa despreciable y de constantes elásticas k_1 y k_2.

Supongamos además que colocamos los dos muelles en serie, y de ellos colgamos un objeto de masa m



Vamos a suponer que podemos sustituir el conjunto de esos dos muelles por un **muelle equivalente.**

Equivalente significa que si al conjunto le colgamos un cuerpo y se estira, al colgarle el mismo peso al equivalente este se estira lo mismo

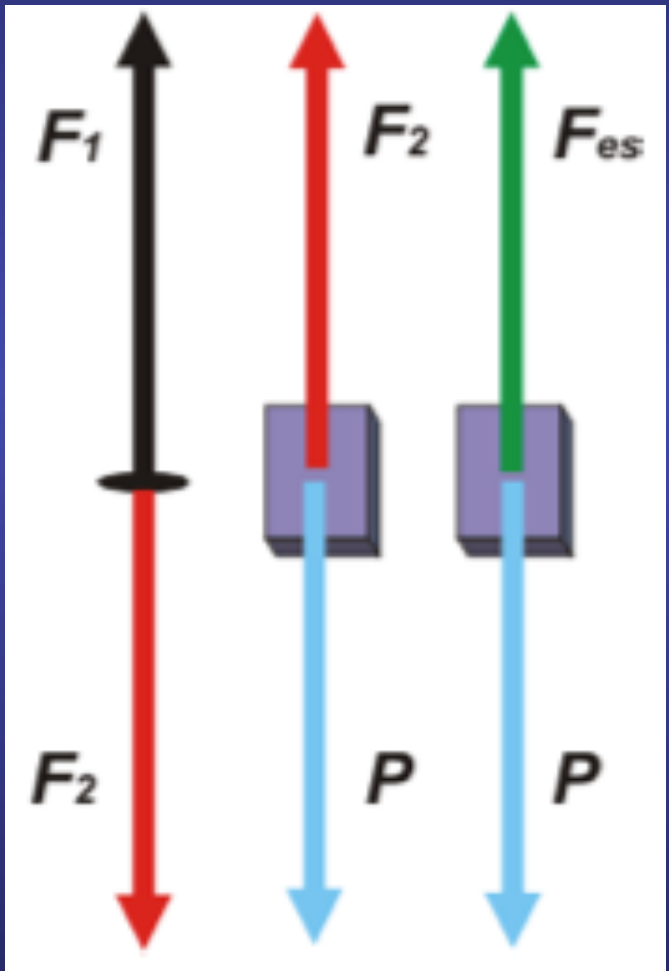
$$\Delta x_1 + \Delta x_2 = \Delta x_{\mathrm{es}}$$

Cortesía de Ricardo Cabrera
http://neuro.qi.fcen.uba.ar/ricuti/intro_NMS.html

Muelles acoplados en serie

Supongamos dos muelles de masa despreciable y de constantes elásticas k_1 y k_2.

Supongamos además que colocamos los dos muelles en serie, y de ellos colgamos un objeto de masa m



$F_1 = F_2 \quad F_2 = P \quad F_{es} = P$

Podemos dibujar los diagramas de cuerpo aislado para:

- **el punto de unión de los dos muelles**
- **la masa que cuelga del segundo muelle**
- **la masa que cuelga del muelle equivalente**

Asumiendo que el sistema está en reposo, es decir, ninguno de los cuerpos está acelerado

Luego

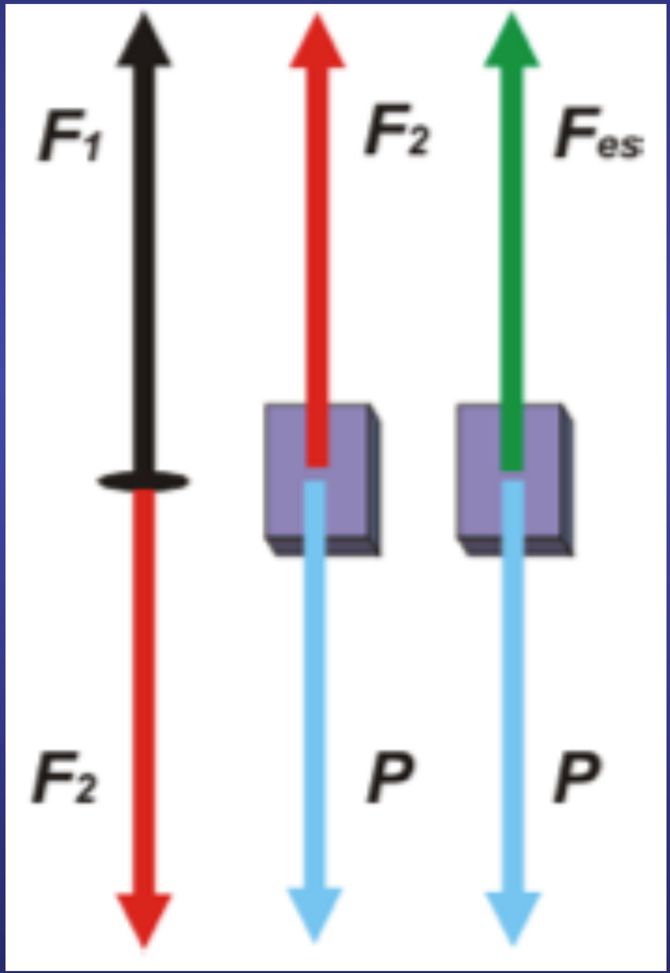
$$F_1 = F_2 = F_{es} = P$$

Cortesía de Ricardo Cabrera
http://neuro.qi.fcen.uba.ar/ricuti/intro_NMS.html

Muelles acoplados en serie

Supongamos dos muelles de masa despreciable y de constantes elásticas k_1 y k_2.

