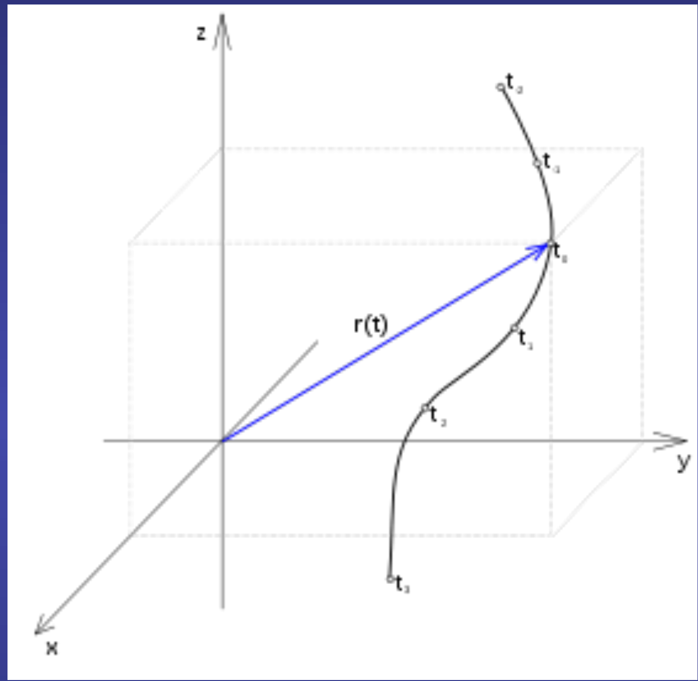
Cinemática de la partícula



Javier Junquera

Bibliografía

FUENTE PRINCIPAL

Física, Volumen 1, 3° edición

Raymod A. Serway y John W. Jewett, Jr.

Ed. Thomson

ISBN: 84-9732-168-5

Capítulos 2 y 3

Física para Ciencias e Ingeniería, Volumen 1, 7° edición

Raymod A. Serway y John W. Jewett, Jr.

Cengage Learning

ISBN 978-970-686-822-0

Capítulos 2 y 4

Física, Volumen 1

R. P. Feynman, R. B. Leighton, y M. Sands

Ed. Pearson Eduación

ISBN: 968-444-350-1

Capítulo 8

Definición de dinámica y cinemática

Dinámica:

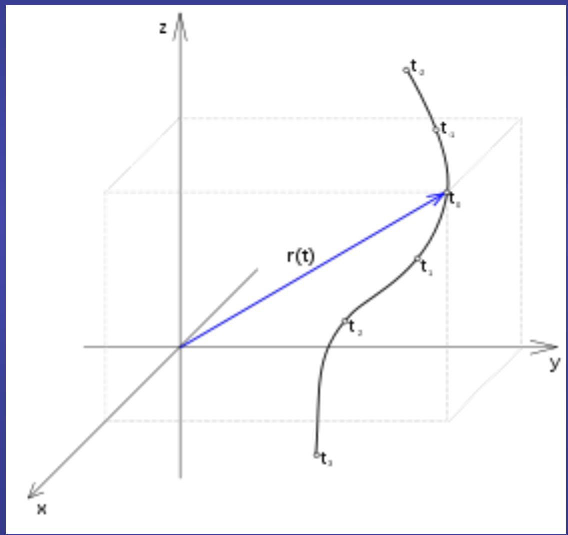
Estudio del movimiento de un objeto, y de las relaciones de este movimiento con conceptos físicos tales como la fuerza y la masa.

Cinemática:

Estudio del movimiento, usando los conceptos de espacio y tiempo, sin tener en cuenta las causas que lo producen.

Definición de vector posición y desplazamiento

Posición de una partícula se describe con un **vector** posición $\vec{r}$, que dibujamos desde el origen de un **sistema de referencia** hasta la ubicación de la partícula.



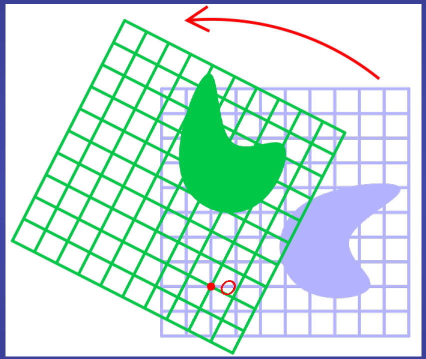
Desplazamiento es el **cambio** del **vector de posición** de un objeto.

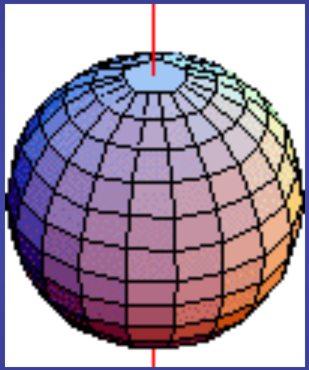
El desplazamiento es una magnitud relativa: depende del sistema de referencia escogido

Definición de traslación, rotación y vibración

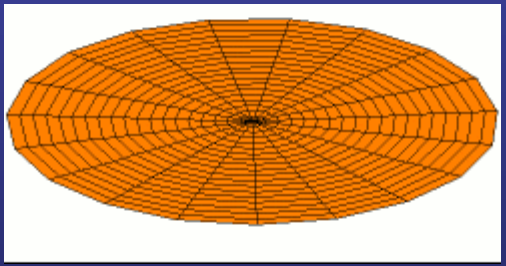
Traslación: las posiciones de todas las partículas del cuerpo se desplazan una misma cantidad.

Rotación: el movimiento de cambio de orientación de un sólido extenso de forma que, dado un punto cualquiera del mismo, este permanece a una distancia constante de un punto fijo.





Vibración: oscilación en torno a una posición de equilibrio



Definición de velocidad y celeridad

Velocidad: cambio de la posición de un objeto por unidad de tiempo

Magnitud vectorial (tiene módulo, una dirección y sentido)

Celeridad: módulo del vector velocidad en un instante concreto

(módulo de la velocidad instantánea).

(al ser un módulo, su valor es siempre positivo).

Definición de celeridad media

Para una partícula que recorre una distancia d en un intervalo de tiempo Δt , su celeridad media se define como

$$\overline{v} = \frac{d}{\Delta t}$$

La celeridad media no es un vector, no lleva asociada una dirección.
Unidades: (espacio/tiempo)

Definición de velocidad media de una partícula (una dimensión)

Movimiento de una partícula queda totalmente especificado si conocemos su posición en el espacio en todo instante

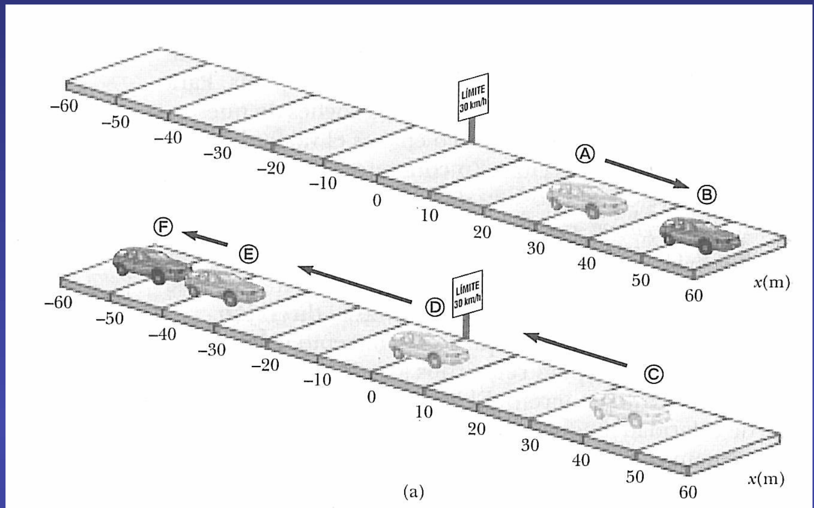
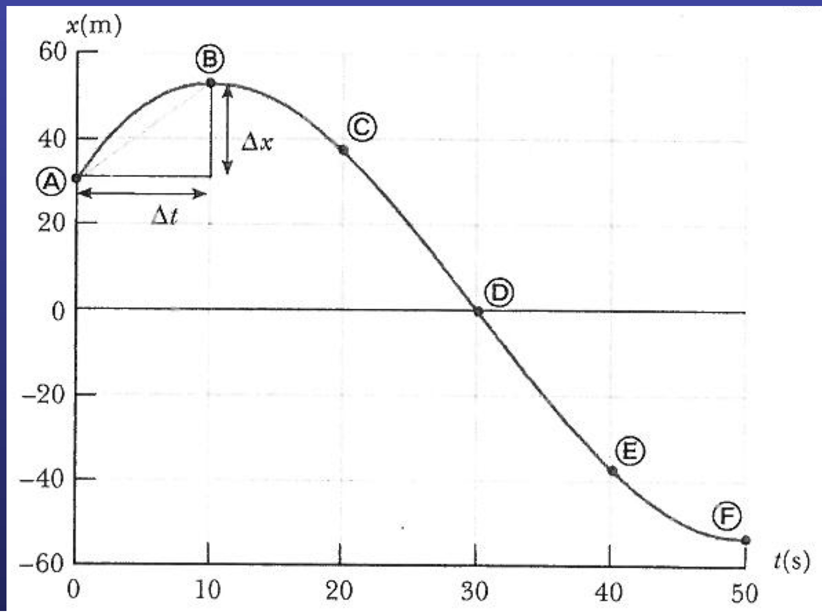


