Trabajo y energía

Javier Junquera

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Bibliografía

Física, Volumen 1, 3° edición

Raymod A. Serway y John W. Jewett, Jr.

Ed. Thomson

ISBN: 84-9732-168-5

Capítulos 6, 7 y 8

Concepto de sistema y entorno

Un sistema es una región del Universo sobre la que vamos a centrar nuestra atención. Se ignorarán los detalles acerca del resto del Universo exterior al sistema.

Ejemplos de sistemas:

- **Un sólo objeto o una partícula.**
- **Una colección de objetos o partículas.**
- **Una determinada región del espacio.**

Un sistema puede cambiar tanto su forma como su tamaño

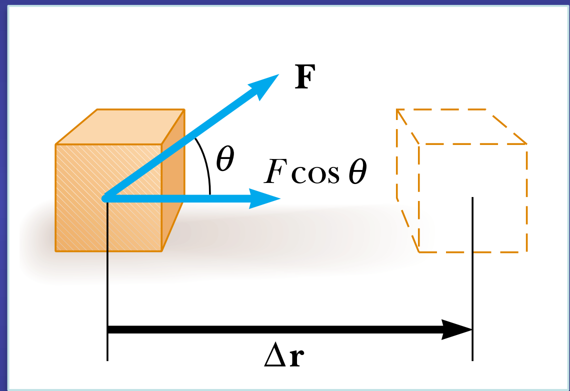
El límite de un sistema es una superficie imaginaria o real que divide el Universo entre el sistema y el resto del Universo (definido como entorno)

El entorno puede ejercer una fuerza sobre el sistema a través de los límites, e influir sobre él.

Trabajo realizado por una fuerza constante

Supongamos que tenemos un sistema constituido por una única partícula

La partícula recorre un desplazamiento $\Delta \vec{r}$ cuando sobre ella actúa una fuerza constante $\vec{F}$ ejercida por el entorno, y que forma un ángulo θ con $\Delta \vec{r}$

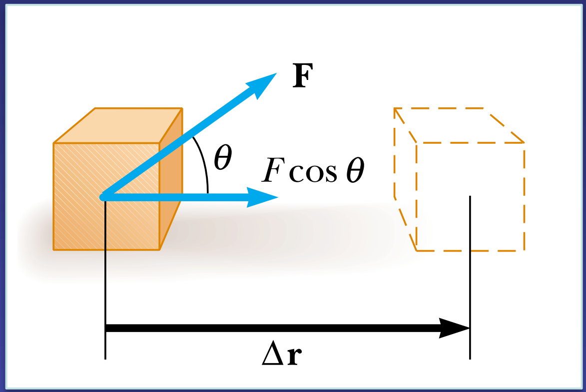


El trabajo W, realizado por una agente que ejerce una fuerza constante sobre un sistema, es el producto de la componente de la fuerza a lo largo de la dirección de desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza, por el módulo Δr del desplazamiento

$$W \equiv F \Delta r \cos \theta$$

No necesitamos los valores de la velocidad o de la aceleración

Trabajo realizado por una fuerza constante



$$W \equiv F \Delta r \cos\theta$$

$$W \equiv \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

El trabajo es una **magnitud escalar**

Unidades en el SI: (N • m)

Al Newton por metro se le denomina **Julio (J)**

El trabajo realizado por… sobre…

Antes de hablar de trabajo debemos identificar:

- **El sistema**
- **El entorno**
- **La interacción del sistema con el entorno**

Al hablar de trabajo siempre se va a usar la frase:

"el trabajo hecho por … sobre …"

Reemplaza aquí la parte del entorno que está interaccionando con el sistema

Reemplaza aquí el sistema

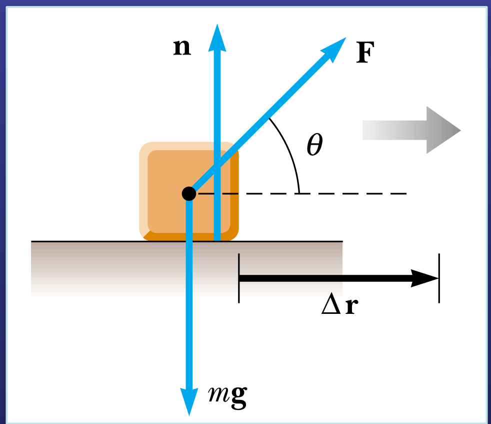
Trabajo realizado por una fuerza constante

$$W = F\Delta r\cos\theta$$

$$W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

Una fuerza no realiza trabajo sobre un sistema si:

- No hay fuerza
- No hay desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza
- La dirección de la fuerza aplicada y el desplazamiento sean perpendiculares



En este ejemplo, la fuerza normal y la fuerza gravitatoria no realizan ningún trabajo

Trabajo realizado por una fuerza constante

$$W = F\Delta r\cos\theta$$

$$W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

Si sobre una partícula actúan varias fuerzas, el trabajo total realizado cuando la partícula efectúa un cierto desplazamiento será la suma algebraica del trabajo efectuado por cada una de las fuerzas

El signo del trabajo depende de la dirección de $\vec{F}$ con respecto de $\Delta\vec{r}$:

- positivo si la componente de la fuerza a lo largo de la dirección del desplamiento tiene el mismo sentido que el desplazamiento.

- negativo si la componente de la fuerza a lo largo de la dirección del desplamiento tienen sentido contrario al del desplazamiento.

El trabajo es una forma de transferencia de energía

Si W es el trabajo realizado sobre un sistema, y W es positivo,
la energía es transferida al sistema

Si W es el trabajo realizado sobre un sistema, y W es negativo,
la energía es transferida desde sistema

Si un sistema interacciona con su entorno, la interacción se puede
describir como una transferencia de energía a través de la frontera

Como consecuencia habrá una variación de la energía almacenada en el sistema

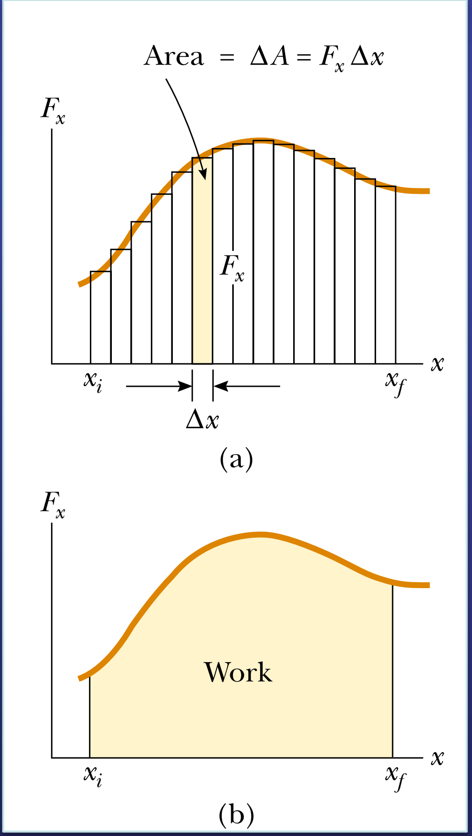
Siempre se puede calcular el trabajo realizado por una fuerza sobre un objeto,
aunque esa fuerza no sea responsable del movimiento

Trabajo realizado por una fuerza variable

Supongamos una partícula que se desplaza a lo largo del eje x, bajo la acción de una fuerza de módulo F_x, orientada también en la dirección del eje x.

Supongamos que el módulo de la fuerza, F_x, varía con la posición.

¿Cúal es el trabajo realizado por la fuerza sobre la partícula, cuando esta se desplaza desde un posición $x = x_i$ hasta un posición $x = x_f$?



1. Descomponemos el desplazamiento en desplazamientos muy pequeños

$$\Delta r = \Delta x$$

2. La componente x de la fuerza F_x es aproximadamente constante en ese intervalo.

3. Podemos aproximar el trabajo realizado por la fuerza en ese pequeño intervalo como

$$W_I \approx F_x \Delta x$$

4. El trabajo total realizado para el desplazamiento desde x_i hasta x_f es aproximadamente igual a la suma del trabajo realizado en cada uno de los pequeños intervalos.

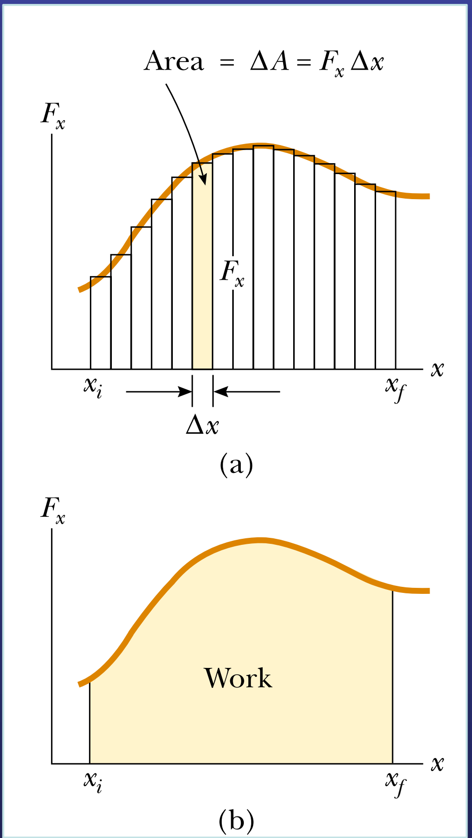
$$W \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x$$

Trabajo realizado por una fuerza variable

Supongamos una partícula que se desplaza a lo largo del eje x, bajo la acción de una fuerza de módulo F_x, orientada también en la dirección del eje x.

Supongamos que el módulo de la fuerza, F_x, varía con la posición.

¿Cúal es el trabajo realizado por la fuerza sobre la partícula, cuando esta se desplaza desde un posición $x = x_i$ hasta un posición $x = x_f$?



5. Si los desplazamientos Δx se aproximan a cero, entonces el número de términos que intervienen en la suma aumentará sin límite, pero el valor de la suma se aproximará a un valor finito igual al área comprendida entre la curva F_x y el eje x.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

Trabajo realizado por la fuerza F_x para el desplazamiento de la partícula desde x_i hasta x_f

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

Trabajo realizado por una fuerza: caso más general

Si sobre la partícula actúa más de una fuerza, el trabajo total realizado es la suma de los trabajos realizados por cada fuerza.

En otras palabras, el trabajo total es el trabajo realizado por la fuerza neta.