Supongamos además que colocamos los dos muelles en serie, y de ellos colgamos un objeto de masa m



$$F_1 = F_2 \quad F_2 = P \quad F_{es} = P$$

Luego

$$F_1 = F_2 = F_{es} = P$$

$$F_1 = k_1 \Delta x_1 \qquad \Delta x_1 = \frac{F_1}{k_1} = \frac{P}{k_1}$$

$$F_2 = k_2 \Delta x_2 \qquad \Delta x_2 = \frac{F_2}{k_2} = \frac{P}{k_2}$$

$$F_{es} = k_{es} \Delta x_{es} \qquad \Delta x_{es} = \frac{F_{es}}{k_{es}} = \frac{P}{k_{es}}$$

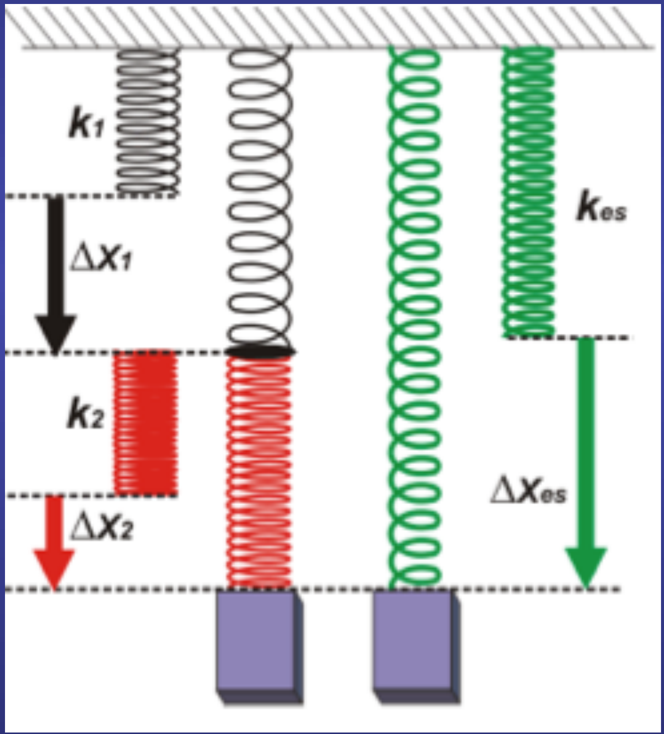
$$\Delta x_{\mathrm{es}} = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

$$\frac{P}{k_{es}} = \frac{P}{k_1} + \frac{P}{k_2}$$

Muelles acoplados en serie

Supongamos dos muelles de masa despreciable y de constantes elásticas k_1 y k_2.

Supongamos además que colocamos los dos muelles en serie, y de ellos colgamos un objeto de masa m



$$\frac{1}{k_{es}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

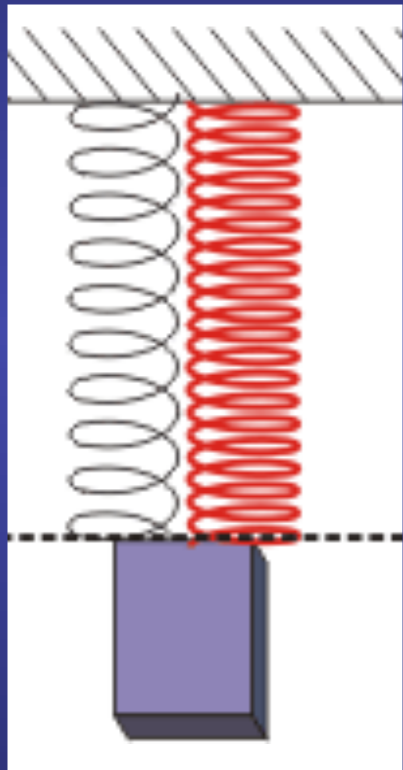
$$\Delta x_1 + \Delta x_2 = \Delta x_{\text{es}}$$

Cortesía de Ricardo Cabrera
http://neuro.qi.fcen.uba.ar/ricuti/intro_NMS.html

Muelles acoplados en paralelo

Supongamos dos muelles de masa despreciable y de constantes elásticas k_1 y k_2.

Supongamos además que colocamos los dos muelles en paralelo, y de ellos colgamos un objeto de masa m



¿Cuánto se va estirar el sistema en su conjunto?

