CINEMÁTICA:
MOVIMIENTO TRIDIMENSIONAL,
DATOS EN FUNCIÓN DEL TIEMPO.

Una cucaracha sobre una mesa se arrastra con una aceleración constante dada por: $\vec{a} = \left(0.3\hat{\imath} - 0.2\hat{\jmath}\right)\,\mathrm{cm/s^2}$. Esta sale desde un punto (–4, 2) cm en t = 0 con velocidad $\vec{v}_0 = 1.0\,\hat{\jmath}\,\mathrm{cm/s}$. ¿Cuáles son las componentes de sus vectores de posición y velocidad en cualquier instante del tiempo?

Solución: I.T.T. 95

Texto solución

Un pescado nada sobre un plano horizontal y tiene una velocidad $\vec{v}_0 = \left(4\hat{\imath} + \hat{\jmath}\right)\,\mathrm{m/s}$ en un punto en el océano cuya posición respecto a una roca es $\vec{r}_0 = \left(10\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}\right)\,\mathrm{m}$. Después de nadar con aceleración constante durante 20.0 s su velocidad es de $\vec{v} = \left(20\hat{\imath} - 5\hat{\jmath}\right)\,\mathrm{m/s}$. a) ¿Cuáles son las componentes de la aceleración? b) ¿En donde se encuentra el pescado en t = 25 s?

Solución: I.T.T. 95

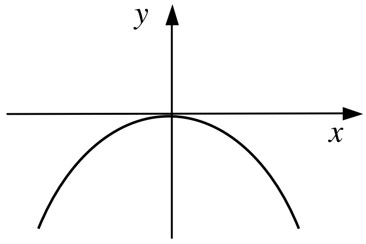
Texto solución

El vector de posición del punto A varía en función del tiempo t según la ley: $\vec{r} = \alpha t\hat{\imath} - \beta t^2\hat{\jmath}$, donde α y β son constantes positivas. Hallar: a) la ecuación de la trayectoria del punto $y(x)$, representarla gráficamente, b) la velocidad, aceleración y sus módulos en función del tiempo, c) la dependencia del ángulo θ entre los vectores velocidad y aceleración en función del tiempo, d) la velocidad media en los primeros t segundos del movimiento.

Solución: I.T.T. 97, 03

a) Despejando el tiempo en la expresión de $x(t)$ y sustituyendo en la de $y(t)$ tenemos la ecuación de la trayectoria:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = \alpha t \\ y(t) = -\beta t^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = -\left(\frac{\beta}{\alpha^2}\right)x^2}$$

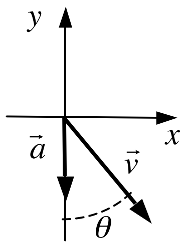


Se trata de una trayectoria parabólica.

b) Derivando sucesivamente la posición obtenemos la velocidad y la aceleración:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \alpha\,\hat{i} - 2\beta t\,\hat{j} \quad , \quad v(t) = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2} \\ \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2\beta\,\hat{j} \quad , \quad a(t) = 2\beta}$$

c) Como la aceleración está dirigida a lo largo del eje Y y con sentido negativo, el ángulo que formará con la velocidad vendrá dado por:



$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{v_x}{-v_y} = \boxed{\frac{\alpha}{2\beta t}}$$

d) El vector velocidad media en los primeros t segundos vendrá dado por:

$$\vec{v}_m(t) = \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(0)}{t} = \boxed{\alpha\,\hat{i} - \beta t\,\hat{j}}$$

Un punto se mueve en el plano XY según la ley $x = b\,\mathrm{sen}(\omega t)$, $y = b[1 - \cos(\omega t)]$ donde b y ω son constantes positivas. Hallar: a) la distancia s recorrida por el punto durante un tiempo τ, b) el ángulo entre la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

Solución: I.T.T. 97, 03

a) Derivando la posición obtenemos la velocidad:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = b\omega\cos(\omega t)\,\hat{i} + b\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)\,\hat{j} \quad \Rightarrow \quad v(t) = b\omega$$

Al ser constante el módulo de la velocidad tenemos que la distancia s que nos piden será:

$$s = \int_0^\tau v\,dt = \boxed{b\omega\tau}$$

b) Al ser constante el módulo de la velocidad tenemos que no hay aceleración tangencial, con lo que la aceleración tiene en todo momento dirección normal a la trayectoria:

$$\boxed{\vec{v}(t) \perp \vec{a}(t)}$$

Un punto se mueve en un plano de modo que sus aceleraciones tangencial y normal son $a_t = \alpha$ y $a_n = \beta t^4$ siendo α y β constantes positivas. En el momento $t = 0$ el punto se encontraba en reposo. Determinar en función del recorrido s: a) el radio R de curvatura de la trayectoria del punto, b) su aceleración a.