TABLA 2.1

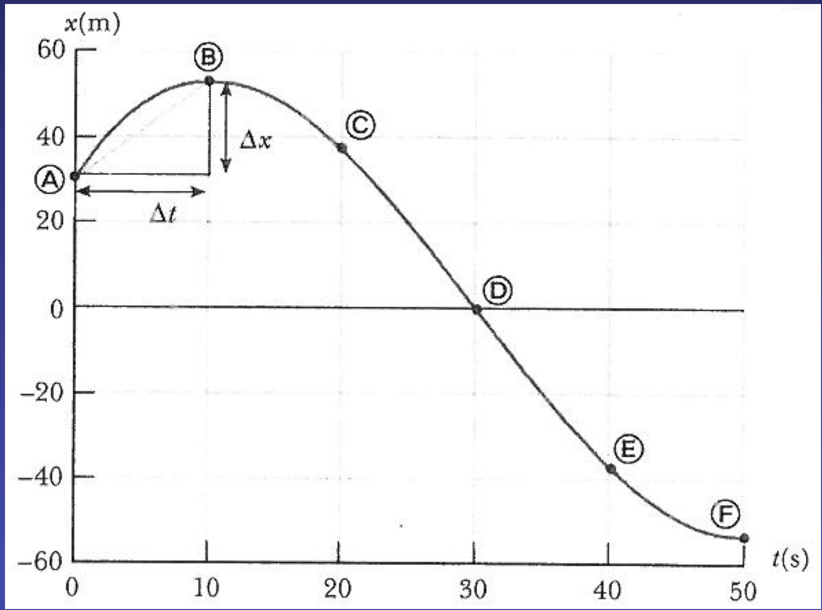
Posición del coche en varios instantes de tiempo

Posición	t (s)	x (m)
A	0	30
B	10	52
C	20	38
D	30	0
E	40	− 37
F	50	− 53



Gráfica de posición-tiempo o gráfica de posición como función del tiempo

Definición de velocidad media de una partícula (una dimensión)



Gráfica de posición-tiempo o gráfica de posición como función del tiempo

En el intervalo de tiempo

$$\Delta t = t_f - t_i$$

El desplazamiento de la partícula se describe como

$$\Delta \vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i = (x_f - x_i)\vec{i}$$

Velocidad media

$$\overline{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

Propiedades de la velocidad media de una partícula (1D)

Velocidad media

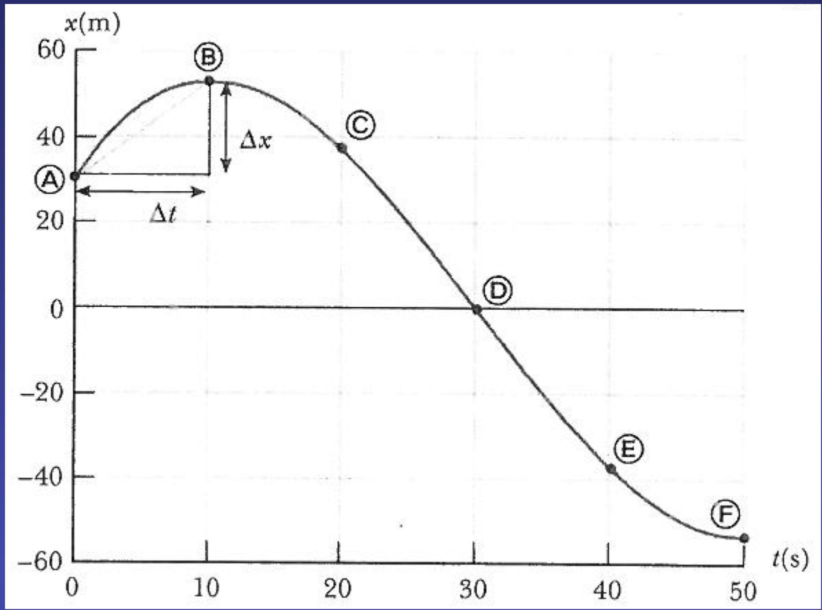
$$\overline{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

Es independiente del recorrido que siga la partícula entre los dos puntos (es proporcional al desplazamiento que sólo depende de las posiciones inicial y final)

El módulo de la velocidad media no es la celeridad media

$$\text{celeridad media} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} \qquad \text{velocidad media} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}}$$

nterpetración gráfica de la velocidad media de una partícula



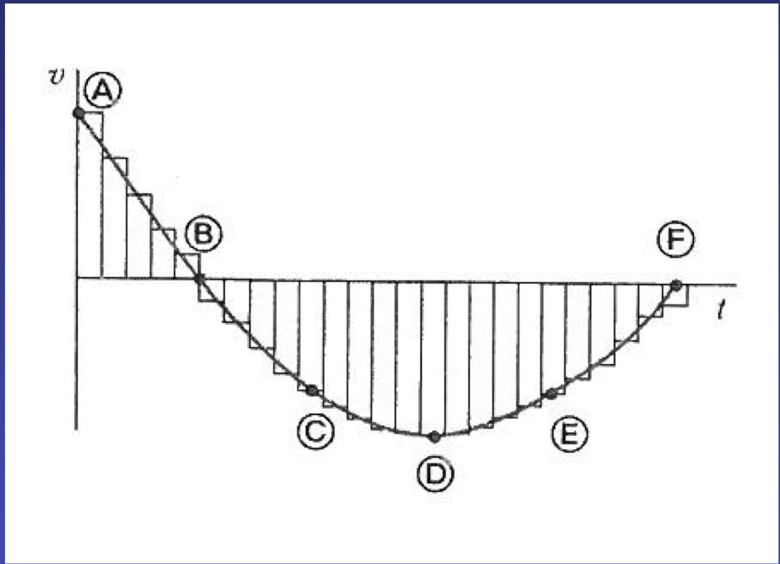
Gráfica de posición-tiempo o gráfica de posición como función del tiempo

Velocidad media

$$\overline{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

La velocidad media de la partícula durante el intervalo de tiempo que va desde t_i hasta t_f es igual a la pendiente de la línea recta que une los puntos incial y final en la gráfica posición-tiempo

nterpetración gráfica de la velocidad media de una partícula



Gráfica velocidad en función del tiempo

Dividimos el intervalo de tiempo en pequeños incrementos de duración Δt_n

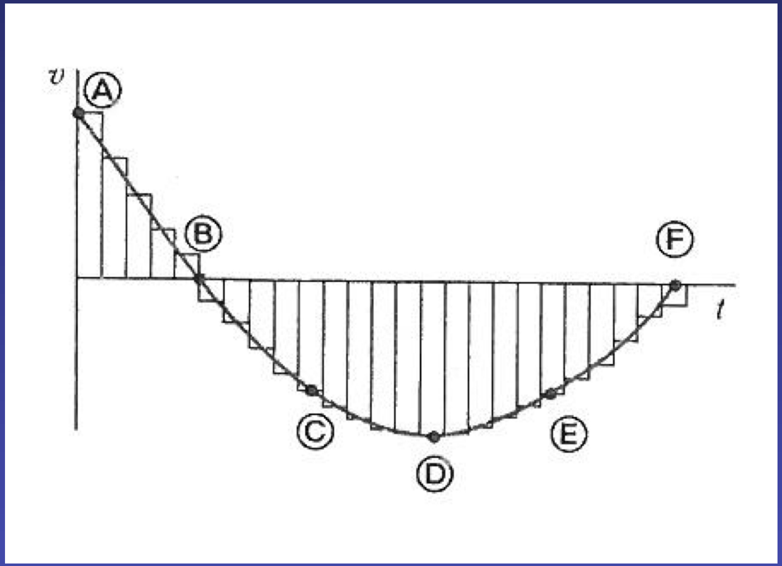
Asumimos que la velocidad es constante durante cada uno de esos pequeños incrementos