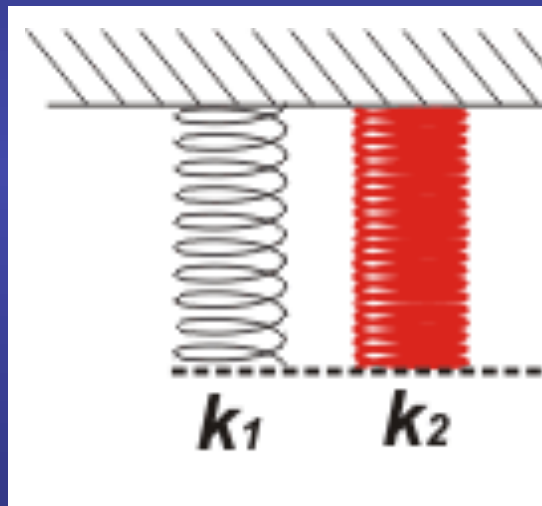
Cortesía de Ricardo Cabrera
http://neuro.qi.fcen.uba.ar/ricuti/intro_NMS.html

Muelles acoplados en paralelo

Supongamos dos muelles de masa despreciable y de constantes elásticas k_1 y k_2.

Supongamos además que colocamos los dos muelles en paralelo, y de ellos colgamos un objeto de masa m

Podemos imaginar que colgamos los dos muelles del techo, aún sin colgarles la masa.
En esta configuración, los muelles no están deformados (no están estirados)



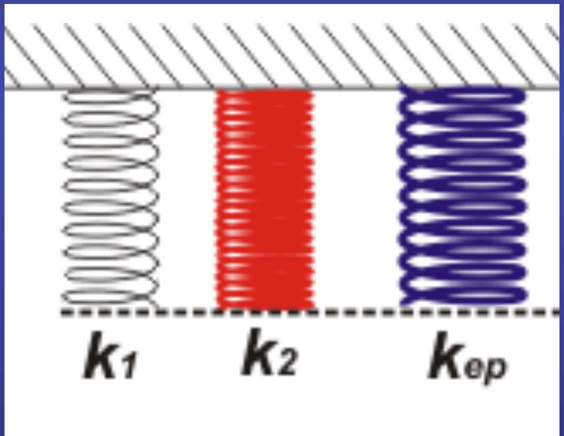
Cortesía de Ricardo Cabrera
http://neuro.qi.fcen.uba.ar/ricuti/intro_NMS.html

Muelles acoplados en paralelo

Supongamos dos muelles de masa despreciable y de constantes elásticas k_1 y k_2.

Supongamos además que colocamos los dos muelles en paralelo, y de ellos colgamos un objeto de masa m

Podemos imaginar que colgamos los dos muelles del techo, aún sin colgarles la masa.
En esta configuración, los muelles no están deformados (no están estirados)



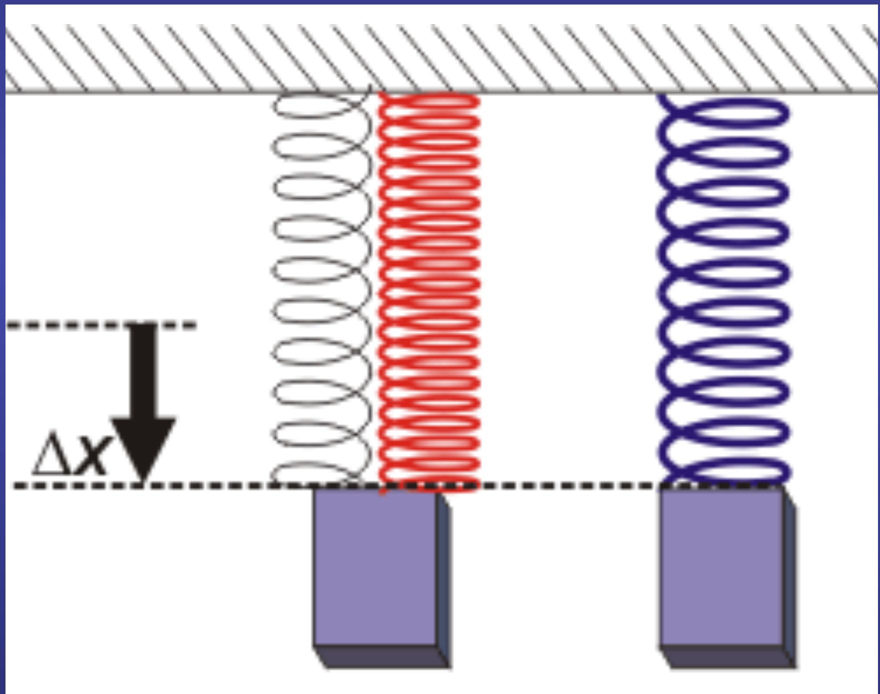
Vamos a suponer que podemos sustituir el conjunto de esos dos muelles por un **muelle equivalente.**

Cortesía de Ricardo Cabrera
http://neuro.qi.fcen.uba.ar/ricuti/intro_NMS.html

Muelles acoplados en paralelo

Supongamos dos muelles de masa despreciable y de constantes elásticas k_1 y k_2.