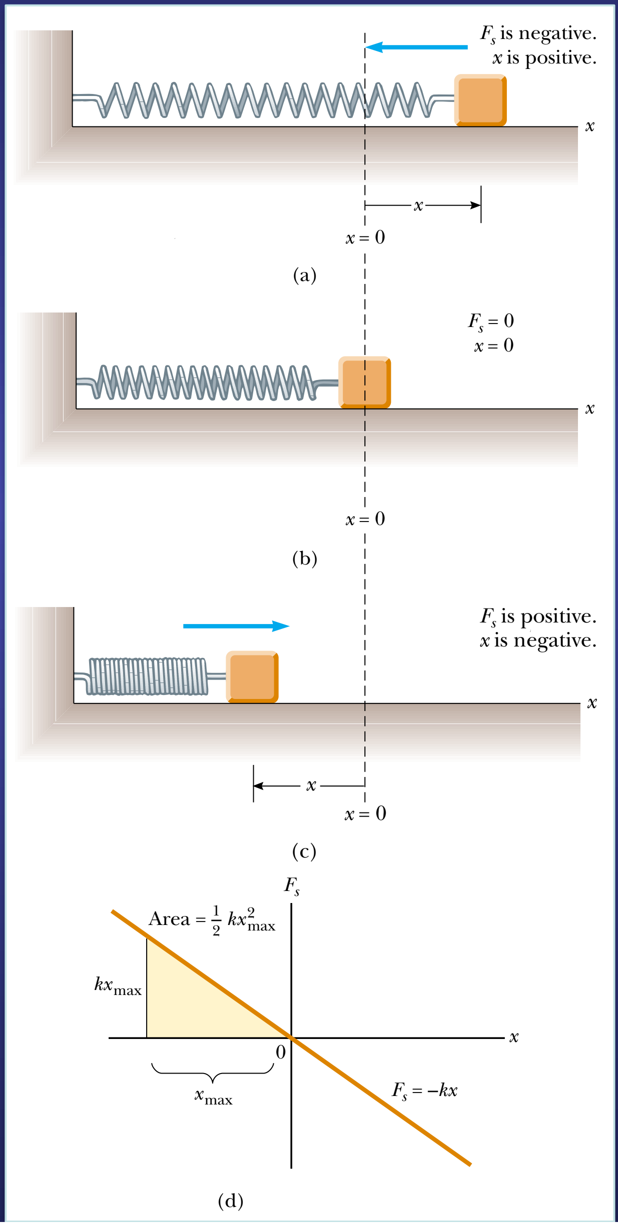
$$W_{\mathrm{neta}} = \int_{x_i}^{x_f} \left(\sum F_x\right) dx$$

Caso más general posible:

- **sobre la partícula actúan varias fuerzas,**
- **la fuerza neta no es constante, ni paralela al desplazamiento,**
- **el movimiento es tridimensional**

$$W_{\mathrm{neta}} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left(\sum \vec{F}\right) \cdot d\vec{r}$$

Ejemplo de trabajo realizado por una fuerza: trabajo realizado por un muelle



Supongamos que el movimiento se realiza sobre una superficie horizontal (unidimensional, a lo largo de la dirección x) y sin rozamiento.

A la posición de equilibrio le hacemos corresponder la posición $x = 0$

$$F_s = -kx$$

Ley de Hooke

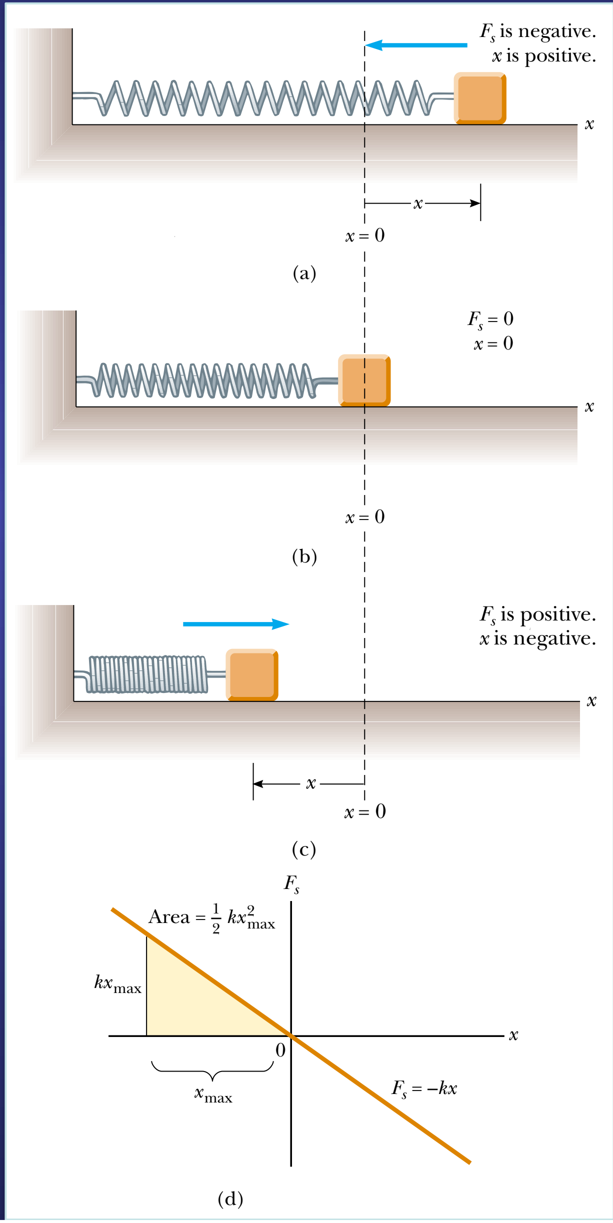
La fuerza varía con la posición.

k es una constante positiva (constante de recuperación, contante del muelle o constante de rigidez).

El signo menos indica que la fuerza ejercida por el muelle tiene sentido opuesto al desplazamiento con respecto a la posición de equilibrio.

Valida si el desplazamiento no es demasiado grande.

Ejemplo de trabajo realizado por una fuerza: trabajo realizado por un muelle



Si se desplaza el bloque hasta una posición $-x_{max}$ y luego se suelta, se mueve desde $-x_{max}$ hasta $+x_{max}$ pasando por el origen, y luego vuelve una y otra vez hasta la posición $-x_{max}$

El trabajo realizado por la fuerza del muelle sobre el bloque, cuando el bloque se desplaza desde $x_i = -x_{max}$ hasta $x_f = 0$

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_s dx = \int_{-x_{max}}^{0} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx^2_{max}$$

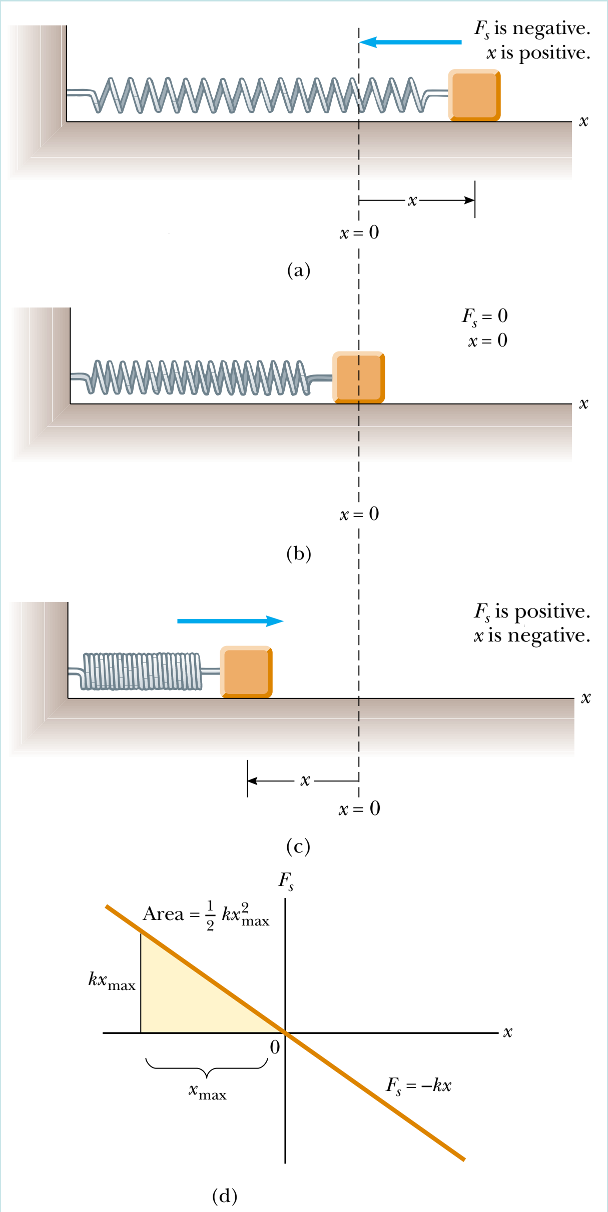
Positivo, la fuerza del muelle tiene el mismo sentido que el desplazamiento

El trabajo realizado por la fuerza del muelle sobre el bloque, cuando el bloque se desplaza desde $x_i = 0$ hasta $x_f = x_{max}$

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_s dx = \int_{0}^{x_{max}} (-kx)dx = -\frac{1}{2}kx^2_{max}$$

Negativo, la fuerza del muelle tiene sentido opuesto al desplazamiento

Ejemplo de trabajo realizado por una fuerza: trabajo realizado por un muelle



$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_s dx = \int_{-x_{max}}^{0} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_{max}^2$$

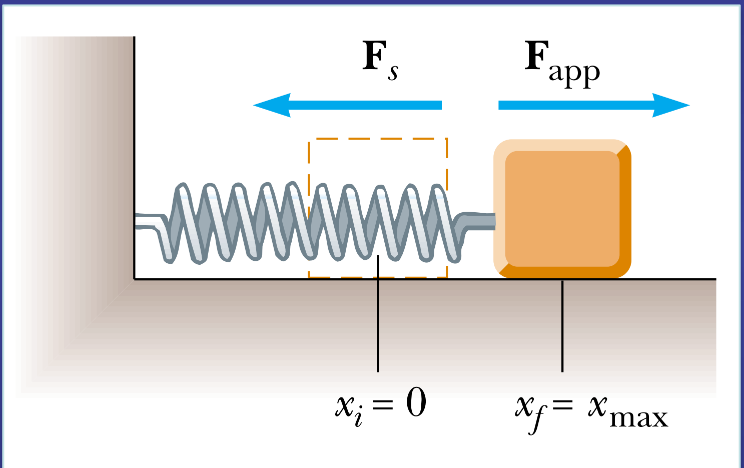
$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_s dx = \int_{0}^{x_{max}} (-kx)dx = -\frac{1}{2}kx_{max}^2$$

El trabajo neto realizado por la fuerza del muelle sobre el bloque, cuando el bloque se desplaza desde $x_i = -x_{max}$ hasta $x_f = +x_{max}$ es cero

Si el bloque realiza un desplazamiento arbitrario desde $x = x_i$ hasta $x = x_f$ el trabajo realizado por la fuerza del muelle es

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

Ejemplo de trabajo realizado por una fuerza: trabajo realizado por una fuerza externa sobre el muelle



Para estirar el muelle muy lentamente desde $x_i = 0$ hasta $x_f = x_{max}$ es necesario aplicar una fuerza externa $\vec{F}_{ap}$ del mismo módulo y dirección que la fuerza del muelle, pero de sentido opuesto

El trabajo realizado por la fuerza aplicada sobre el muelle es

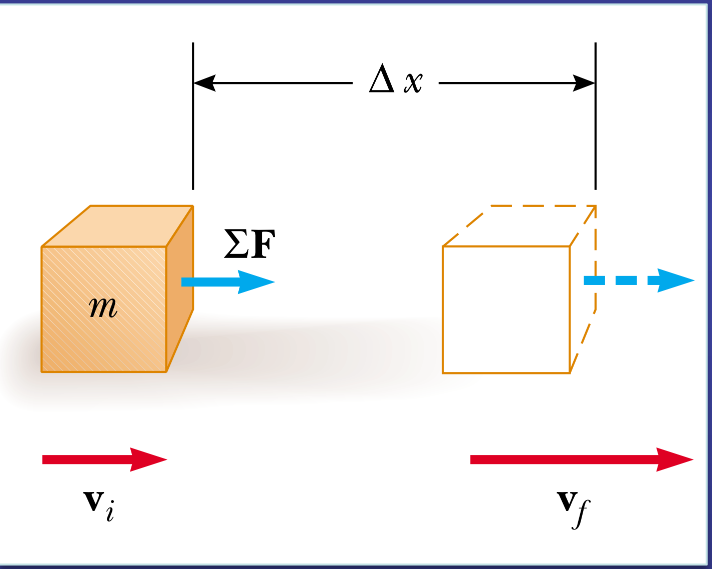
$$W_{F_{ap}} = \int_0^{x_{max}} F_{ap} dx = \int_0^{x_{max}} kx dx = \frac{1}{2} k x_{max}^2$$