Desplazamiento en cada uno de esos pequeños incrementos $\Delta x_n = v_n \Delta t_n$

Desplazamiento total $$\Delta x \approx \sum_n \Delta x_n = \sum_n v_n \Delta t_n$$

Área de uno de los rectángulos estrechos

nterpetración gráfica de la velocidad media de una partícula



Gráfica velocidad en función del tiempo

Desplazamiento total

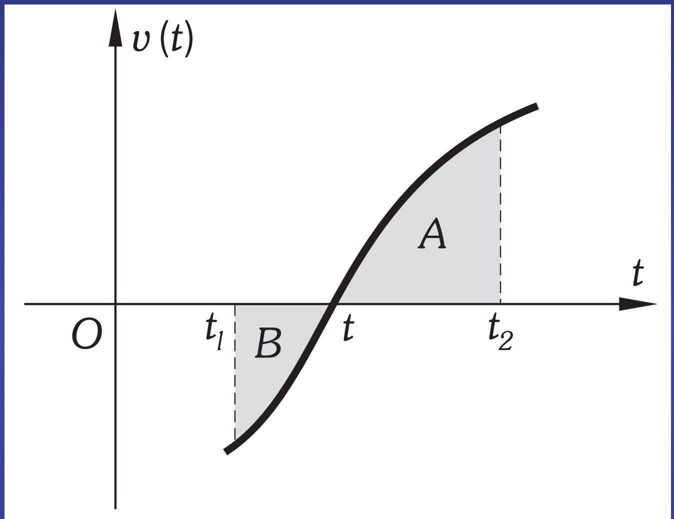
$$\Delta x \approx \sum_n \Delta x_n = \sum_n v_n \Delta t_n$$

Tomando límites

$$\Delta x = \lim_{\Delta t_n \to 0} \sum_n \Delta x_n = \lim_{\Delta t_n \to 0} \sum_n v_n \Delta t_n$$

El desplazamiento de una partícula durante el intervalo de tiempo que va desde t_i hasta t_f es igual al área situada bajo la curva entre los puntos inicial y final en la gráfica velocidad-tiempo

nterpetración gráfica de la velocidad media de una partícula



Si existen valores negativos de la velocidad en algún intervalo, para calcular el desplazamiento tenemos que tomar el área por debajo del eje de las x como negativa

$$x(t_2) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = x(t_1) + A - B$$

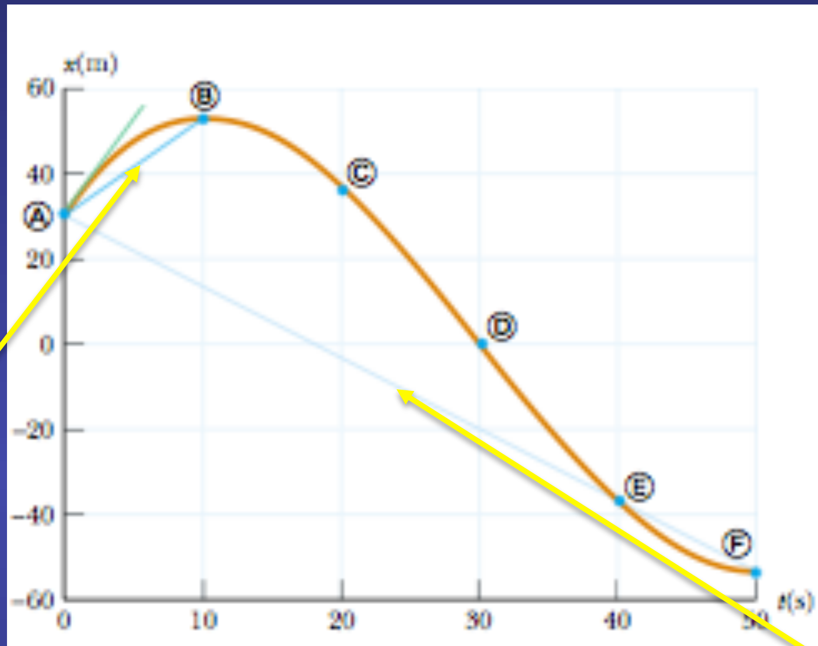
El área total A+B es el espacio total recorrido por la partícula

$$s = A + B = |\int_{t_1}^{t'} v(t)dt| + |\int_{t'}^{t_2} v(t)dt|$$

$$t' \Rightarrow v(t') = 0$$

Física General
S. Burbano, E. Burbano, y C. Gracia
Editorial Tébar

Transición de velocidad media a velocidad instantánea

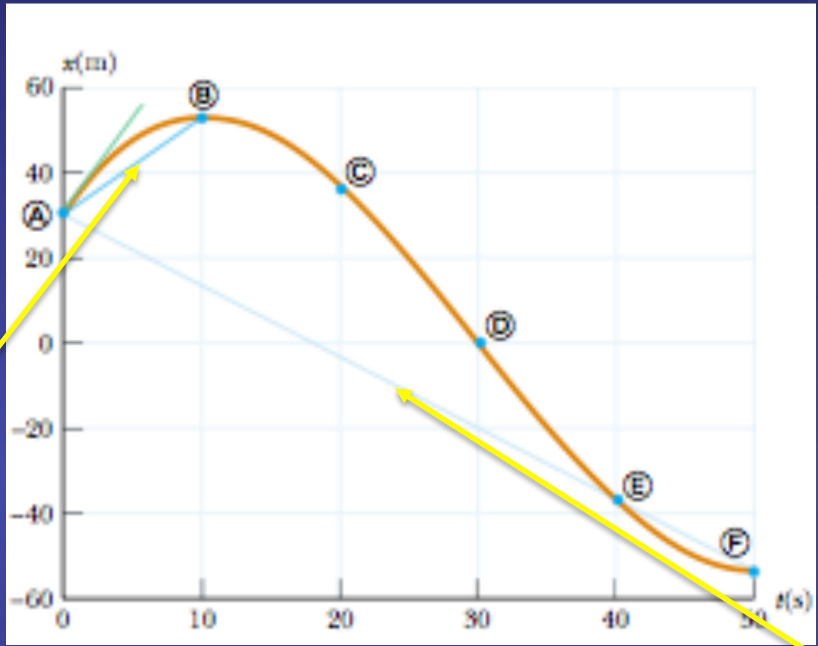


Velocidad media calculada en el intervalo que va desde A hasta B

Velocidad media calculada en el intervalo que va desde A hasta F

¿Cuál de estas dos líneas representa mejor la velocidad instantánea en el puno A?

Transición de velocidad media a velocidad (una dimensión)



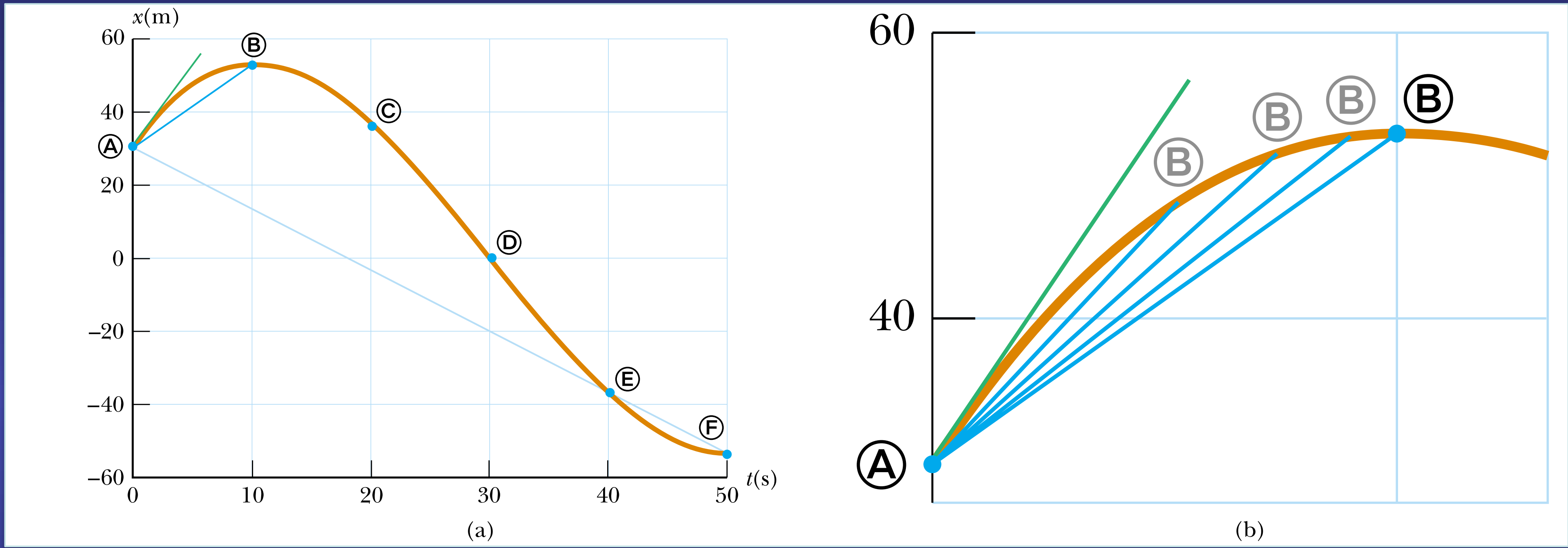
Velocidad media calculada en el intervalo que va desde A hasta B