Supongamos además que colocamos los dos muelles en paralelo, y de ellos colgamos un objeto de masa m



Vamos a suponer que podemos sustituir el conjunto de esos dos muelles por un **muelle equivalente.**

Equivalente significa que si al conjunto le colgamos un cuerpo y se estira, al colgarle el mismo peso al equivalente este se estira lo mismo

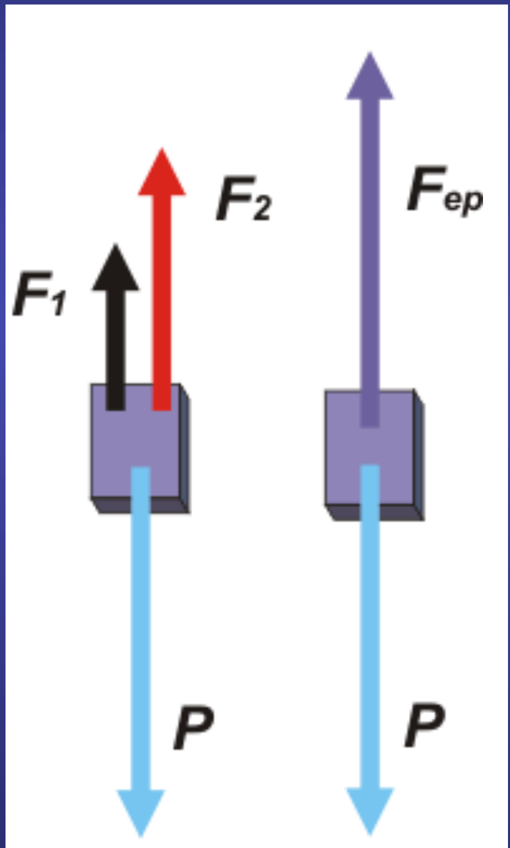
$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_{ep} = \Delta x$$

Cortesía de Ricardo Cabrera
http://neuro.qi.fcen.uba.ar/ricuti/intro_NMS.html

Muelles acoplados en paralelo

Supongamos dos muelles de masa despreciable y de constantes elásticas k_1 y k_2.

Supongamos además que colocamos los dos muelles en paralelo, y de ellos colgamos un objeto de masa m



Podemos dibujar los diagramas de cuerpo aislado para:

- la masa que cuelga de los dos muelles

- la masa que cuelga del muelle equivalente

Asumiendo que el sistema está en reposo, es decir, ninguno de los cuerpos está acelerado

Luego

$$F_1 + F_2 = F_{ep}$$

$$F_1 + F_2 = P \qquad F_{ep} = P$$

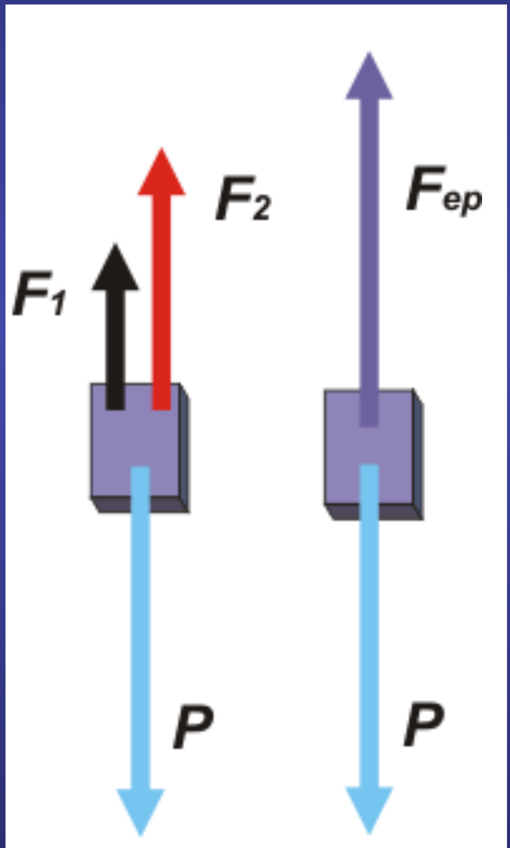
Cortesía de Ricardo Cabrera

http://neuro.qi.fcen.uba.ar/ricuti/intro_NMS.html

Muelles acoplados en paralelo

Supongamos dos muelles de masa despreciable y de constantes elásticas k_1 y k_2.

Supongamos además que colocamos los dos muelles en paralelo, y de ellos colgamos un objeto de masa m