El trabajo realizado por la fuerza aplicada sobre el sistema bloque-muelle entre posiciones arbitrarias es

$$W_{F_{ap}} = \int_{x_i}^{x_f} F_{ap}\ dx = \int_{x_i}^{x_f} kx\ dx = \frac{1}{2} k x_f^2 - \frac{1}{2} k x_i^2$$

Energía cinética: definición

Supongamos una partícula de masa m que se mueve hacia la derecha a lo largo del eje x bajo la acción de una fuerza neta $\sum \vec{F}$, también orientada hacia la derecha



Supongamos que la partícula se desplaza $\Delta x = x_f - x_i$

El trabajo realizado por la fuerza sobre la partícula es

$$W_{neta} = \int_{x_i}^{x_f} \left(\sum F \right) dx$$

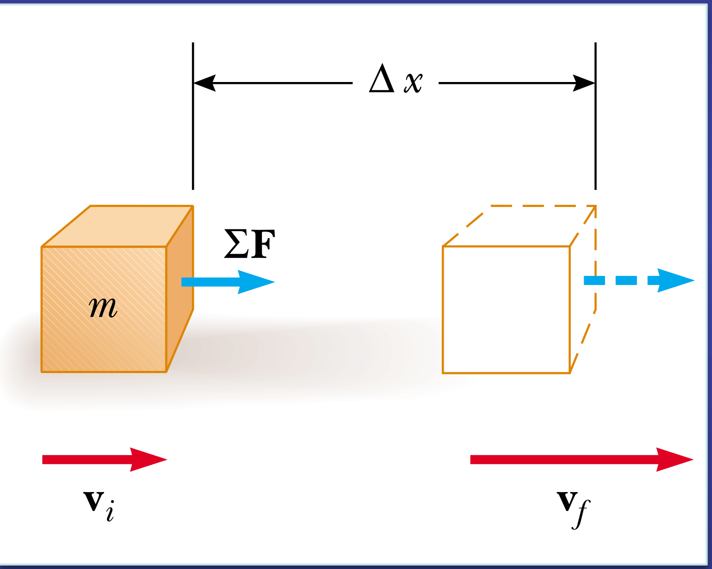
Utilizando la segunda ley de Newton

$$\sum F = ma$$

$$W_{\text{neta}} = \int_{x_i}^{x_f} ma \ dx = \int_{x_i}^{x_f} m \frac{dv}{dt} \ dx = \int_{x_i}^{x_f} m \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} \ dx = \int_{v_i}^{v_f} mv \ dv$$

Energía cinética: definición

$$W_{\text{neta}} = \int_{x_i}^{x_f} ma\ dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dt}\ dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}\ dx = \int_{v_i}^{v_f} mv\ dv$$



$$W_{\text{neta}} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

El trabajo realizado por la fuerza neta sobre una partícula de masa m es igual a la diferencia entre los valores inicial y final de la magnitud

$$\frac{1}{2}mv^2$$

La energía cinética de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad de módulo v se define como

$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2$$

Unidades (SI): Julio (J)

Teorema de las fuerzas vivas

Cuando se realiza un trabajo en un sistema y el único cambio que se produce en el sistema es una variación de la celeridad (es decir, del *módulo de la velocidad*), el trabajo realizado por la fuerza neta es igual a la variación de la energía cinética del sistema

$$W_{\mathrm{neta}} = K_f - K_i = \Delta K$$

En el teorema de las fuerzas vivas sólo aparecen los puntos inicial y final (no depende de los detalles de la trayetoria)

La celeridad de la partícula aumentará si el trabajo neto realizado sobre ella es positivo (la energía cinética final será superior a la inicial)

La celeridad de la partícula disminuirá si el trabajo neto realizado sobre ella es negativo (la energía cinética final será menor que la inicial)

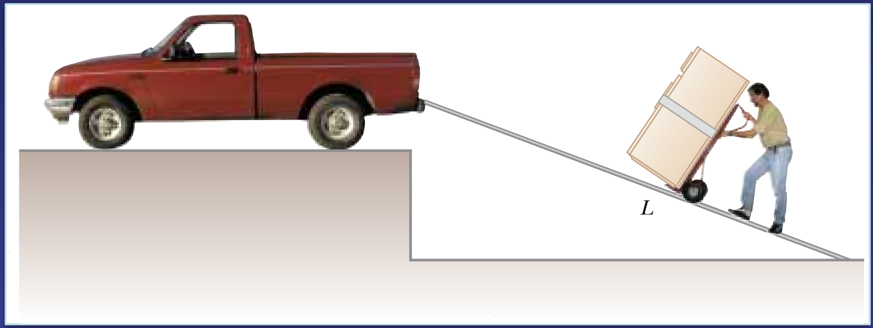
Teorema importante pero de validez limitada: sobre un sistema puede haber más cambios además de los cambios en la celeridad

Órdenes de magnitud de la energía cinética

Kinetic Energies for Various Objects

Object	Mass (kg)	Speed (m/s)	Kinetic Energy (J)
Earth orbiting the Sun	5.98×10^{24}	2.98×10^{4}	2.66×10^{33}
Moon orbiting the Earth	7.35×10^{22}	1.02×10^{3}	3.82×10^{28}
Rocket moving at escape speed[a]	500	1.12×10^{4}	3.14×10^{10}
Automobile at 65 mi/h	2 000	29	8.4×10^{5}
Running athlete	70	10	3 500
Stone dropped from 10 m	1.0	14	98
Golf ball at terminal speed	0.046	44	45
Raindrop at terminal speed	3.5×10^{-5}	9.0	1.4×10^{-3}
Oxygen molecule in air	5.3×10^{-26}	500	6.6×10^{-21}

Ejemplo de aplicación del teorema de las fuerzas vivas



Un hombre desea cargar una carga en un camión
Para ello va a utilizar una rampa de longitud L

¿Es cierta la siguiente afirmación?
"Cuanto mayor sea la longitud L, menor será el trabajo requerido para cargar el camión"

Supongamos que la carga se coloca sobre un carrito y asciende la rampa a celeridad constante, v

Si la celeridad es constante, no hay variación en la energía cinética $\Delta K = 0$

Por el teorema de las fuerzas vivas, sabemos que el trabajo neto de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema (la carga) debe anularse

La fuerza normal ejercida por la rampa sobre la carga es perpendicular al desplazamiento, así que no realiza trabajo

$$W_{\mathrm{neto}} = W_{\mathrm{por\ el\ hombre}} + W_{\mathrm{por\ la\ gravedad}} = 0$$

$$W_{\mathrm{por\ la\ gravedad}} = -mgh \Rightarrow W_{\mathrm{por\ el\ hombre}} = mgh$$

Independiente de la longitud de la rampa
Cuanto más larga sea la rampa, menor será la fuerza necesaria, pero ésta deberá actuar sobre una distancia mayor

Potencia: definición de potencia media y potencia instantánea

Desde un punto de vista práctico, estamos interesados no sólo en conocer la cantidad de energía transferida, sino también la velocidad a la que se transfiere esa energía

A la tasa temporal de transferencia de energía se le denomina potencia

SI se aplica una fuerza externa a un objeto (para el que adoptaremos el modelo de partícula), y si el trabajo realizado por esta fuerza es W en el intervalo de tiempo Δt, entonces la potencia media durante este intervalo de tiempo se define como

$$\overline{\mathcal{P}} \equiv \frac{W}{\Delta t}$$

La potencia instantánea $\mathcal{P}$ en un instante de tiempo determinado es el valor límite de la potencia media cuando Δt tiende a cero

$$\mathcal{P} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

dW es el valor infinitesimal del trabajo realizado

El concepto de potencia es válido para cualquier método de transferecnia de energía (no sólo trabajo)

Potencia: relación entre potencia y velocidad

$$\mathcal{P} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

dW **es el valor infinitesimal del trabajo realizado**

Como $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Potencia: expresión general y unidades

En general la potencia se define para cualquier tipo de transferencia de energía.
La expresión más general para definir la potencia es

$$\mathcal{P} = \frac{dE}{dt}$$

La unidad de potencia en el SI es el julio por segundo, también denominado vatio

$$1 \ \mathrm{W} = 1 \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1 \ \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Otra unidad muy utilizada es el caballo de vapor (cv)

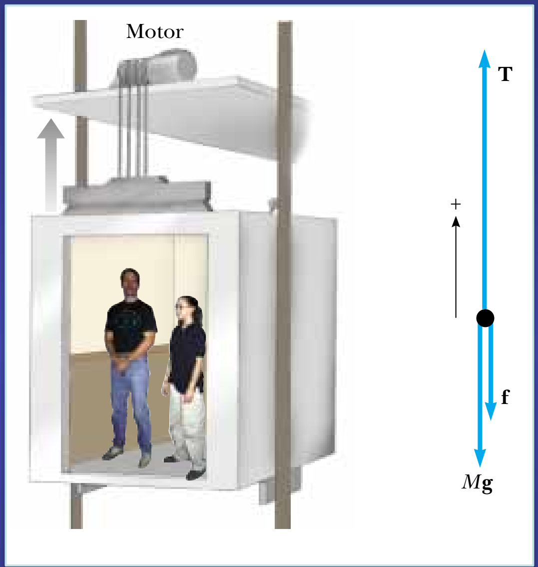
$$1 \ \mathrm{cv} \equiv 746 \ \mathrm{W} \equiv 550 \ \mathrm{ft} \cdot \frac{\mathrm{lb}}{\mathrm{s}}$$

Podemos definir una unidad de energía en función de la unidad de potencia.
Un kilovatio hora (kWh) es la energía transferida en una hora a la velocidad constante de 1 kW

$$1 \ \mathrm{kWh} = \left(10^3 \ \mathrm{W}\right)(3600 \ \mathrm{s}) = 3.60 \times 10^6 \ \mathrm{J}$$

Ejemplo utilizando potencia:
Potencia suministrada por el motor de un ascensor

¿Qué potencia debe suministrar el motor para que el ascensor ascienda con celeridad constante de 3.00 m/s?