Velocidad media calculada en el intervalo que va desde A hasta F

Pendiente positiva
(al menos el signo está bien)

Pendiente negativa => Velocidad media negativa
(contrario al sentido de la velocidad en el punto A, en el que el coche se mueve hacia la derecha)

Velocidad instantánea de una partícula (una dimensión)

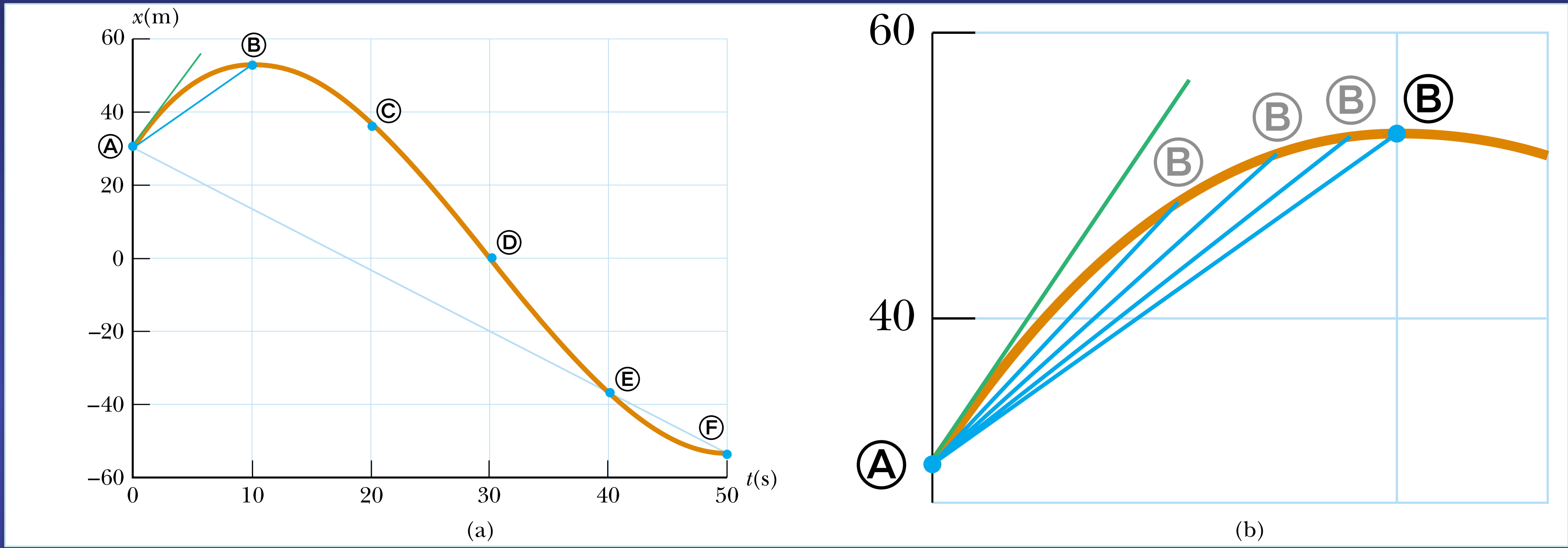


¿Cómo cambia la velocidad media del coche a medida que el punto B se aproxima al A?

La línea azul se aproxima a la línea verde (tangente a la curva en el punto A)

La pendiente de esta línea tangente representa la velocidad del coche justo en el momento en el cuál comenzamos a tomar los datos (punto A).

Velocidad instantánea de una partícula (una dimensión)



Velocidad instantánea de una partícula en una dimensión

$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

La velocidad instantánea puede ser positiva, negativa o cero

Velocidad instantánea de una partícula (una dimensión)

La celeridad instantánea de una partícula se define como el módulo del vector velocidad instantánea

La celeridad instantánea siempre es positiva

La celeridad instantánea no tiene dirección asociada y, por lo tanto, no tiene signo algebraico

Modelo analítico para el movimiento rectilíneo y uniforme

Si la velocidad de la partícula es constante, su velocidad instantánea en cualquier momento de un determinado intervalo de tiempo es igual a la velocidad media en dicho intervalo

$$v_x = \overline{v}_x$$

$$a_x = 0$$

Si ahora tomamos la definición de velocidad media

$$v_x = \overline{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \longrightarrow \Delta x = x_f - x_i = v_x \Delta t$$

$$x_f = x_i + v_x \Delta t$$

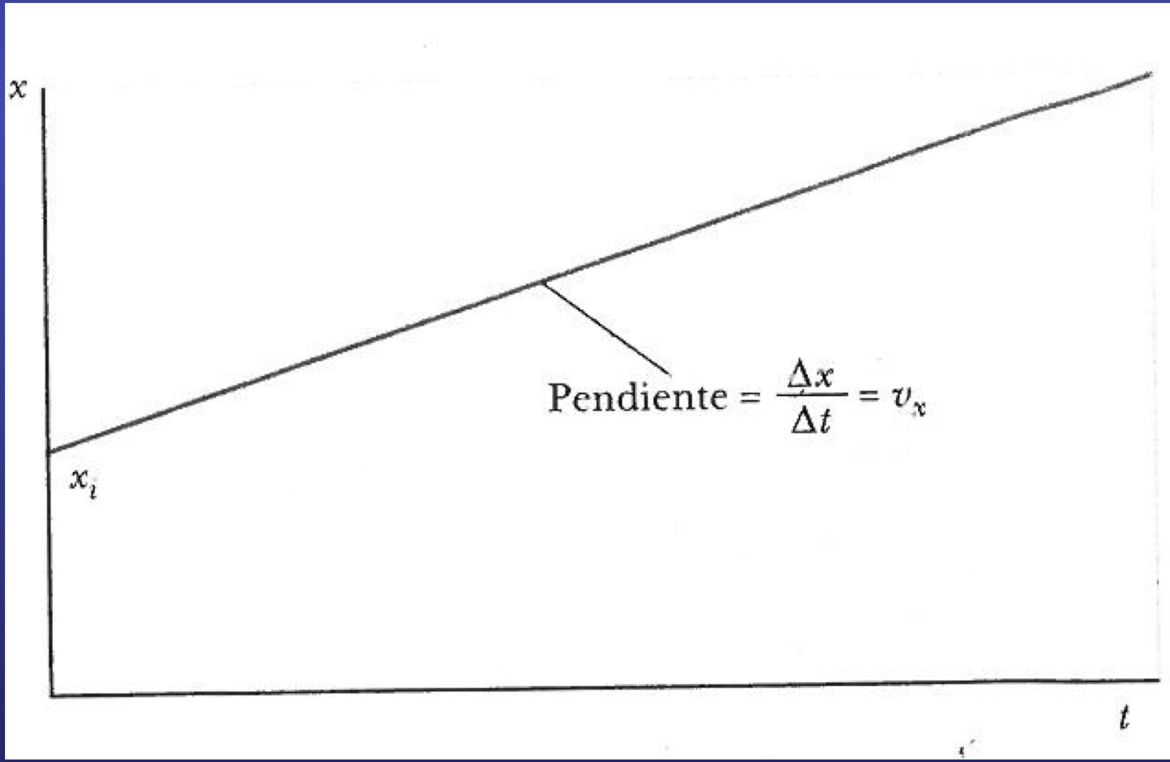
Si $t_i = 0$ **y** $t_f = t$

$$x_f = x_i + v_x t \qquad (\text{para } \; v_x \; \text{ constante})$$

Representación gráfica para el movimiento rectilíneo y uniforme

Si $t_i = 0$ **y** $t_f = t$

$$x_f = x_i + v_x t \qquad \text{(para } v_x \text{ constante)}$$



Definición de aceleración

Cuando la velocidad de una partícula varía con el tiempo, se dice que está sometida a una aceleración.