$$F_1 + F_2 = P \qquad F_{ep} = P$$

Luego

$$F_1 + F_2 = F_{ep}$$

$$F_1 = k_1 \Delta x_1 = k_1 \Delta x$$

$$F_2 = k_2 \Delta x_2 = k_2 \Delta x$$

$$F_{ep} = k_{ep} \Delta x_{ep} = k_{ep} \Delta x$$

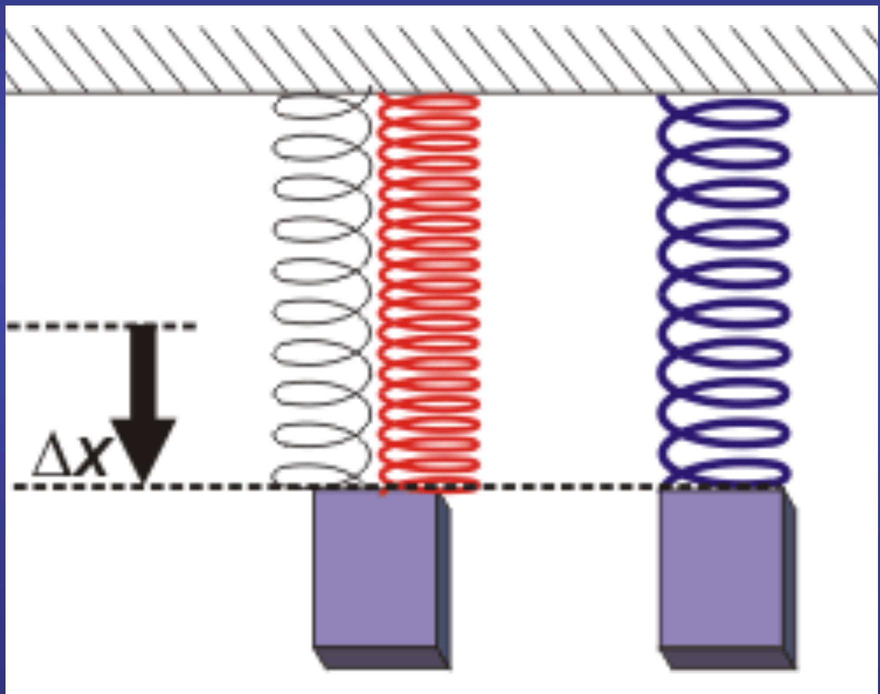
$$k_1 \Delta x + k_2 \Delta x = k_{ep} \Delta x$$

$$k_1 + k_2 = k_{ep}$$

Muelles acoplados en paralelo

Supongamos dos muelles de masa despreciable y de constantes elásticas k_1 y k_2.

Supongamos además que colocamos los dos muelles en paralelo, y de ellos colgamos un objeto de masa m



$$k_1 + k_2 = k_{ep}$$

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_{ep} = \Delta x$$

Cortesía de Ricardo Cabrera
http://neuro.qi.fcen.uba.ar/ricuti/intro_NMS.html

Acoplamiento entre movimientos oscilatorios armónicos (MAS)

Sean dos MAS representados por

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) \qquad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

Ambos con la misma frecuencia y los dos según el eje x

¿Cuál es el resultado de combinar ambos movimientos?
(pregunta relacionada con superposición, concepto básico en ondas)

Respuesta: "hay que sumar ambos movimientos"
El resultado es otro movimiento armónico simple donde

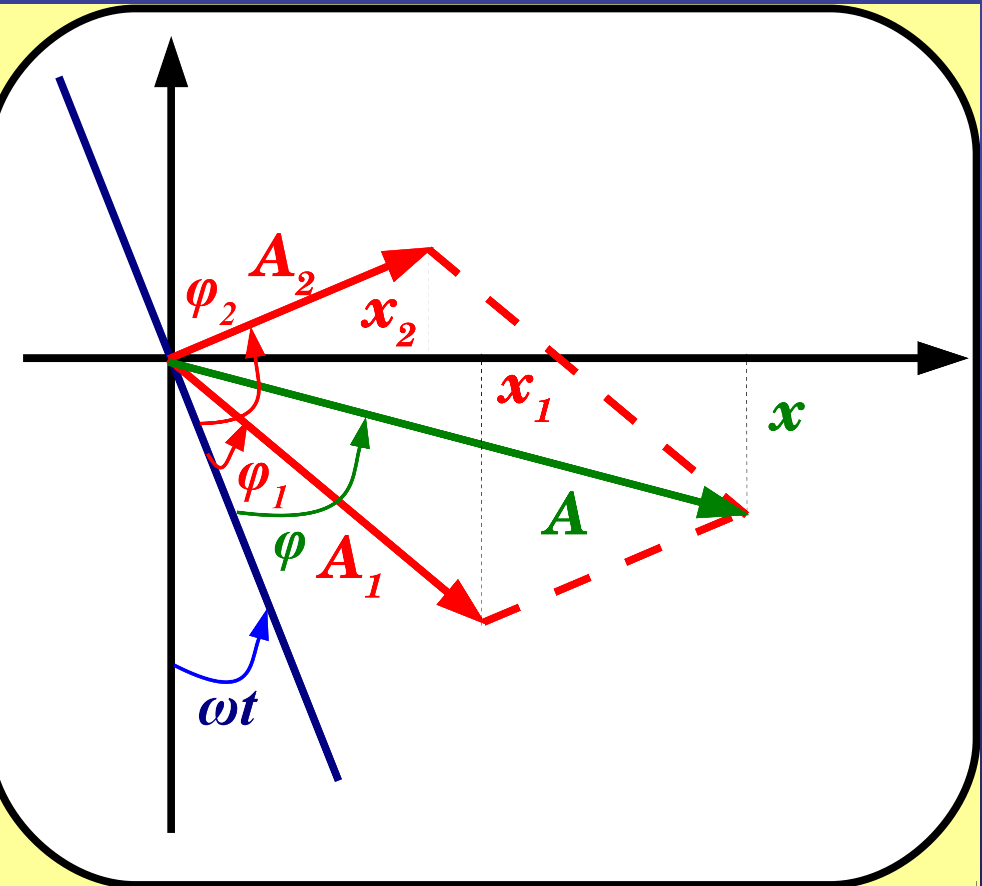
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\sin(\omega t + \phi) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_2 - \phi_1)} \\ \tan\phi = \dfrac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2} \end{array} \right.$$