El motor debe suministrar una fuerza de magnitud T que tire del ascensor hacia arriba

La celeridad es constante, lo cuál quiere decir que no hay aceleración

$$\sum F_y = 0 = T - f - Mg \Rightarrow T = f + Mg = 2.16 \times 10^4 \text{ N}$$

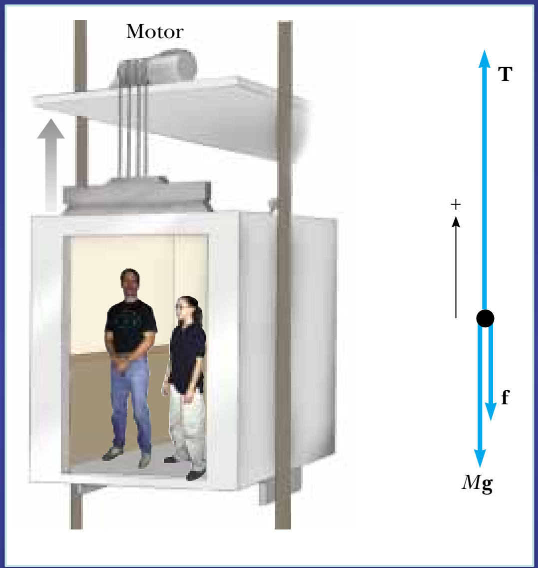
Masa del ascensor: 1600 kg
Masa de los ocupantes: 200 kg
Fricción constante de 4000 N

Como la velocidad y la fuerza del motor van en la misma dirección

$$\mathcal{P} = \vec{T} \cdot \vec{v} = Tv = 6.48 \times 10^4 \text{ W}$$

Ejemplo utilizando potencia:
Potencia suministrada por el motor de un ascensor

¿Qué potencia debe suministrar el motor en cualquier instante si se ha diseñado de modo que proporcione una aceleración de 1.00 m/s²?



El motor debe suministrar una fuerza de magnitud T que tire del ascensor hacia arriba

$$\sum F_y = Ma = T - f - Mg \Rightarrow T = f + M(a+g) = 2.34 \times 10^4 \text{ N}$$

Masa del ascensor: 1600 kg
Masa de los ocupantes: 200 kg
Fricción constante de 4000 N

Como la velocidad y la fuerza del motor van en la misma dirección

$$\mathcal{P} = Tv = \left(2.34 \times 10^4 \text{ N}\right) v$$

v **celeridad instantánea**

A igualdad de celeridad, esta potencia es mayor que antes: el motor debe transferir una energía extra para acelerar el ascensor.

Clasificación de los sistemas dependiendo de su interacción con el entorno

-aislados: no intercambian ni energía ni materia con el entorno

-cerrados: intercambian energía pero no materia con el entorno

-abiertos: intercambian energía y materia con el entorno

A estos dos últimos tipos se les suele denominar también de manera más genérica como **sistemas no aislados**

Ejemplo de interacción en sistemas no aislados

En sistemas no aislados, cuando el sistema interactúa con el entorno o se ve influenciado por él, se produce algún tipo de variación en el sistema

Ejemplo: el teorema de las fuerzas vivas:

interacción: trabajo realizado por la fuerza externa

magnitud relacionada con el sistema que varía: su energía cinética

Si se realiza un trabajo positivo sobre el sistema, se transfiere energía al sistema
Si se realiza un trabajo negativo sobre el sistema, la energía se transfiere desde el sistema al entorno

Ejemplo de interacción en sistemas no aislados

En sistemas no aislados, cuando el sistema interactúa con el entorno o se ve influenciado por él, se produce algún tipo de variación en el sistema

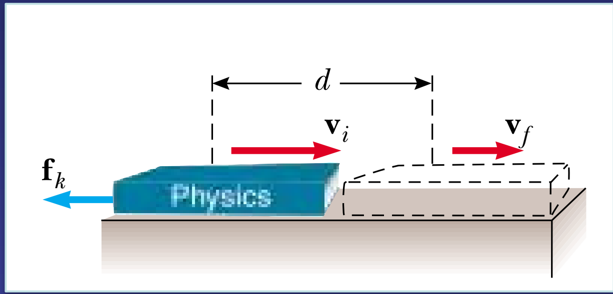
Ejemplo: el teorema de las fuerzas vivas:

interacción: trabajo realizado por la fuerza externa

magnitud relacionada con el sistema que varía: su energía cinética

Si se realiza un trabajo positivo sobre el sistema, se transfiere energía al sistema
Si se realiza un trabajo negativo sobre el sistema, la energía se transfiere desde el sistema al entorno

Sistemas no aislados: fuerzas de rozamiento



Imaginemos un objeto que se desliza en una superficie con rozamiento

La fuerza de rozamiento va a ejercer un trabajo: existe una fuerza y existe un desplazamiento

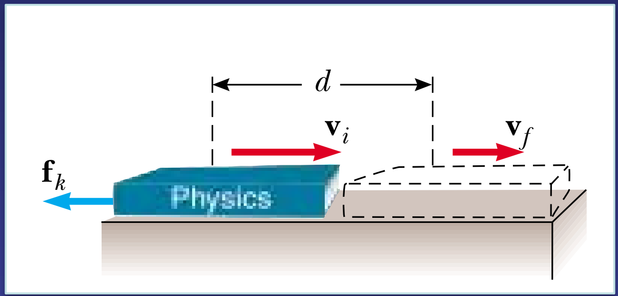
La definición de trabajo implicaba el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza. Ahora la fuerza de rozamiento se extiende sobre toda la superficie de contacto del objeto con la superficie por la que se desliza.
La fuerza no está localizada en ningún sitio en concreto.

Además el módulo de la fuerza de rozamiento es diferente entre uno y otro punto del objeto (deformaciones locales de la superficie y el objeto, etc.)

Los puntos de aplicación de las fuerzas de rozamiento sobre el objeto van variando por toda la cara del objeto que está en contacto con la superficie.
En general, el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza de rozamiento no es igual al desplazamiento del objeto

Cuando un objeto e de mayor tamaño y no puede ser tratado como una partícula, el tratamiento se complica

Sistemas no aislados: fuerzas de rozamiento



Imaginemos un objeto que se desliza hacia la derecha y que reduce su velocidad debido a la fuerza de rozamiento

Supongamos que la superficie es el sistema

La fuerza de rozamiento asociada al deslizamiento del libro realiza un trabajo sobre la superficie

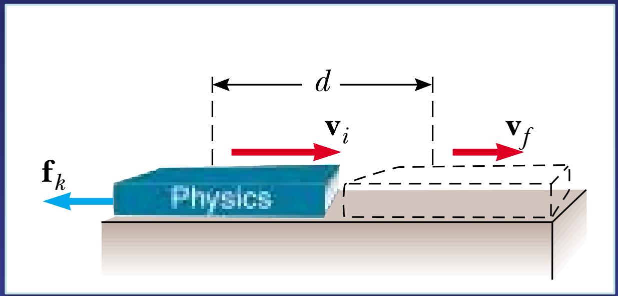
La fuerza sobre la superficie está orientada hacia la derecha.
El desplazamiento del punto de aplicación, también está orientado hacia la derecha.
El trabajo es positivo

Pero la mesa no se mueve

Se ha realizado un trabajo positivo sobre la superficie, pero la energía cinética de la misma no ha aumentado

El trabajo realizado ha calentado la superficie en lugar de haber aumentado su celeridad

Energía interna: definición



Imaginemos un objeto que se desliza hacia la derecha y que reduce su velocidad debido a la fuerza de rozamiento

Supongamos que la superficie es el sistema

Utilizamos el término energía interna para definir la energía asociada con la temperatura

En el ejemplo anterior, el trabajo realizado sobre la superficie, representa una energía transferida hacia el sistema, pero aparece en el sistema como energía interna en vez de cómo energía cinética

Hasta ahora hemos visto dos métodos que permiten almacenar energía en un sistema:

- -energía cinética: relacionada con el movimiento del sistema
- -energía interna: relacionada con la temperatura

Pero solo una manera de transferir energía a ese sistema: trabajo

Mecanismos de transferencia de energía

Trabajo

Ondas mecánicas

Calor

Transferencia de materia

Transmisión eléctrica

Radiación electromagnética

Principio de conservación de la energía

No podemos crear ni destruir la energía, es decir, la energía se conserva

Si la cantidad de energía en un sistema varía, solo puede deberse al hecho de que una cierta cantidad de energía ha cruzado los límites del sistema mediante algún tipo de mecanismo de transferencia

$$\Delta E_{\text{sistema}} = \sum T$$

Energía total del sistema:
Incluye todos los métodos de almacenamiento de energía (cinética, potencial, interna,…)

Cantidad de energía transferida a través de los límites del sistema:
Incluye todos los métodos de transferencia de energía (trabajo, calor,…)

El teorema de las fuerzas vivas como un caso particular del principio de conservación de la energía

Supongamos que se aplica una fuerza sobre un sistema no aislado.
Supongamos también que el único efecto sobre el sistema es cambiar su celeridad

Único mecanismo de transferencia de energía es el trabajo: $\sum T \rightarrow W$

Única forma de energía que cambia: energía cinética: $\Delta E_{\text{sistema}} \rightarrow \Delta K$

$$\Delta E_{\text{sistema}} = \sum T$$

$$\Delta K = W$$

Energía potencial de un sistema: definición

Vamos a considerar un sistema compuesto de dos o más partículas u objetos que interaccionan con una fuerza interna al sistema

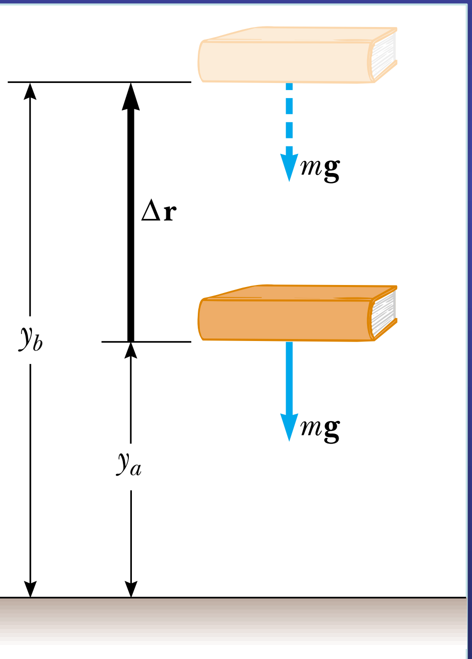
La energía cinética del sistema es la suma algebraica de todos los miembros del sistema

En algunos sistemas, uno de los objetos es tan masivo que puede considerarse estacionario, y su energía cinética puede ser despreciada

(ejemplo: en un sistema bola-Tierra, en el que la bola cae en caída libre. La energía cinética de este sistema puede considerarse como la energía cinética de la bola, ya que la Tierra se mueve tan lentamente en este proceso que podemos ignorar su energía cinética)

Energía potencial de un sistema: definición

Vamos a considerar un sistema compuesto de dos o más partículas u objetos que interaccionan con una fuerza interna al sistema



Consideremos el sistema compuesto por el libro y la Tierra, interaccionando via la fuerza gravitacional

Para elevar el libro lentamente (adiabáticamente) una altura $\Delta y = y_b - y_a$, tenemos que hacer un trabajo sobre el sistema

Este trabajo realizado sobre el sistema debe reflejarse como un incremento en la energía del sistema

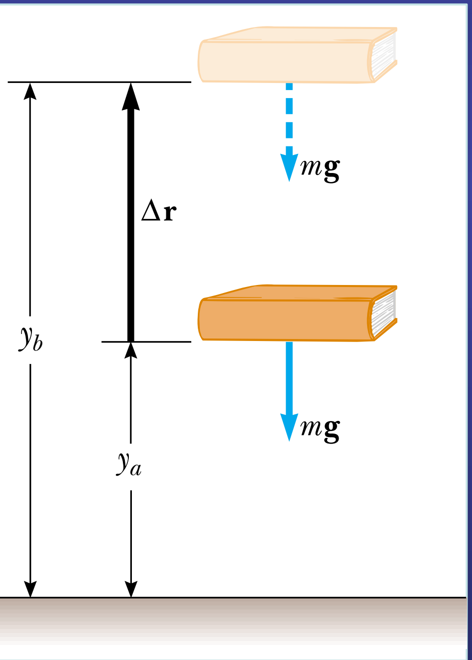
El libro está en reposo antes de realizar el trabajo y permanece en reposo después de realizar el trabajo.
No hay cambio en la energía cinética del sistema

Tampoco hay cambio en la temperatura ni del libro ni de la Tierra.
No hay cambio en la energía interna

Energía potencial de un sistema: definición

No hay cambio en la energía cinética del sistema.
No hay cambio en la energía interna del sistema.