La velocidad es una magnitud vectorial, que tiene un módulo, una dirección y un sentido

Por lo tanto, el cambio en la velocidad, puede ser un cambio en:

1. En el módulo (ejemplo, al pisar el acelerador o el freno)
2. En la dirección o el sentido (ejemplo, al girar el volante)

Definición de aceleración media en 1D

Supongamos una partícula que se mueve a lo largo del eje x varía su velocidad

Instante	**Velocidad**
t_i	v_{xi}
t_f	v_{xf}
$\Delta t = t_f - t_i$	$\Delta v_x = v_{xf} - v_{xi}$

Aceleración media

$$\overline{a}_x \equiv \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$$

El módulo de la aceleración tiene dimensiones de longitud/tiempo^2

Definición de aceleración instantánea en 1D

En algunas situaciones, la aceleración media puede ser diferente para diferentes intervalos de tiempo.

Entonces es conveniente definir la aceleración instantánea.

$$a_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}$$

Pendiente de la gráfica velocidad con respecto del tiempo

También puede definirse como la derivada segunda del espacio con respecto al tiempo

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Modelo analítico para el movimiento rectilíneo, uniformemente acelerado

Si la aceleración de la partícula es constante, su aceleración instantánea en cualquier momento de un determinado intervalo de tiempo es igual a la aceleración media en dicho intervalo

$$\bar{a}_x = a_x$$

Si ahora tomamos la definición de aceleración media

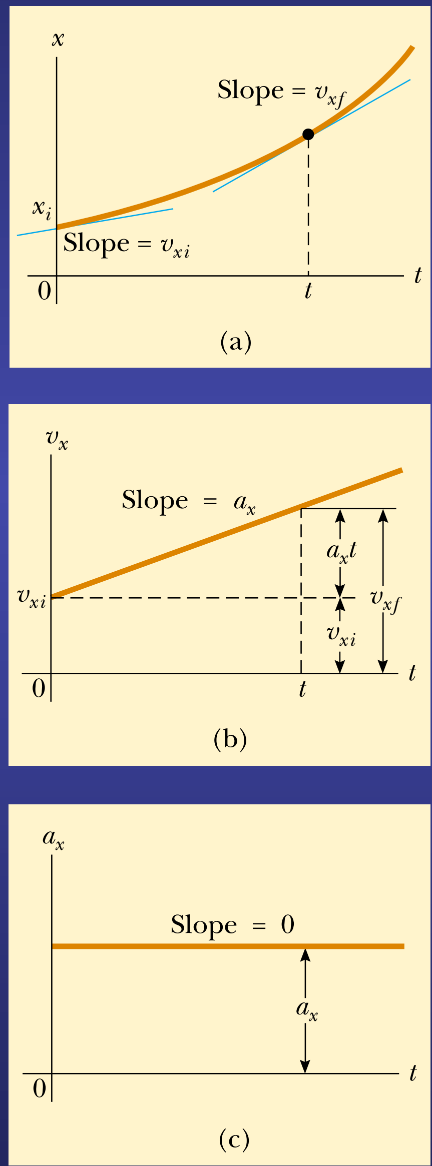
$$a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i}$$

Si $t_i = 0$ **y** $t_f = t$

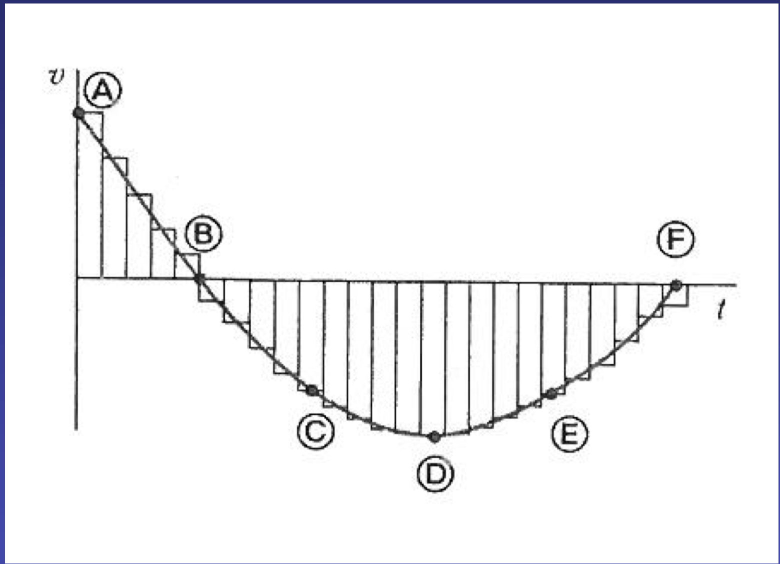
$$a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t}$$

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t \qquad \text{(para } a_x \text{ constante)}$$

Representación gráfica para el movimiento rectilíneo y uniformememente acelerado



nterpetración gráfica de la velocidad media de una partícula



Gráfica velocidad en función del tiempo

Desplazamiento total

$$\Delta x \approx \sum_n \Delta x_n = \sum_n v_n \Delta t_n$$

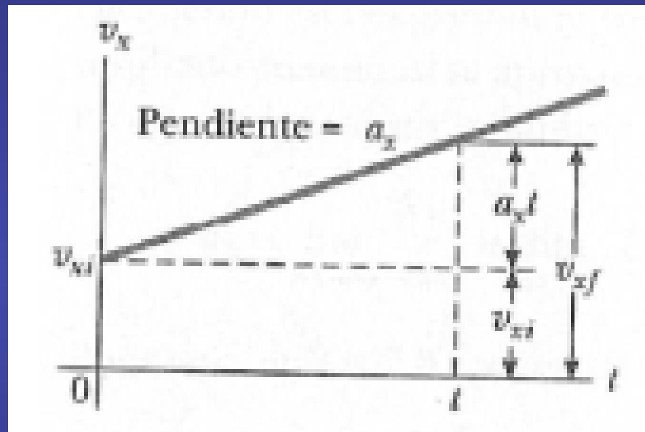
Tomando límites

$$\Delta x = \lim_{\Delta t_n \to 0} \sum_n \Delta x_n = \lim_{\Delta t_n \to 0} \sum_n v_n \Delta t_n$$

El desplazamiento de una partícula durante el intervalo de tiempo que va desde t_i hasta t_f es igual al área situada bajo la curva entre los puntos inicial y final en la gráfica velocidad-tiempo

Desplazamiento como función del tiempo en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

El desplazamiento de una partícula durante el intervalo de tiempo que va desde t_i hasta t_f es igual al área situada bajo la curva entre los puntos inicial y final en la gráfica velocidad-tiempo



$$\Delta x = v_{xi}\Delta t + \frac{1}{2}\left(v_{xf} - v_{xi}\right)\Delta t$$

$$\Delta x = \left(v_{xi} + \frac{1}{2}v_{xf} - \frac{1}{2}v_{xi}\right)\Delta t = \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})\Delta t$$

Velocidad media en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

$$\Delta x = \left(v_{xi} + \frac{1}{2} v_{xf} - \frac{1}{2} v_{xi} \right) \Delta t = \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})\Delta t$$

Como $\Delta x = \overline{v}_x \Delta t$

Velocidad media de una partícula con aceleración constante

$$\overline{v}_x = \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf}) \qquad \text{(para } a_x \text{ constante)}$$

Posición como función del tiempo en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

$$\Delta x = \overline{v}_x \Delta t = \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})\Delta t$$

Si $t_i = 0$ **y** $t_f = t$

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t \qquad \text{(para } a_x \text{ constante)}$$

Posición como función del tiempo en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Si $t_i = 0$ **y** $t_f = t$

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t \qquad \text{(para } a_x \text{ constante)}$$

Sustituyendo el valor de la velocidad final como función de la aceleración y del tiempo

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}\left[v_{xi} + (v_{xi} + a_x t)\right]t$$

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad \text{(para } a_x \text{ constante)}$$

Posición como función del tiempo en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t \qquad \text{(para } a_x \text{ constante)}$$

Despejando el valor del tiempo

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})\left(\frac{v_{xf} - v_{xi}}{a_x}\right) = x_i + \frac{v_{xf}^2 - v_{xi}^2}{2a_x}$$

$$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i) \qquad \text{(para } a_x \text{ constante)}$$