Solución: I.T.T. 97, 03

a) A partir de la aceleración tangencial podemos sacar información sobre el módulo de la velocidad y el recorrido s en función del tiempo:

$$a_t = \alpha \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} v = \int_0^t a_t \, dt = \alpha t \\ s = \int_0^t v \, dt = \frac{1}{2} \alpha t^2 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2 s \alpha}$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión de la aceleración normal:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \beta t^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{(2 s \alpha)}{R} = \beta \left(\frac{2s}{\alpha} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{\alpha^3}{2 s \beta}}$$

b) El módulo de la aceleración vendrá dado por:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\alpha^2 + \left(\beta t^4 \right)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{4 \beta s^2}{\alpha^2} \right)^2} = \boxed{\alpha \sqrt{1 + \frac{16 \beta^2 s^4}{\alpha^6}}}$$

Una partícula localizada inicialmente en el origen tiene una aceleración de $\vec{a} = 3\hat{j}$ m/s^2 y una velocidad inicial de $\vec{v}_0 = 5\hat{i}$ m/s. Halle: a) el vector de posición y la velocidad en cualquier tiempo t y b) las coordenadas y la rapidez de la partícula en $t = 2$ s.

Solución: I.T.T. 92, 96, 98, 00

Texto solución

Un cuerpo se desplaza a lo largo de una curva plana de modo que sus coordenadas rectangulares, como función del tiempo, están dadas por $x = 2t^3 - 3t^2$, $y = t^2 - 2t + 1$. Suponiendo que t está dado en s, y las coordenadas en m, calcule: a) la posición del cuerpo cuando t = 1s, b) las componentes de la velocidad en cualquier instante, c) el módulo de la velocidad en t = 1s, d) la velocidad en t = 0, e) los tiempos cuando la velocidad es cero, f) la aceleración en cualquier instante, g) la aceleración cuando t = 0, h) los tiempos en que la aceleración es paralela al eje Y.

Solución: I.T.I. 95, 00, 01, 04, I.T.T. 01, 04

a) Sustituyendo en las expresiones que nos dan: $\boxed{x(1) = -1, \quad y(1) = 0}$

b) Derivando: $v_x = \frac{dx}{dt} = \boxed{6t^2 - 6t}$ $\quad v_y = \frac{dy}{dt} = \boxed{2t - 2}$

c) $v_x(1) = 0, \; v_y(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 0}$

d) $v_x(0) = 0, \; v_y(0) = -2 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v} = -2\hat{j}}$

e) Llamemos t_a al instante en que la velocidad se anula, entonces:

$$v_x(t_a) = 0, \; v_y(t_a) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6t_a^2 - 6t_a = 0, \; 2t_a - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_a = 1}$$

f) Derivando la velocidad: $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \boxed{12t - 6}$ $\quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \boxed{2}$

g) $a_x(0) = -6, \; a_y(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a} = \left(-6\hat{i} + 2\hat{j}\right)}$

h) Llamemos t_b al instante en que la aceleración es paralela al eje Y, entonces:

$$a_x(t_b) = 0 \quad \Rightarrow \quad 12t_b - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_b = \frac{1}{2}}$$

(Como se indica en el enunciado las unidades utilizadas en el problema son las del S.I.)

Un punto se mueve partiendo del origen de coordenadas con una aceleración $\vec{a} = \hat{j} + 2t\hat{k}$ y una velocidad inicial $\vec{v}_0 = 3\hat{i}$, ambas medidas en el S.I. Calcular: a) el vector de posición del punto en función del tiempo, b) la velocidad y la aceleración en t = 2s, c) las aceleraciones normal y tangencial en ese instante así como el radio de curvatura.

Solución: I.T.I. 00

Texto solución

Un punto se mueve según la trayectoria $xy = 4$, siguiendo la ley horaria $x = 2t$. Calcular las componentes cartesianas de la velocidad y la aceleración.