Tiene que haber una nueva forma de almacenar la energía



Si después de elevar el libro lo dejamos caer de nuevo hasta la altura y_a , el sistema adquiere una energía cinética

El origen de esta energía cinética está en el trabajo realizado anteriormente para elevar el libro

Mientras el libro se encontraba en la posición más elevada, la energía del sistema tenía la *potencia* de convertirse en energía cinética

Al mecanismo de almacenamiento de energía antes de soltar el libro se le denomina energía potencial

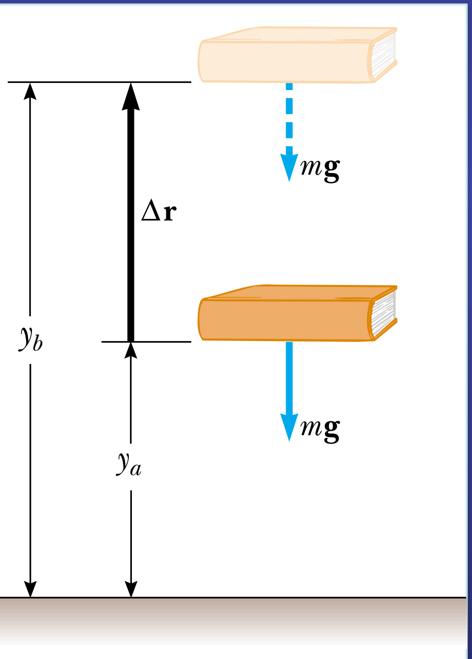
La energía potencial sólo se puede asociar a un determinado tipo de fuerzas

En este ejemplo en particular, hablamos de *energía potencial gravitatoria*

Energía potencial gravitatoria asociada a un objeto situado en una posición determinada sobre la Tierra

Sea un objeto de masa m

Para elevar ese objeto desde una altura inicial y_a **hasta una altura final** y_b **, un agente externo tiene que ejercer una fuerza**



Asumimos que esa subida se produce lentamente (sin aceleración)

Podemos igualar la magnitud de la fuerza ejercida sobre el libro con la magnitud del peso del mismo (el libro asciende a velocidad constante, luego la fuerza neta que actúa sobre él se anula)

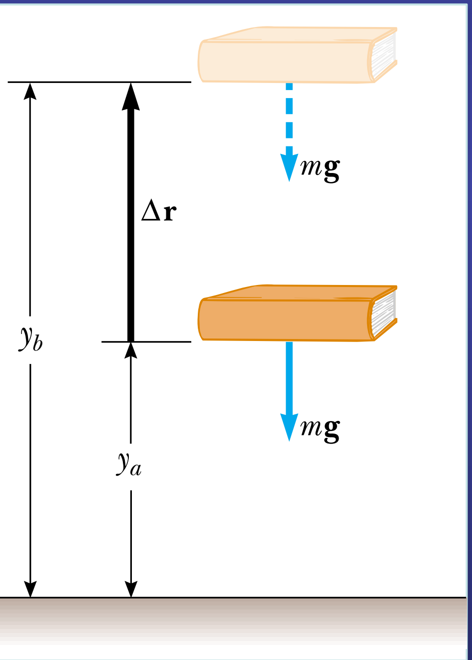
El trabajo realizado por la fuerza externa sobre el sistema libro-Tierra es

$$W = \vec{F}_{\text{ap}} \cdot \Delta\vec{r} = \left(mg\ \vec{j}\right) \cdot \left(\Delta y\ \vec{j}\right) = \left(mg\ \vec{j}\right) \cdot \left[(y_b - y_a)\ \vec{j}\right] = mgy_b - mgy_a$$

Energía potencial gravitatoria asociada a un objeto situado en una posición determinada sobre la Tierra

Sea un objeto de masa m

Para elevar ese objeto desde una altura inicial y_a hasta una altura final y_b, un agente externo tiene que ejercer una fuerza



El trabajo realizado por esa fuerza representa una energía transferida al sistema.

$$W = \vec{F}_{\text{ap}} \cdot \Delta\vec{r} = \left(mg\ \vec{j}\right) \cdot \left(\Delta y\ \vec{j}\right) = \left(mg\ \vec{j}\right) \cdot \left[(y_b - y_a)\ \vec{j}\right] = mgy_b - mgy_a$$

Definimos la cantidad mgy como la energía potencial gravitatoria del sistema

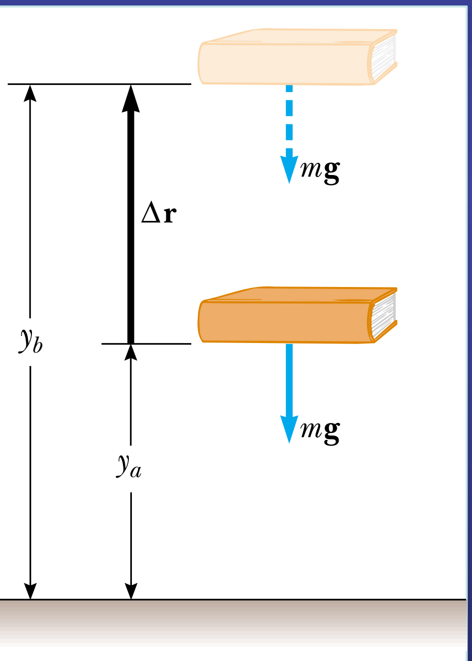
$$U_g = mgy$$

$$W = U_{g,b} - U_{g,a} = \Delta U_g$$

El trabajo realizado sobre el sistema en esta situación aparece como un cambio en la energía potencial gravitatoria del sistema

Energía potencial gravitatoria asociada a un objeto situado en una posición determinada sobre la Tierra

La energía potencial gravitatoria depende únicamente de la altura de un objeto sobre la superficie de la Tierra



Si el desplazamiento, en vez de ser en la dirección vertical, se realiza primero en el plano y luego hacia arriba, el trabajo realizado por la fuerza externa no cambia

$$W = \vec{F}_{\text{ap}} \cdot \Delta\vec{r} = \left(mg\ \vec{j}\right) \cdot \left[(x_b - x_a)\ \vec{i} + (y_b - y_a)\ \vec{j}\right] = mgy_b - mgy_a$$

Energía potencial: elección del cero de energías

A la hora de resolver problemas, debemos escoger una configuración de referencia a la que se le asigna un valor de referencia de la energía potencial gravitatoria (normalmente cero)

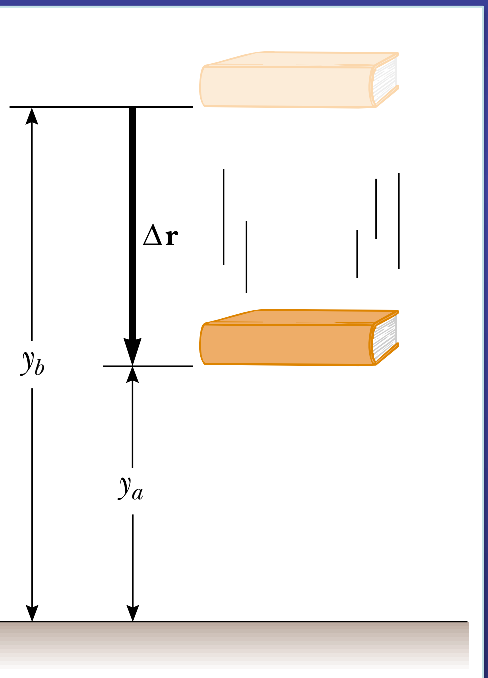
La elección de la configuración de referencia es totalmente arbitraria.
La magnitud relevante es siempre una diferencia en la energía potencial, y esta diferencia es independiente de la elección de la configuración de referencia

Normalmente es conveniente elegir una configuración de referencia en la que un objeto situado sobre la superficie de la Tierra tiene una energía potencial gravitatoria nula.
Pero esto no es esencial en absoluto. Depende del problema

Conservación de energía mecánica en sistemas aislados

Una vez que el libro ha ascendido, hay una energía potencial gravitatoria almacenada en el sistema.
Ahora dejamos caer el libro.

Vamos a centrarnos en el trabajo realizado sobre el libro por la fuerza gravitacional, mientras el libro recorre la trayectoria desde y_b hasta y_a



$$W_{\text{sobre el libro}} = (m\vec{g}) \cdot \Delta\vec{r} = (-mg\ \vec{j}) \cdot \left[(y_a - y_b)\ \vec{j}\right] = mgy_b - mgy_a$$

Por el teorema de las fuerzas vivas sabemos que

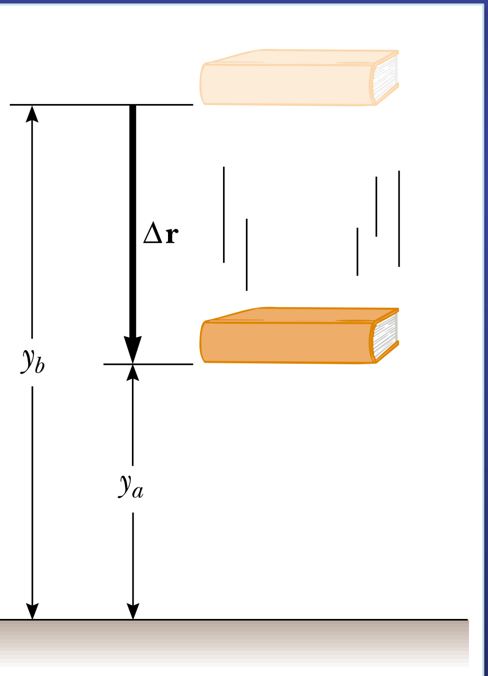
$$W_{\text{sobre el libro}} = \Delta K_{\text{libro}}$$

$$\Delta K_{\text{libro}} = mgy_b - mgy_a$$

Conservación de energía mecánica en sistemas aislados

$$\Delta K_{\text{libro}} = mgy_b - mgy_a$$

Vamos a relacionar esta ecuación con las correspondientes para el sistema libro-Tierra



Podemos escribir el lado derecho de la ecuación como:

$$mgy_b - mgy_a = -(mgy_a - mgy_b) = -(U_f - U_i) = -\Delta U_g$$

En lo que se refiere a la parte izquierda de la ecuación, como el libro es a única parte del sistema que se mueve

$$\Delta K_{\text{libro}} = \Delta K$$

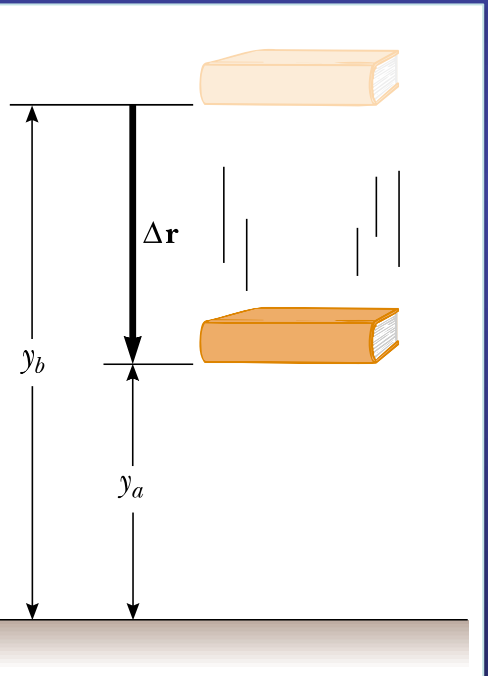
$$\Delta K = -\Delta U_g \Rightarrow \Delta K + \Delta U_g = 0$$

Conservación de energía mecánica en sistemas aislados

$$\Delta K = -\Delta U_g \Rightarrow \Delta K + \Delta U_g = 0$$

Definimos la suma de la energía cinética y potencial como energía mecánica

$$E_{\text{mec}} \equiv K + U$$



(Se ha eliminado el subíndice g porque puede haber otros tipos de energía potencial).