Como conocer la aceleración cuando la velocidad depende de la posición

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

Resumen del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Kinematic Equations for Motion of a Particle Under Constant Acceleration	
Equation	**Information Given by Equation**
$v_{xf} = v_{xi} + a_x t$	Velocity as a function of time
$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t$	Position as a function of velocity and time
$x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	Position as a function of time
${v_{xf}}^2 = {v_{xi}}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$	Velocity as a function of position

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:
ntegrando las ecuaciones del movimiento

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad \Rightarrow \quad dv_x = a_x\, dt \quad \Rightarrow \int dv_x = \int a_x\, dt \quad \Rightarrow v_x = a_x t + C$$

Si en $t = 0$, $v_x = v_{xi}$ **entonces**

$$v_x(t = 0) = v_{xi} = a_x \times 0 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = v_{xi}$$

$$v_x(t) = v_{xi} + a_x t$$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado: ntegrando las ecuaciones del movimiento

$$v_x = \frac{dx}{dt} \;\Rightarrow\; dx = v_x\,dt \;\Rightarrow \int dx = \int v_x\,dt = \int (v_{xi} + a_x t)\,dt$$

$$x = v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 + C_2$$

Si en $t = 0$ **,** $x = x_i$ **entonces**

$$x(t=0) = x_i = 0 + 0 + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = x_i$$

$$x(t) = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:
ntegrando las ecuaciones del movimiento

$$a_x = v_x \frac{dv_x}{dx} \quad \Rightarrow \quad v_x dv_x = a_x dx \quad \Rightarrow \quad \int v_x dv_x = \int a_x dx$$

$$\frac{v_x^2}{2} = a_x x + C_3$$

Si en $x = x_i$ **,** $v = v_{xi}$ **entonces**

$$\frac{v_{xi}^2}{2} = a_x x_i + C_3 \quad \Rightarrow \quad C_3 = \frac{v_{xi}^2}{2} - a_x x_i$$

$$\frac{v_x^2}{2} = a_x x + \frac{v_{xi}^2}{2} - a_x x_i \quad \Rightarrow \quad \frac{v_x^2}{2} - \frac{v_{xi}^2}{2} = a_x (x - x_i)$$

$$v_x^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x - x_i)$$

Caída libre de objetos

Un objeto en caída libre es un objeto que se mueve únicamente bajo la influencia de la gravedad, *independientemente de su estado de movimiento inicial.*

En los problemas vamos a suponer que:

1. **La resistencia del aire puede ser ignorada.**
2. **La aceleración de caída libre es constante,**

   módulo sobre la superficie de la Tierra $g = 9.80\ m/s^2$

   dirigida hacia el centro de la Tierra (hacia abajo).

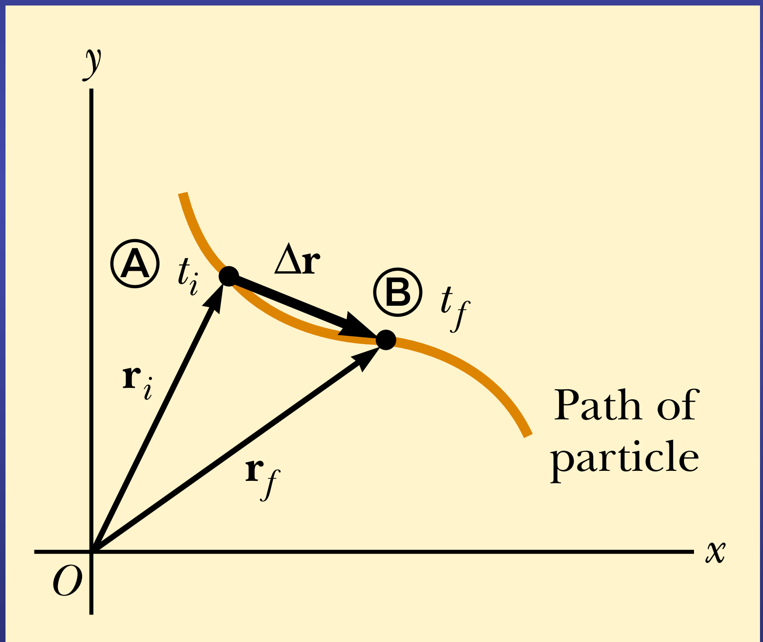
Curiosidades:

módulo sobre la superficie de la Luna $g = 1.67\ m/s^2$

módulo sobre la superficie del Sol $g = 274\ m/s^2$

Movimiento en tres dimensiones. Vectores posición y desplazamiento

Objetivo: conocer la posición de una partícula como función del tiempo



Vector posición: es el vector que describe la posición de una partícul
Se dibuja desde el origen de un sistema de referencia hasta la ubicació
de la partícula.

$$\text{En el instante } t_i : \vec{r}_i = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}$$

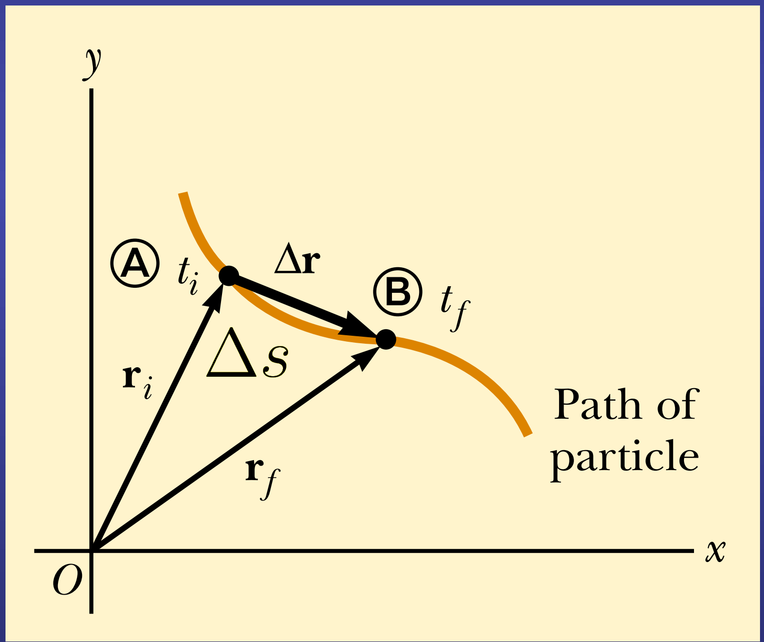
$$\text{En el instante } t_f : \vec{r}_f = x_f\vec{i} + y_f\vec{j} + z_f\vec{k}$$

El desplazamiento de una partícula es la diferencia entre su posición final y su posición inicial

$$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_f - \vec{r}_i = \Delta x\,\vec{i} + \Delta y\,\vec{j} + \Delta z\,\vec{k}$$

Movimiento en tres dimensiones. Vectores posición y desplazamiento

Objetivo: conocer la posición de una partícula como función del tiempo



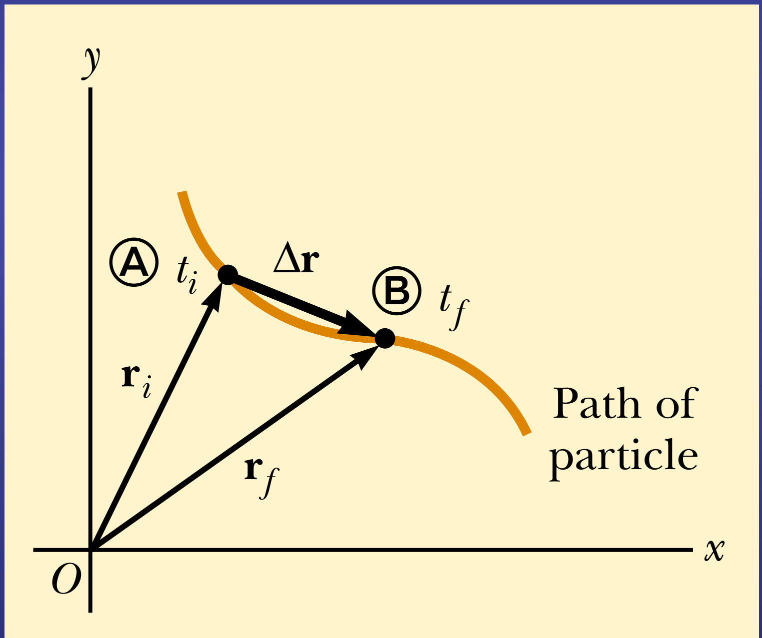
$$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_f - \vec{r}_i = \Delta x\,\vec{i} + \Delta y\,\vec{j} + \Delta z\,\vec{k}$$

$$|\Delta\vec{r}| < \Delta s$$

Notad como la magnitud del desplazamiento es inferior a la distancia recorrida por la partícula en su trayectoria