Es el "muelle efectivo", cuando ambos muelles tienen inicialmente diferentes compresiones

Acoplamiento entre movimientos oscilatorios armónicos (MAS)

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) \qquad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad \begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_2 - \phi_1)} \\ \tan\phi = \dfrac{A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2}{A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2} \end{cases}$$



La expresión de la amplitud proviene de aplicar el teorema del coseno

El ángulo proviene de proyectar sobre la línea azul

$$A \sin\phi = A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2$$

$$A \cos\phi = A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2$$

$$\tan\phi = \frac{A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2}{A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2}$$

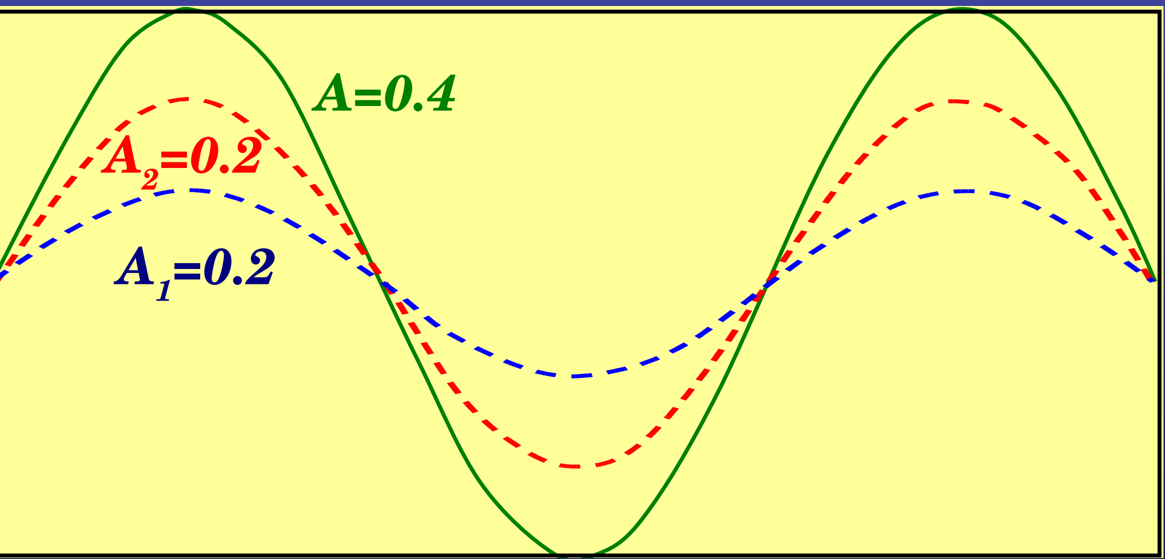
Acoplamiento entre movimientos oscilatorios armónicos (MAS)

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) \qquad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad \begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_2 - \phi_1)} \\ \tan\phi = \dfrac{A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2}{A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2} \end{cases}$$

Caso particular $\phi_1 = \phi_2$

Acoplamiento en fase



$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2$$

$$\tan\phi = \frac{(A_1 + A_2)\sin\phi_1}{(A_1 + A_2)\cos\phi_1} = \tan\phi_1$$

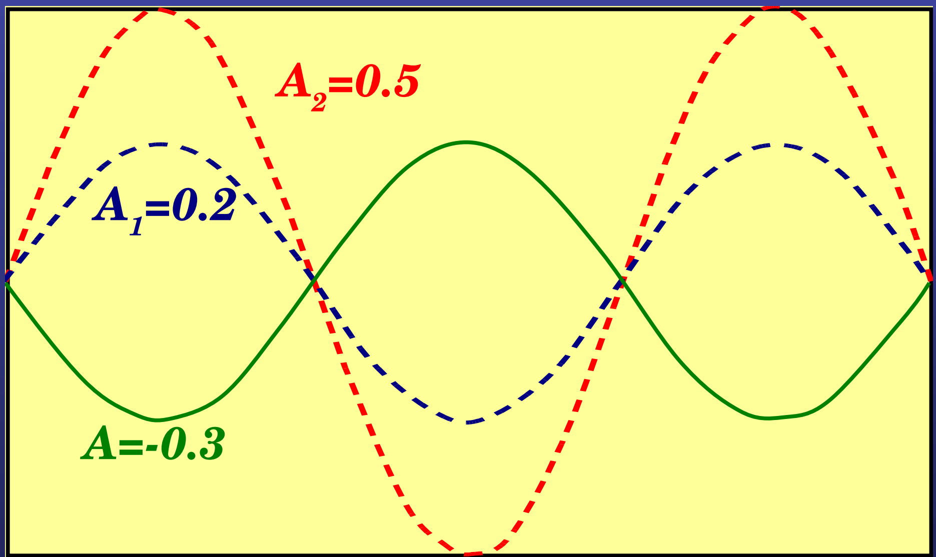
Acoplamiento entre movimientos oscilatorios armónicos (MAS)