En la ecuación anterior U representa todos los tipos posibles de energía potencial

Por la primera ecuación de esta transparencia

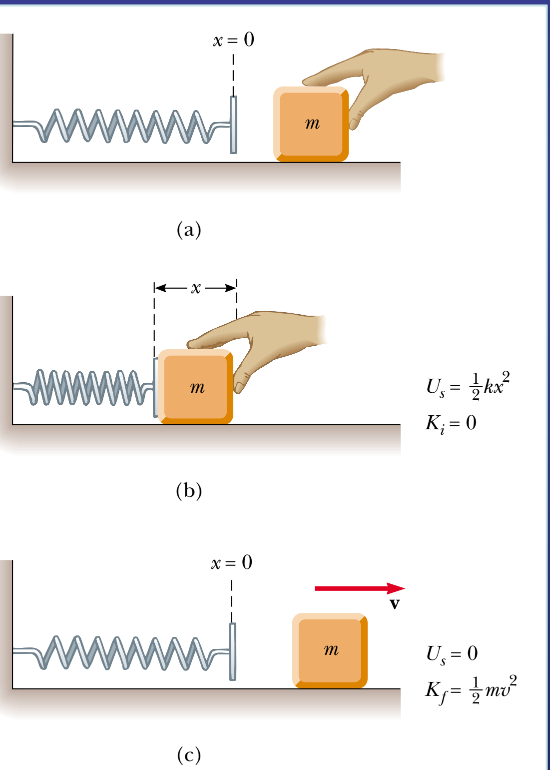
$$(K_f - K_i) + (U_f - U_i) = 0$$

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

Conservación de la energía mecánica de un sistema aislado

Energía potencial elástica

Consideremos ahora que nuestro sistema está compuesto por un bloque unido a un muelle



La fuerza que el muelle ejerce sobre el bloque es

$$F_s = -kx$$

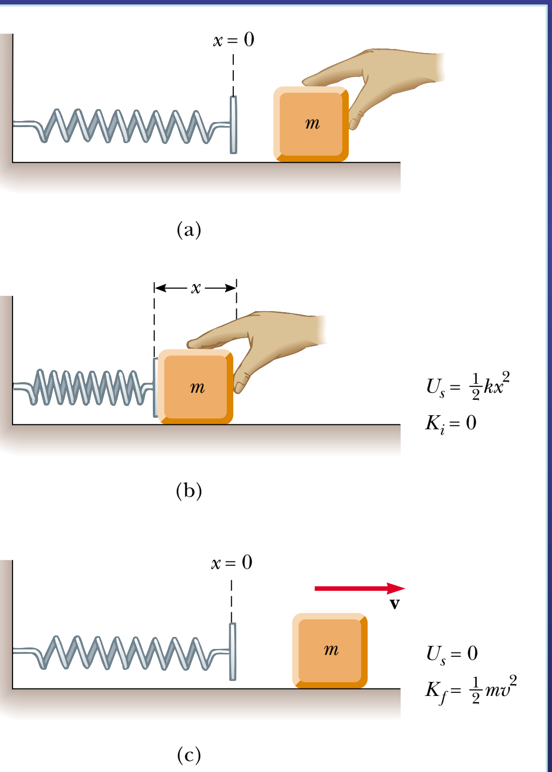
El trabajo realizado por la fuerza aplicada sobre el sistema bloque-muelle entre posiciones arbitrarias es

$$W_{F_{ap}} = \int_{x_i}^{x_f} F_{ap}\ dx = \int_{x_i}^{x_f} kx\ dx = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

Las posiciones están medidas con respecto a la posición de equilibrio del muelle (que se toma como origen de la energía potencial)

Energía potencial elástica

Consideremos ahora que nuestro sistema está compuesto por un bloque unido a un muelle



De nuevo, el trabajo realizado es igual a la diferencia entre el valor inicial y final de una expresión relacionada con la configuración del sistema

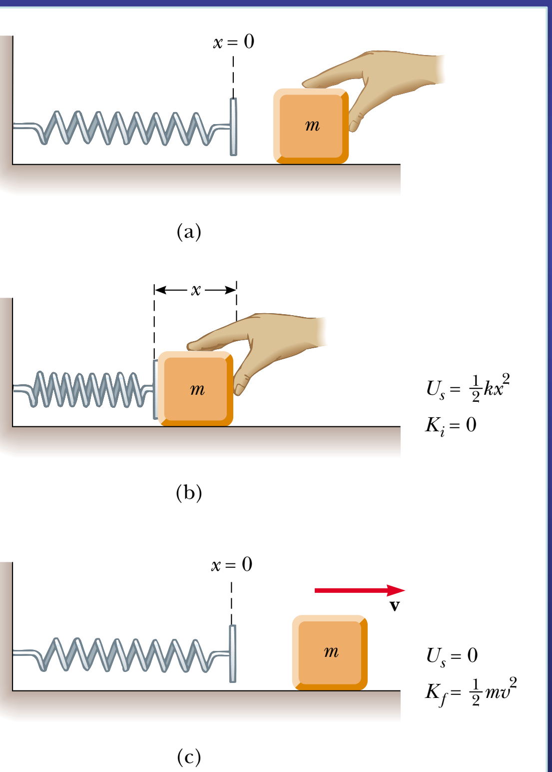
$$W_{F_{ap}} = \int_{x_i}^{x_f} F_{ap}\ dx = \int_{x_i}^{x_f} kx\ dx = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

La energía potencial elástica asociada con la el sistema bloque muelle está definida por

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2$$

Energía potencial elástica

Consideremos ahora que nuestro sistema está compuesto por un bloque unido a un muelle



La energía potencial elástica almacenada en un muelle es cero cuando el muelle está sin deformar

Cuando empujamos el bloque contra el muelle y este se comprime una distancia x, la energía potencial elástica almacenada en el muelle vale

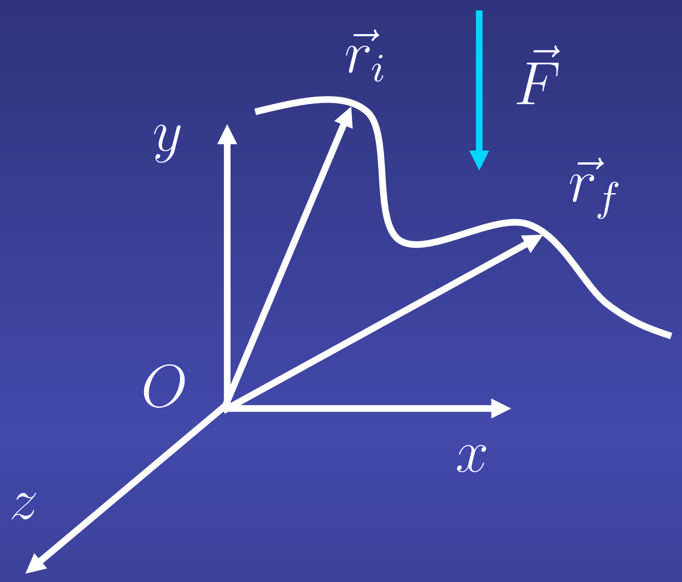
$$U_s = \frac{1}{2}kx^2$$

Si se suelta el bloque desde una situación de reposo, el muelle ejerce una fuerza sobre el bloque y recupera su longitud inicial.

La energía potencial elástica se transforma en energía cinética del bloque

La energía potencial elástica siempre es positiva en un bloque deformado

Trabajo realizado por la fuerza de la gravedad



$$\vec{r}_i = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}$$

$$\vec{r}_f = x_f\vec{i} + y_f\vec{j} + z_f\vec{k}$$

$$\vec{F} = -mg\vec{k}$$

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} d\vec{r} = \vec{F}\cdot(\vec{r}_f - \vec{r}_i) = \vec{F}\cdot\vec{r}_f - \vec{F}\cdot\vec{r}_i$$

$$W = mgz_i - mgz_f$$

Definimos la magnitud mgz **como la energía potencial gravitatoria**

Fuerza conservativa: definición

Una fuerza se dice que es conservativa cuando el trabajo realizado por la misma no depende de la trayectoria seguida por los elementos del sistema sobre el que actúa, sino sólo de las configuraciones inicial y final

Ejemplos:

- **fuerza gravitatoria: el trabajo realizado se expresa únicamente en función de las alturas inicial y final.**
- **fuerza de recuperación que un muelle ejerce sobre un objeto unido al muelle.**

El trabajo realizado por una fuerza conservativa cuando un elemento del sistema se mueve a lo largo de una trayectoria cerrada es igual a cero.

Fuerza no conservativa: definición

Una fuerza se dice que es no conservativa cuando el trabajo realizado por la misma depende de la trayectoria seguida por los elementos del sistema sobre el que actúa. La trayectoria importa

Una fuerza entre los elementos de un sistema que no es conservativa produce un cambio en la energía mecánica del sistema.

Ejemplos:

- fuerza de rozamiento

La fuerza de rozamiento dinámica reduce la energía cinética del libro.

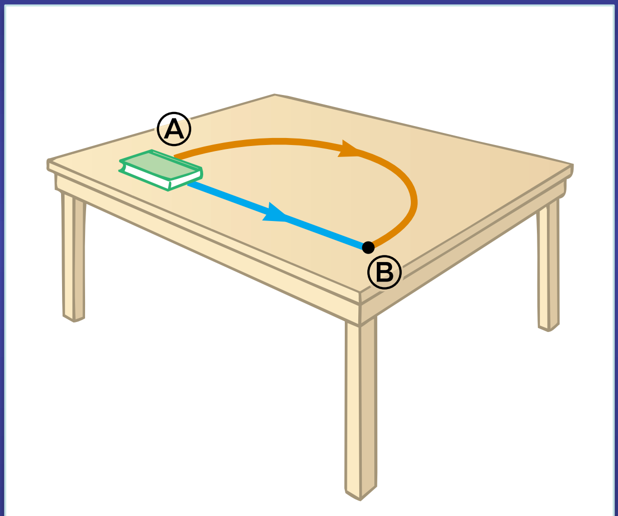
Como resultado de la fuerza de fricción, las temperaturas del libro y de la superficie se incrementan.

El tipo de energía asociada con la temperatura es la energía interna.