Solución: I.T.I. 00

Texto solución

El mov. tridimensional de una partícula viene dado por: $\vec{r} = c\,t\hat{i} + R\,\mathrm{sen}(\omega t)\,\hat{j} + R\cos(\omega t)\,\hat{k}$ donde c, R y ω son constantes. Calcular los módulos de la velocidad y la aceleración de la partícula. ¿Qué tipo de movimiento está realizando la partícula?

Solución: I.T.I. 97, 00

Texto solución

Una partícula se mueve según una trayectoria elíptica definida por el vector de posición: $\vec{r} = A\cos(\omega t)\,\hat{i} + B\,\mathrm{sen}(\omega t)\,\hat{j}$. Demostrar que la aceleración está dirigida hacia el origen y que es proporcional a la distancia de la partícula al origen.

Solución: I.T.I. 98

Texto solución

Una partícula se mueve en el espacio con una velocidad $\vec{v} = e^t\,\hat{i} + c\,t^2\,\hat{j} - \frac{1}{3}t^3\,\hat{k}$, siendo c una constante. Calcular: a) el vector de la posición de la partícula en función de t, sabiendo que en el instante $t_0 = 0$, la partícula se encuentra en el punto (0, 0, 1), b) el radio de curvatura de la trayectoria en el momento $t_0 = 0$, c) el valor de la constante c para que la trayectoria sea plana.

Solución: I.T.I. 99, 02, 05, I.T.T. 99, 02, 05

a) Con las condiciones iniciales que nos dan la ecuación de la posición con el tiempo será:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \int_0^t \vec{v}(t)\,dt = (0,0,1) + \left[\left(e^t, \frac{1}{3}c\,t^3, -\frac{1}{12}t^4\right)\right]_0^t = \boxed{\left(e^t - 1, \frac{1}{3}c\,t^3, 1 - \frac{1}{12}t^4\right)}$$

b) Si calculamos la aceleración:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(e^t, 2ct, -t^2\right)$$

En $t_0 = 0$ tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}(t_0) = (1,0,0) \\ \vec{v}(t_0) = (1,0,0) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}(t_0) \parallel \vec{v}(t_0) \quad \Rightarrow \quad \vec{a}(t_0) \text{ tangente a la trayectoria}$$

$$\Rightarrow \quad a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{curvatura} = \infty}$$

c) Una solución fácil de ver es hacer $c = 0$ con lo cual la velocidad sólo tendría componentes x y z, y la trayectoria se desarrollaría en el plano XZ.

Una partícula parte del origen en el tiempo $t_0 = 0$ con una velocidad de 6 m/s en la dirección OY positiva. Su aceleración viene dada por $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ (m/s^2). En el instante en que alcanza su máxima altura hallar: a) la velocidad de la partícula, b) sus coordenadas (x, y).

Solución: I.T.I. 92, 97, 99, 02, 05, I.T.T. 96, 99, 00, 02, 05

Calculemos su velocidad y posición en función de t:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(t)\,dt = (0,6,0) + \int_0^t (2,-3,0)\,dt = (2t, 6-3t, 0)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t)\,dt = (0,0,0) + \int_0^t (2t, 6-3t, 0)\,dt = \left(t^2, 6t - \frac{3}{2}t^2, 0\right)$$

En el momento en que alcanza su máxima altura:

$$v_y\left(t_{máx.altura}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad 6-3t_{máx.altura}=0 \quad \Rightarrow \quad t_{máx.altura}=2\text{ s}$$

a) La velocidad en dicho instante será:

$$\vec{v}\left(t_{máx.altura}\right)=\left(2t_{máx.altura},6-3t_{máx.altura},0\right)=\boxed{\left(4,0,0\right)}$$

b) La posición en dicho instante será:

$$\vec{r}\left(t_{máx.altura}\right)=\left(t^2_{máx.altura},6t_{máx.altura}-\frac{3}{2}t^2_{máx.altura},0\right)=\boxed{\left(4,6,0\right)}$$

Una partícula se mueve en el plano XY de acuerdo con la ley $a_x=-4\,\text{sen}(t)$, $a_y=3\cos(t)$. Si cuando $t=0$, $x=0$, $y=3\text{m}$, $v_{x,0}=4\text{ms}^{-1}$, $v_{y,0}=0$, encontrar la ecuación de la trayectoria. Determine la velocidad cuando $t=\left(\frac{\pi}{4}\right)$ s.