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) \qquad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_2 - \phi_1)} \\ \tan\phi &= \frac{A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2}{A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2} \end{aligned} \right.$$

Caso particular $\phi_2 = \phi_1 + \pi$

Acoplamiento en oposición de fase



$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = A_1 - A_2$$

$$\tan\phi = \frac{(A_1 - A_2)\sin\phi_1}{(A_1 - A_2)\cos\phi_1} = \tan\phi_1$$

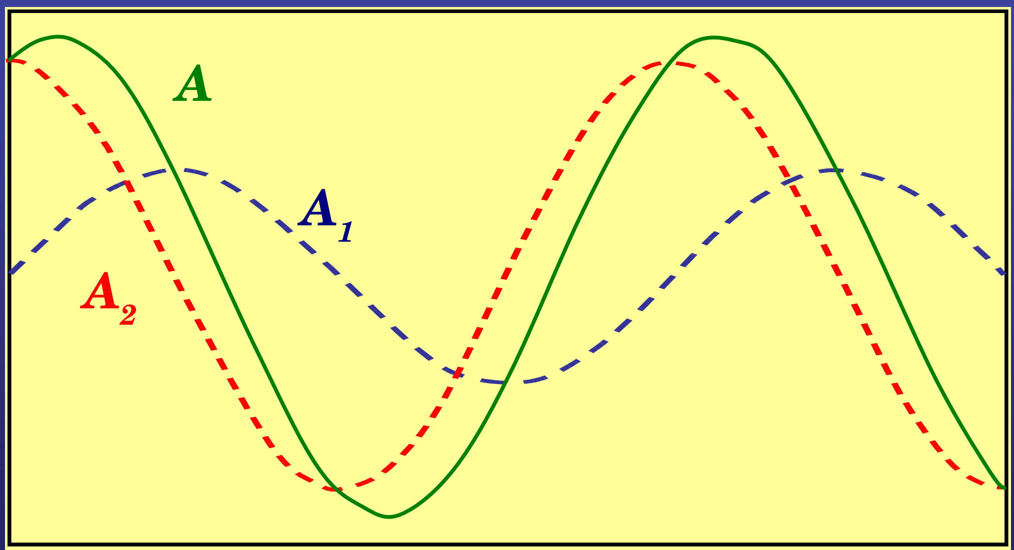
Acoplamiento entre movimientos oscilatorios armónicos (MAS)

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) \qquad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad \begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_2 - \phi_1)} \\ \tan\phi = \dfrac{A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2} \end{cases}$$

Caso particular $\phi_2 = \phi_1 + \dfrac{\pi}{2}$

Acoplamiento en desfase



$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

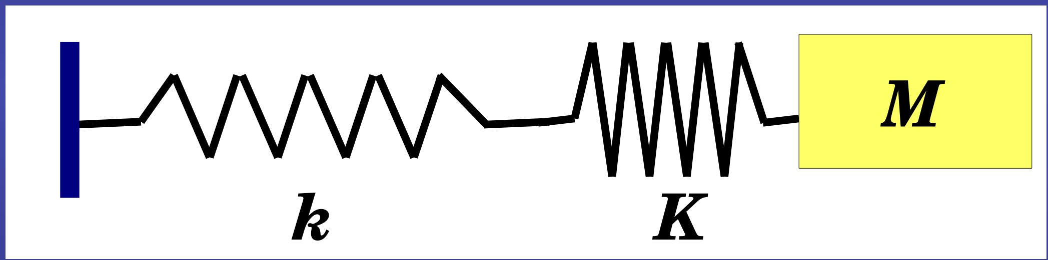
$$\phi = \phi_1 + \arctan\frac{A_2}{A_1}$$

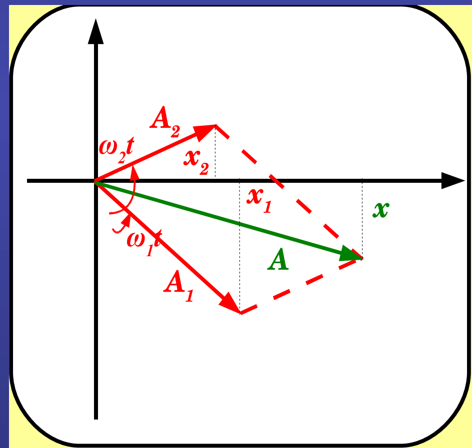
Acoplamiento entre movimientos oscilatorios armónicos (MAS)

Sean dos MAS representados por

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t) \qquad\qquad x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t)$$

Ambos según x con diferentes frecuencias (ω_1 y ω_2) e igual fase





$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left[(\omega_2 - \omega_1)t\right]}$$

$$A_1 = A_2$$

$$x(t) = x_1 + x_2 = A_1\left[\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)\right] = 2A_1 \cos\left[\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t\right] \sin\left[\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)t\right]$$

Acoplamiento entre movimientos oscilatorios armónicos (MAS)

Sean dos MAS representados por

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t) \qquad\qquad x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t)$$