Solamente parte de la energía cinética del libro se transforma en energía interna del libro. El resto se transforma en energía interna de la superficie de la mesa

Fuerza no conservativa: dependencia del trabajo con la trayectoria

Supongamos que desplazamos un libro entre dos puntos de una mesa



Si el libro se desplaza a lo largo de una línea recta entre los puntos A y B, siguiendo la trayectoria azul, y si queremos que el libro se mueve con celeridad constante, habrá que realizar un trabajo contra la fuerza cinética de fricción

Ahora empujamos el libro siguiendo la trayectoria semicircular marrón.

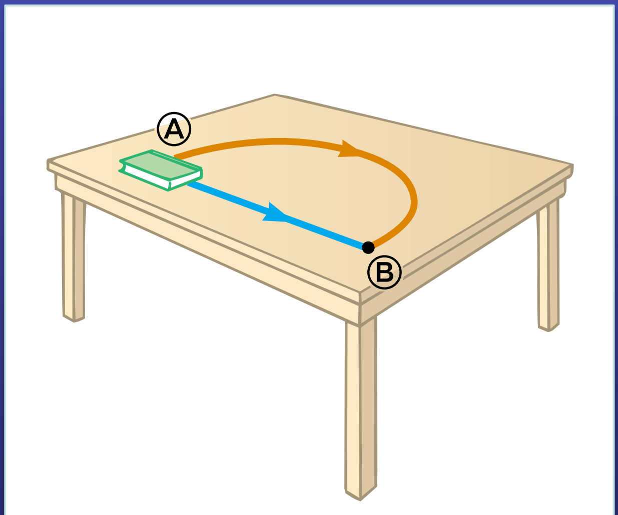
El trabajo realizado contra la fuerza de fricción es mayor que en el caso anterior porque el camino recorrido es mayor

El trabajo realizado depende del camino recorrido y, por lo tanto, la fuerza de fricción no puede ser conservativa.

Cambios en la energía mecánica si actúan fuerzas no conservativas

Si las fuerzas actuando sobre los objetos dentro de un sistema son conservativas: se conserva la energía mecánica

Si alguna de las fuerzas que actuan sobre los objetos dentro de un sistema es no conservativa, la energía mecánica cambia



Supongamos el caso del libro que se desliza sobre la superficie de una mesa. Mientras el libro se mueve una distancia d, la única fuerza que realiza un trabajo sobre el libro es la fuerza cinética de fricción.

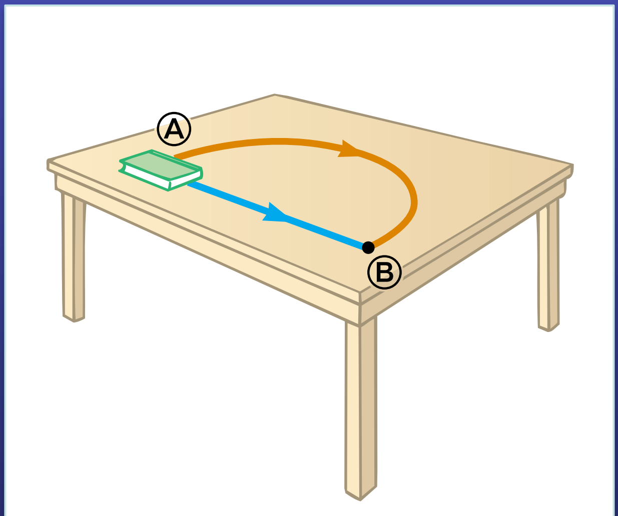
Esta fuerza produce una disminución de la energía cinética del libro

$$\Delta K = -f_k d$$

Cambios en la energía mecánica si actúan fuerzas no conservativas

Si las fuerzas actuando sobre los objetos dentro de un sistema son conservativas: se conserva la energía mecánica

Si alguna de las fuerzas que actuan sobre los objetos dentro de un sistema es no conservativa, la energía mecánica cambia



Supongamos ahora que el libro forma parte de un sistema que también muestra un cambio en su energía.

En este caso, la energía mecánica del sistema cambia debido a la fuerza de fricción

$$\Delta E_{\text{mec}} = \Delta K + \Delta U = -f_k d$$

Fuerza conservativa y energía potencial

Supongamos que conocemos la función energía potencial, ¿podemos calcular la fuerza?

Supongamos un sistema de partículas en el cuál la configuración cambia debido al desplazamiento de una partícula a lo largo del eje x

El trabajo realizado por una fuerza conservativa cuando la partícula se mueve a lo largo del eje x es

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = -\Delta U = -(U_f - U_i) = -U_f + U_i$$

$$U_f = -\int_{x_i}^{x_f} F_x dx + U_i$$

El trabajo realizado por las fuerzas conservativas actuando entre las partes de un sistema es igual a menos el cambio en la energía potencial asociada con la fuerza que produce el cambio de la configuración del sistema

Fuerza conservativa y energía potencial

Supongamos que conocemos la función energía potencial, ¿podemos calcular la fuerza?

Supongamos un sistema de partículas en el cuál la configuración cambia debido al desplazamiento de una partícula a lo largo del eje x

El trabajo realizado por una fuerza conservativa cuando la partícula se mueve a lo largo del eje x es

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = -\Delta U = -(U_f - U_i) = -U_f + U_i$$

$$U_f = -\int_{x_i}^{x_f} F_x dx + U_i$$

Esta ecuación permite calcular la función de energía potencial asociada a una fuerza conservativa, siempre que se conozca la expresión que define la fuerza. U_i se suele tomar como cero en algún punto de referencia arbitrario.

Fuerza conservativa y energía potencial

Para toda fuerza conservativa se puede identificar una función de energía potencial tal que el trabajo realizado por la fuerza sobre un elemento del sistema (aquel sobre el que la fuerza actúa) sólo depende de la diferencia entre los valores inicial y final de la función.

Trabajo realizado por una fuerza conservativa para un desplazamiento infinitesimal $d\vec{r} = dx\vec{i}$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot dx\vec{i} = F_x dx = -dU$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

La fuerza conservativa que actúa entre los elementos de un sistema es igual al opuesto de la derivada de la energía potencial asociada con dicho sistema

Fuerza conservativa y energía potencial

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

En tres dimensiones y coordenadas cartesianas

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial x} - \vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial y} - \vec{k}\,\frac{\partial U}{\partial z}$$

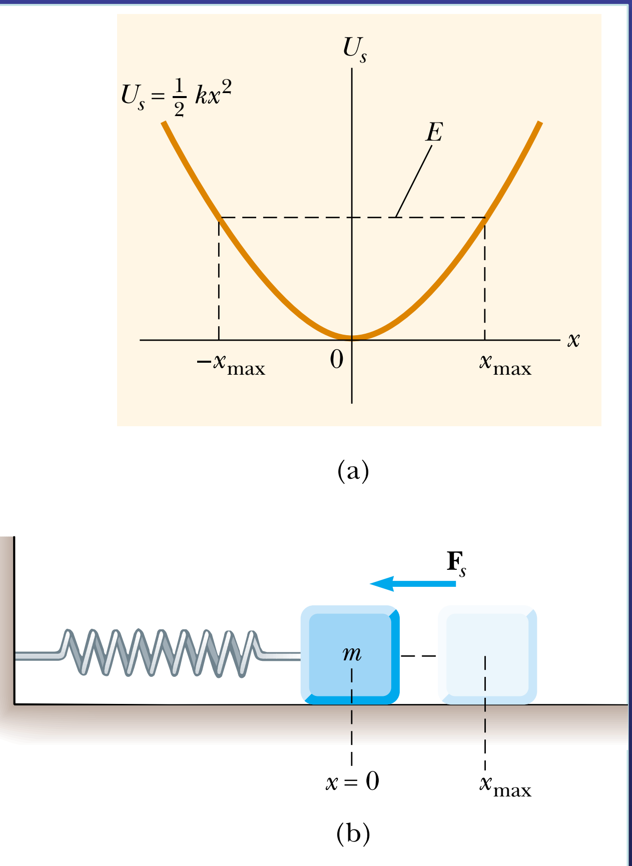
La fuerza es igual al opuesto del gradiente de la función escalar potencial

Añadir una constante a la energía potencial no tiene ninguna incidencia, ya que la derivada de una constante es igual a cero

Diagramas de energía: puntos de equilibrio estable

Muy frecuentemente podemos entender cualitativamente el movimiento de un sistema a través de un gráfico de la energía potencial como función de la posición de una de las partes del sistema

Consideremos la función energía potencial de un sistema bloque-muelle $U_s = \frac{1}{2}kx^2$



(a)

(b)

Si colocamos el bloque en reposo en la posición de equilibrio del muelle (x=0), punto en el que la fuerza se anula, permanecerá allí a no ser que una fuerza externa actúe sobre él.

Si la fuerza externa estira el muelle desde su posición de equilibrio:

- la elongación x es positiva
- la pendiente dU/dx es positiva
- la fuerza F_s ejercida por el muelle sobre el bloque es negativa
- el bloque se acelera hacia la posición de equilibrio

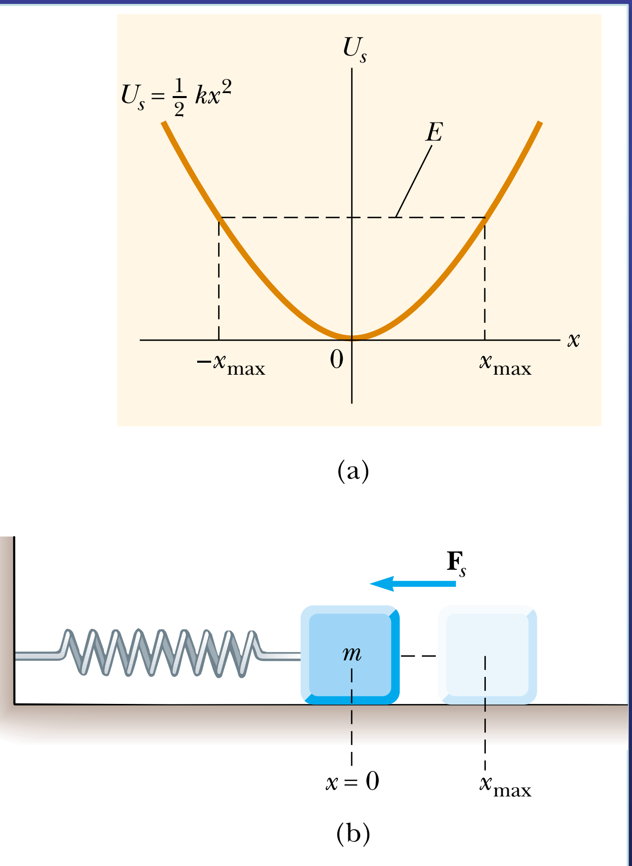
Si la fuerza externa comprime el muelle desde su posición de equilibri

- la elongación x es negativa
- la pendiente dU/dx es negativa
- la fuerza F_s ejercida por el muelle sobre el bloque es positiva
- el bloque se acelera hacia la posición de equilibrio

Diagramas de energía: puntos de equilibrio estable

Muy frecuentemente podemos entender cualitativamente el movimiento de un sistema a través de un gráfico de la energía potencial como función de la posición de una de las partes del sistema

Consideremos la función energía potencial de un sistema bloque-muelle $U_s = \frac{1}{2}kx^2$



(a)

(b)

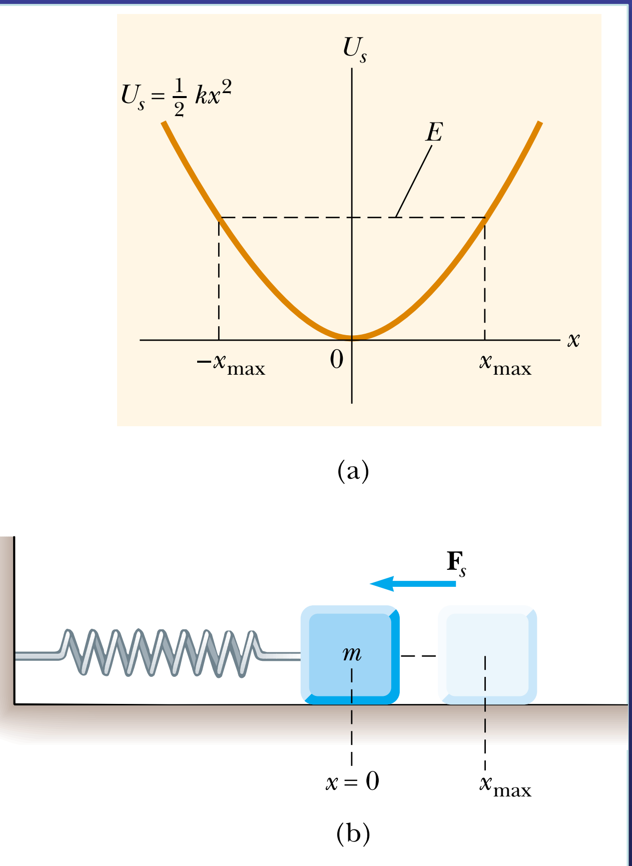
La posición x = 0 para el sistema bloque-muelle es una posición de equilibrio estable.
Cualquier movimiento del bloque fuera de esta posición resulta en una fuerza dirigida de nuevo hacia x = 0.