Movimiento en tres dimensiones.
Vector velocidad media

Objetivo: conocer la posición de una partícula como función del tiempo



Vector velocidad media de la partícula durante el intervalo de tiempo se define como el cociente entre el vector desplazamiento y el intervalo de tiempo

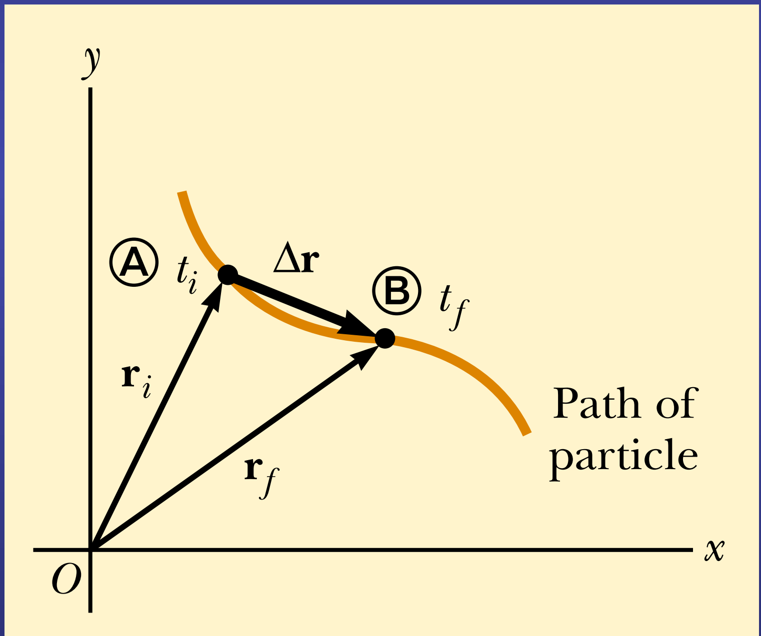
$$\overline{\vec{v}} \equiv \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}$$

La velocidad media es una magnitud vectorial, con la misma dirección que el desplazamiento.

Es independiente de la trayectoria entre los puntos inicial y final.

Movimiento en tres dimensiones. Vector velocidad media

Objetivo: conocer la posición de una partícula como función del tiempo



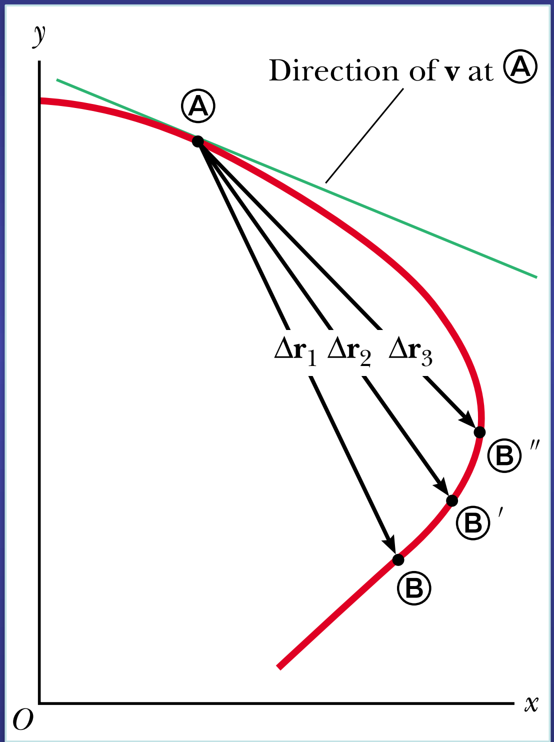
$$\vec{\bar{v}} \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}$$

El vector velocidad media es independediente de la trayectoria entre los puntos inicial y final (es proporcional al desplazamiento, que sólo depende de los puntos inicial y final)

**Si una partícula comienza su movimiento en un determinado punto, y al cabo de un tiempo vuelve a ese punto después de haber recorrido una cierta trayectoria, su velocidad media es cero porque su desplazamiento es cero.
Sin embargo, su celeridad media no es nula.**

Movimiento en tres dimensiones.
Vector velocidad instantánea

Objetivo: conocer la posición de una partícula como función del tiempo



Vector velocidad instantánea se define como el límite de la velocida
media cuando el intervalo de tiempo en el que se mide tiende a cero

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

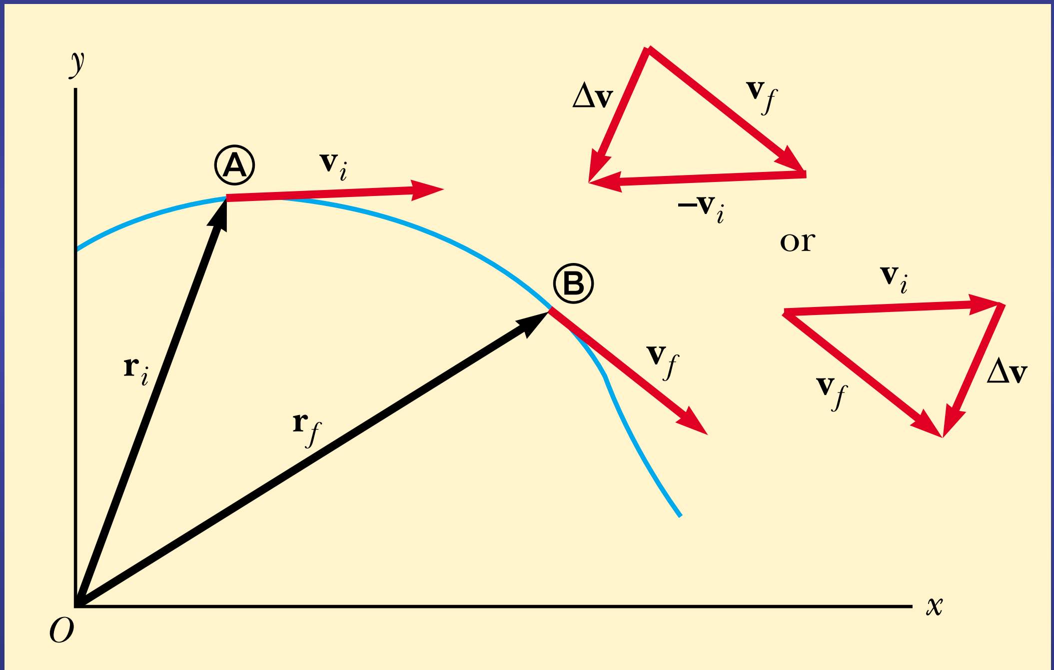
La dirección del vector velocidad instantánea en cualquier punto de la trayectoria de una partícula viene determinado por la línea tangente a la trayectoria en ese punto.

El sentido del vector velocidad instantánea viene determinado por la dirección del movimiento.

El módulo del vector velocidad instantánea se le conoce como celeridad instantánea.

Movimiento en tres dimensiones. Vector aceleración media

Objetivo: conocer la posición de una partícula como función del tiempo



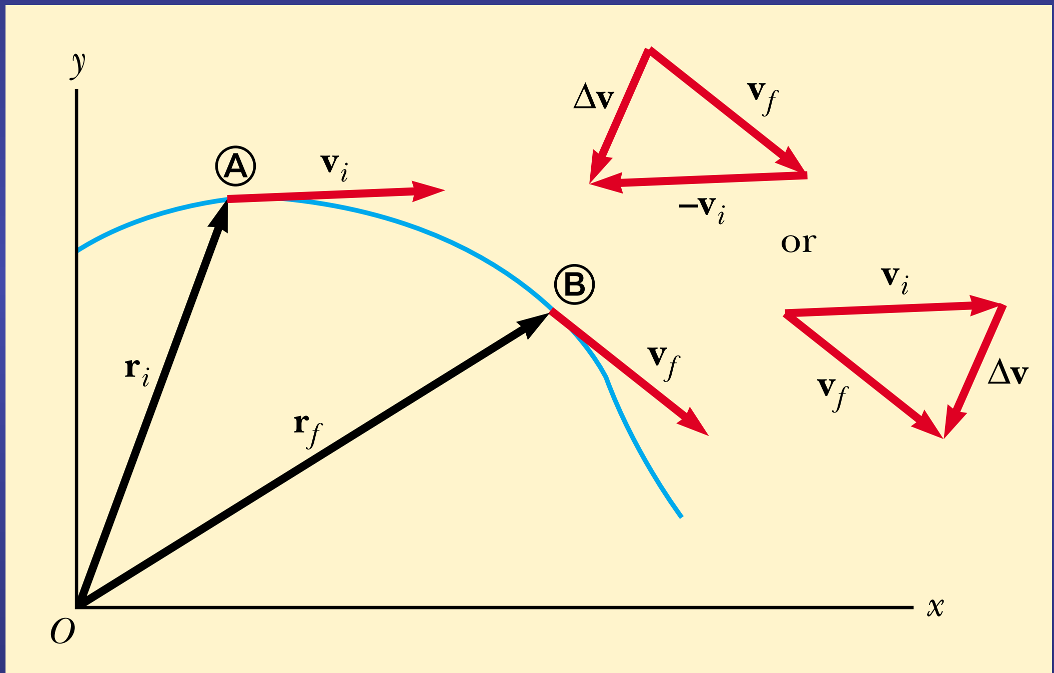
Vector aceleración media en un intervalo de tiempo se define como el cociente en la variación de la velocidad instantánea y el intervalo de tiempo

$$\overline{\vec{a}} \equiv \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