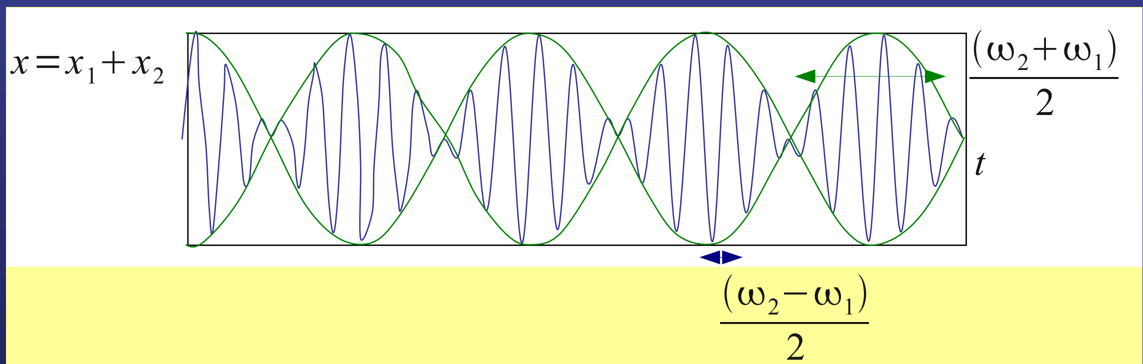
Ambos según x con diferentes frecuencias (ω_1 y ω_2) e igual fase

Supongamos que las dos tienen la misma amplitud $A_1 = A_2$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 (\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t) = \underbrace{\underbrace{2A_1 \cos\left[\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2}\right]}_{\textbf{Amplitud}} \underbrace{\sin\left[\frac{(\omega_2 + \omega_1)t}{2}\right]}_{\textbf{Frecuencia}}}_{x(t) = A\sin\omega t}$$

$$\sin a + \sin b = 2\cos\frac{(a-b)}{2}\sin\frac{(a+b)}{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

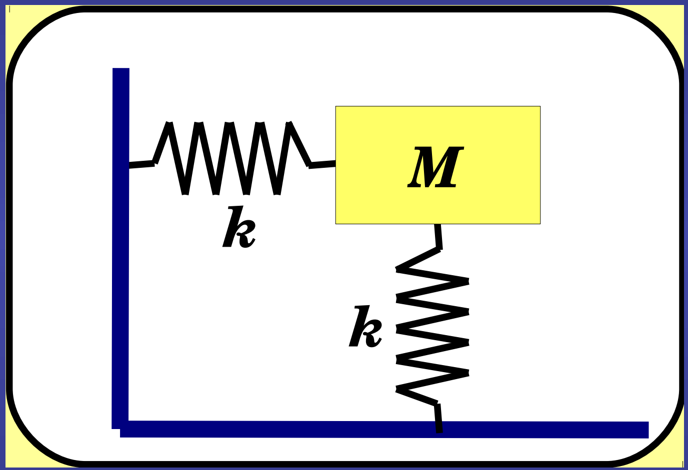


Acoplamiento entre movimientos oscilatorios armónicos (MAS)

Sean dos MAS representados por

$$x = A\sin(\omega t) \qquad\qquad y = B\sin(\omega t + \phi)$$

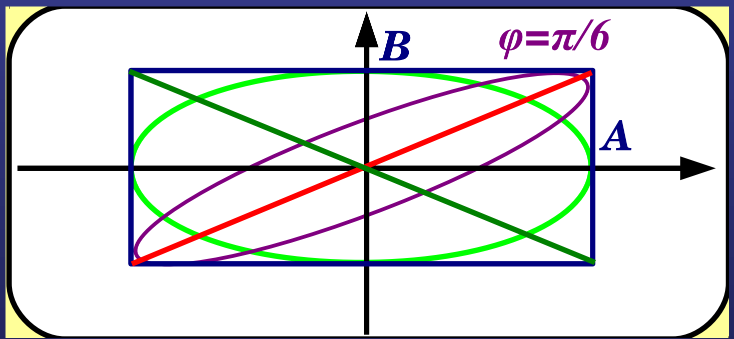
Si las oscilaciones son de pequeña amplitud, podemos suponer que los movimientos a lo largo de x y de y son independientes



$$\begin{aligned}\vec{F} &= F_x\vec{u}_x + F_y\vec{u}_y \\ &= -k(x-x_0)\vec{u}_x - k(y-y_0)\vec{u}_y \\ &= -k(\vec{r}-\vec{r}_0)\end{aligned}$$

Fuerza central atractiva $\Longrightarrow$ trayectorias elípticas

La trayectoria está acotada por las amplitudes



$$\left.\begin{array}{lll}\textbf{Si} & \phi = 0 & y = \dfrac{B}{A}x \\ \textbf{Si} & \phi = \pi & y = -\dfrac{B}{A}x\end{array}\right\}\ \textbf{Polarización lineal}$$

$$\textbf{Si} \quad \phi = \frac{\pi}{2} \qquad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \qquad \textbf{Polarización elíptica}$$

Acoplamiento entre movimientos oscilatorios armónicos (MAS)

Sean dos MAS representados por

$$x = A\sin(\omega t) \qquad\qquad y = B\sin(\omega' t + \phi)$$

Si $\omega \neq \omega'$ el resultado son las llamadas figuras de Lissajous
Aparecen tipicamente en un osciloscopio