La configuración de equilibrio estable corresponde a un mínimo de la energía potencial.

Diagramas de energía: puntos de equilibrio estable

Muy frecuentemente podemos entender cualitativamente el movimiento de un sistema a través de un gráfico de la energía potencial como función de la posición de una de las partes del sistema

Consideremos la función energía potencial de un sistema bloque-muelle $U_s = \frac{1}{2}kx^2$



Si ahora separamos el bloque de su posición de equilibrio hasta colocarlo en una posición x_{max} **y lo soltamos partiendo del reposo**

Inicialmente, la energía total es la energía potencial almacenada en el muelle, $\frac{1}{2}kx_{max}^2$

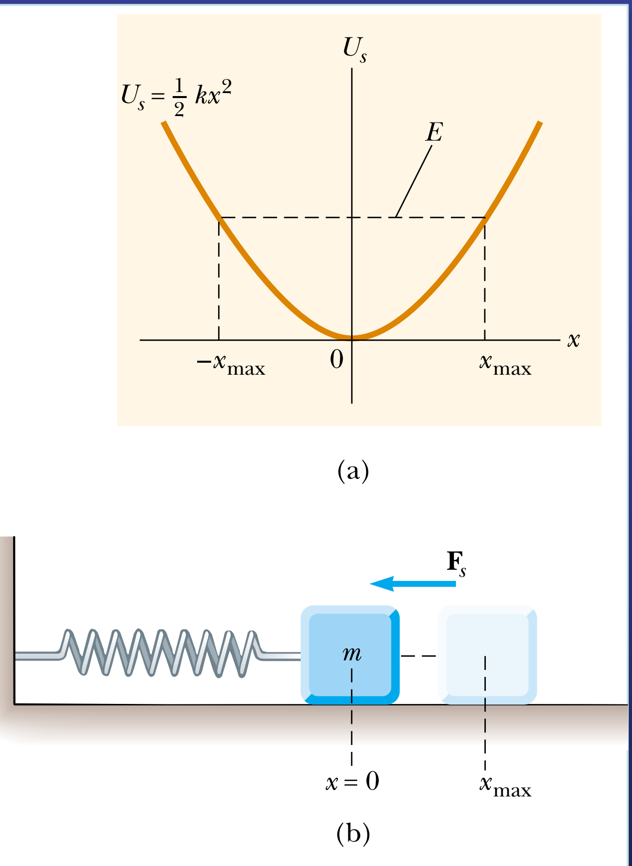
Según comienza a moverse, el sistema adquiere energía cinética y va perdiendo una cantidad igual de energía potencial

Como la energía total del sistema debe permanecer constante, el bloque oscila (se mueve hacia delante y hacia atrás) entre los dos puntos denominados "puntos de retorno"

Diagramas de energía: puntos de equilibrio estable

Muy frecuentemente podemos entender cualitativamente el movimiento de un sistema a través de un gráfico de la energía potencial como función de la posición de una de las partes del sistema

Consideremos la función energía potencial de un sistema bloque-muelle $U_s = \frac{1}{2}kx^2$



Si no hay fricción, no hay pérdidas de energía y el bloque oscilará perpetuamente entre

$$x = -x_{max}$$

$$x = +x_{max}$$

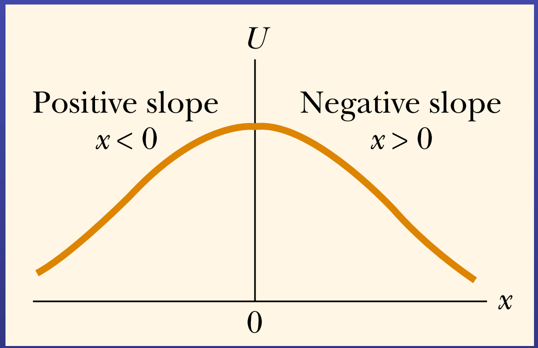
Desde un punto de vista energético, la energía del sistema no puede exceder

$$\frac{1}{2}kx_{max}^2$$

Diagramas de energía: puntos de equilibrio inestable

Muy frecuentemente podemos entender cualitativamente el movimiento de un sistema a través de un gráfico de la energía potencial como función de la posición de una de las partes del sistema

Consideremos una partícula moviéndose a lo largo del eje x bajo la acción de una fuera conservativa, donde la curva energía potencial como función de la posición de la partícula toma la forma de la figura



De nuevo $F_x = -\frac{dU}{dx} = 0$ **en** $x = 0$ **así que la partícula está en equilibrio en ese punto**

Si colocamos el bloque en reposo en la posición de equilibrio (x=0), punto en el que la fuerza se anula, permanecerá allí a no ser que una fuerza externa actúe sobre él.

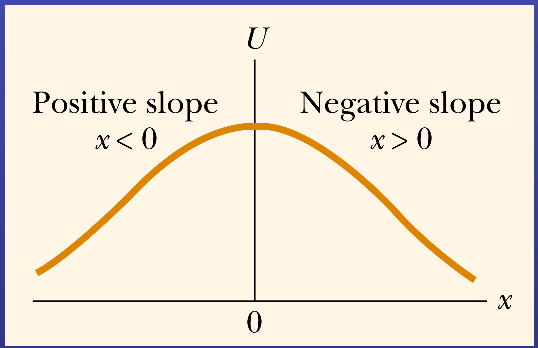
Si la fuerza externa desplaza la partícula hacia la derecha:

- $x > 0$
- **la pendiente** dU/dx **es negativa**
- **la fuerza** $F_x = -dU/dx$ **es positiva**
- **la partícula acelera alejándose de** $x = 0$

Diagramas de energía: puntos de equilibrio inestable

Muy frecuentemente podemos entender cualitativamente el movimiento de un sistema a través de un gráfico de la energía potencial como función de la posición de una de las partes del sistema

Consideremos una partícula moviéndose a lo largo del eje x bajo la acción de una fuera conservativa, donde la curva energía potencial como función de la posición de la partícula toma la forma de la figura



De nuevo $F_x = -\dfrac{dU}{dx} = 0$ **en** $x = 0$ **así que la partícula está en equilibrio en ese punto**

Si colocamos el bloque en reposo en la posición de equilibrio (x=0), punto en el que la fuerza se anula, permanecerá allí a no ser que una fuerza externa actúe sobre él.

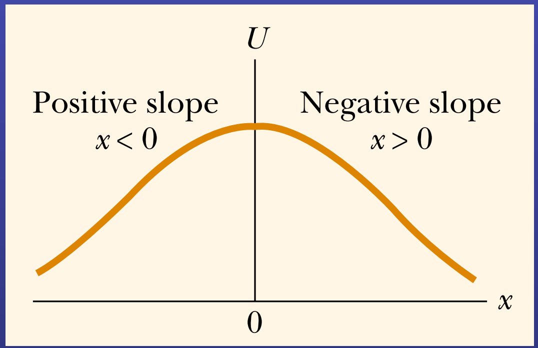
Si la fuerza externa desplaza la partícula hacia la izquierda:

- $x < 0$
- **la pendiente** dU/dx **es positiva**
- **la fuerza** $F_x = -dU/dx$ **es negativa**
- **la partícula acelera alejándose de** $x = 0$

Diagramas de energía: puntos de equilibrio inestable

Muy frecuentemente podemos entender cualitativamente el movimiento de un sistema a través de un gráfico de la energía potencial como función de la posición de una de las partes del sistema

Consideremos una partícula moviéndose a lo largo del eje x bajo la acción de una fuera conservativa, donde la curva energía potencial como función de la posición de la partícula toma la forma de la figura



De nuevo $F_x = -\dfrac{dU}{dx} = 0$ **en** $x = 0$ **así que la partícula está en equilibrio en ese punto**

La posición $x = 0$ es una posición de equilibrio inestable

La configuración de equilibrio inestable se corresponde a un máximo de la energía potencial.

Principio de conservación de la energía cuando actúan fuerzas conservativas

Consideremos un sistema en el cuál el trabajo se realiza sobre una de las partículas.
Si una fuerza conservativa es la única que realiza trabajo sobre la partícula, este trabajo es igual a:

- **- la disminución de la energía potencial del sistema**
- **- al incremento de la energía cinética de la partícula**

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta U = \Delta K$$

$$\Delta U + \Delta K = \Delta (K + U) = 0$$

La suma de las energía cinética y potencial del sistema recibe el nombre de energía mecánica total

$$E = K + U = \text{constante}$$

Principio de conservación de la energía cuando actúan fuerzas conservativas y fuerzas no conservativas

El trabajo total será la suma de los trabajos asociados a las fuerzas conservativas y a las fuerzas no conservativas

$$W_T = W_{con} + W_{nocon}$$

Como sabemos que:

$$W_T = \Delta K$$

$$W_{con} = -\Delta U$$

$$\Delta K = -\Delta U + W_{nocon}$$

$$K_f - K_i = -(U_f - U_i) + W_{nocon} \rightarrow K_f + U_f = K_i + U_i + W_{nocon}$$

$$E_f = E_i + W_{nocon}$$

El trabajo realizado por todas las fuerzas no conservativas es igual al cambio en la energía mecánica total del sistema

Principio de conservación de la energía cuando actúan fuerzas conservativas y fuerzas no conservativas

El trabajo realizado por todas las fuerzas no conservativas es igual al cambio en la energía mecánica total del sistema

$$E_f = E_i + W_{nocon}$$

En los sistemas reales actúan fuerzas no conservativas.
Por ejemplo, el rozamiento, que produce un trabajo de valor menor que cero.

$$\text{si } \; W_{con} < 0 \rightarrow E \; \text{ disminuye}$$

Globalmente, aunque la energía mecánica del sistema disminuye, la energía total permanece constante: la energía mecánica se transforma en algún otro tipo de energía, generalmente térmica.