Solución: **I.T.I. 93, 96, 01, 04, I.T.T. 01**

Integrando las aceleraciones:

$$v_x(t)=v_{x,0}+\int_{t_0}^{t}a_x dt=4+\int_0^t -4\,\text{sen}(t)\,dt=4\cos(t)$$

$$v_y(t)=v_{y,0}+\int_{t_0}^{t}a_y dt=0+\int_0^t 3\cos(t)\,dt=3\,\text{sen}(t)$$

Cuando $t=\left(\frac{\pi}{4}\right)$ s:

$$v_x\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\boxed{2\sqrt{2}} \qquad v_y\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\boxed{\frac{3}{2}\sqrt{2}}$$

Integrando la velocidad:

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}v_x dt=0+\int_0^t 4\cos(t)\,dt=4\,\text{sen}(t)$$

$$y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}v_y dt=3+\int_0^t 3\,\text{sen}(t)\,dt=6-3\cos(t)$$

Para calcular la trayectoria (ecuación que relaciona x con y) hay que eliminar el parámetro t en las expresiones anteriores. Despejando las funciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(t) = \frac{x}{4} \qquad \cos(t) = \frac{6-y}{3}$$

Teniendo en cuenta que $\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) = 1$

$$\boxed{\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y-6}{3}\right)^2 = 1}$$

Se trata de una elipse con centro en el punto (0, 6) y con semieje x igual 4 y semieje y igual a 3.

(Las unidades utilizadas en el problema son las del S.I.)

Un cuerpo se desliza a lo largo de una curva plana de modo que sus coordenadas rectangulares están dadas por: $x(t) = 2t^3 - 3t^2$, $y(t) = t^2 - 2t + 1$ (t en s y x, y en m). Calcule: a) la posición del cuerpo cuando t = 1 s, b) las componentes de la velocidad en cualquier instante, c) el módulo de la velocidad en t = 1 s, d) la velocidad en t = 0, e) los tiempos en los que la velocidad se anula, f) la aceleración en cualquier instante del tiempo, g) la aceleración cuando t = 0, h) los tiempos en los que la aceleración es paralela al eje Y.

Solución: I.T.I. 96

Texto solución

Un ave vuela en el plano XY con una velocidad $\vec{v} = \left(2.1 - 2.8t^2\right)\hat{i} + 5t\,\hat{j}$ medida en el S.I. y la dirección $+Y$ es vertical hacia arriba. En t = 0 el ave esta en el origen. a) Calcular los vectores de posición y aceleración en función del tiempo. b) ¿Qué altura tiene el ave al pasar volando sobre el origen de coordenadas?

Solución: I.T.I. 03, I.T.T. 04

a) La posición de la partícula vendrá dada por:

$$\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v}(t)\,dt = \int_0^t \left[\left(2.1 - 2.8t^2\right)\hat{i} + 5t\,\hat{j}\right]dt = \boxed{\left(2.1t - \frac{2.8}{3}t^3\right)\hat{i} + 2.5t^2\,\hat{j}}$$

La aceleración la obtendremos derivando:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \boxed{-5.6t\,\hat{i} + 5\,\hat{j}}$$

b) Llamemos a ese momento t_1, si sobrevuela el origen de coordenadas:

$$x(t_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2.1t_1 - \frac{2.8}{3}t_1^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 1.5$$

En ese momento su altura será:

$$y(t_1) = 2.5t_1^2 = \boxed{5.6\text{ m}}$$

Un punto se mueve en el plano XY de manera que $\vec{v} = 4t\left[\left(1+t^2\right)\hat{\imath} + \hat{\jmath}\right]$. Si la posición es (1, 2) cuando $t = 0$ encontrar la ecuación cartesiana de la trayectoria.

Solución: **I.T.I. 93, 03, I.T.T. 04**

La posición del punto en cualquier instante vendrá dada por:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t)dt = \left(\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}\right) + \int_0^t 4t\left[\left(1+t^2\right)\hat{\imath} + \hat{\jmath}\right]dt = \left[\left(1+2t^2+t^4\right)\hat{\imath} + \left(2+2t^2\right)\hat{\jmath}\right]$$

para cada componente tenemos que:

$$x(t) = 1 + 2t^2 + t^4 \quad , \quad y(t) = 2 + 2t^2$$

Despejando el tiempo en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera:

$$\boxed{x(y) = \frac{y^2}{4}}$$

Se trata por lo tanto de una parábola abierta a lo largo del eje X positivo y que tiene su vértice en el origen.