La aceleración media es una **magnitud vectorial**, con la misma **dirección** que el **cambio en la velocidad.**

Movimiento en tres dimensiones.
Vector aceleración instantánea

Objetivo: conocer la posición de una partícula como función del tiempo



Vector aceleración instantánea se define como el límite del cociente entre el cambio en la posición y el intervalo de tiempo, cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

La aceleración instantánea es una magnitud vectorial.

El cambio en la velocidad puede ser tanto en su módulo como en su dirección o en el sentido.

Movimiento uniformemente acelerado en tres dimensiones.

Objetivo: conocer la posición de una partícula como función del tiempo

Supongamos que una partícula se mueve en el espacio con aceleración constante. Tanto el módulo, como la dirección y el sentido son constantes.

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Si el vector posición es conocido, podemos conocer el vector velocidad sin más que tomar la derivada

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

A no ser que se especifique otra cosa, supondremos que los vectores unitarios permanecen constantes con el tiempo

Movimiento uniformemente acelerado en tres dimensiones.

Objetivo: conocer la posición de una partícula como función del tiempo

Supongamos que una partícula se mueve en el espacio con aceleración constante. Tanto el módulo, como la dirección y el sentido son constantes.

$$a_x = \text{constante} \qquad a_y = \text{constante} \qquad a_z = \text{constante}$$

Modelo analítico para el movimiento rectilíneo, uniformemente acelerado

Si la aceleración de la partícula es constante, su aceleración instantánea en cualquier momento de un determinado intervalo de tiempo es igual a la aceleración media en dicho intervalo

$$\overline{a}_x = a_x$$

Si ahora tomamos la definición de aceleración media

$$a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i}$$

Si $t_i = 0$ **y** $t_f = t$

$$a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t}$$

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t \qquad (\text{para } a_x \text{ constante})$$

Movimiento uniformemente acelerado en tres dimensiones.

Objetivo: conocer la posición de una partícula como función del tiempo

Supongamos que una partícula se mueve en el espacio con aceleración constante. Tanto el módulo, como la dirección y el sentido son constantes.

$$a_x = \text{constante} \qquad a_y = \text{constante} \qquad a_z = \text{constante}$$

Aplicando esta ecuación para cada una de las componentes

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t$$
$$v_{yf} = v_{yi} + a_y t$$
$$v_{zf} = v_{zi} + a_z t$$

En notación vectorial

$$\begin{aligned}\vec{v}_f &= (v_{xi} + a_x t)\vec{i} + (v_{yi} + a_y t)\vec{j} + (v_{zi} + a_z t)\vec{k} \\ &= (v_{xi}\vec{i} + v_{yi}\vec{j} + v_{zi}\vec{k}) + (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})t \\ &= \vec{v}_i + \vec{a}t\end{aligned}$$

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$$

Posición como función del tiempo en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Si $t_i = 0$ **y** $t_f = t$

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t \qquad \text{(para } a_x \text{ constante)}$$

Sustituyendo el valor de la velocidad final como función de la aceleración y del tiempo

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}\left[v_{xi} + (v_{xi} + a_x t)\right] t$$

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad \text{(para } a_x \text{ constante)}$$

Movimiento uniformemente acelerado en tres dimensiones.

Objetivo: conocer la posición de una partícula como función del tiempo

Supongamos que una partícula se mueve en el espacio con aceleración constante. Tanto el módulo, como la dirección y el sentido son constantes.

$$a_x = \text{constante} \qquad a_y = \text{constante} \qquad a_z = \text{constante}$$

Aplicando esta ecuación para cada una de las componentes

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y_f = y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$z_f = z_i + v_{zi}t + \frac{1}{2}a_z t^2$$

Movimiento uniformemente acelerado en tres dimensiones.

Objetivo: conocer la posición de una partícula como función del tiempo

Supongamos que una partícula se mueve en el espacio con aceleración constante. Tanto el módulo, como la dirección y el sentido son constantes.

$$a_x = \text{constante} \qquad a_y = \text{constante} \qquad a_z = \text{constante}$$

En notación vectorial

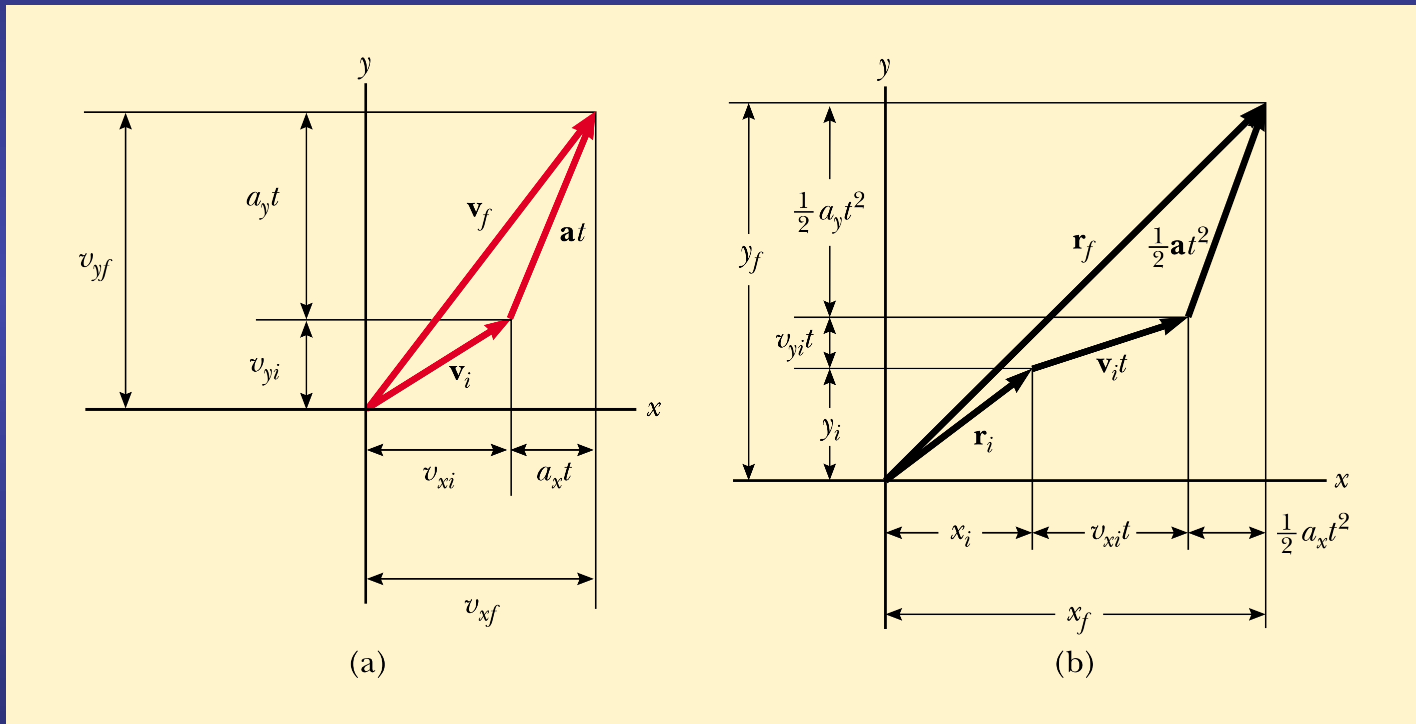
$$\begin{aligned}
\vec{r}_f &= \left(x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2\right)\vec{i} + \left(y_i + v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2\right)\vec{j} + \left(z_i + v_{zi}t + \tfrac{1}{2}a_z t^2\right)\vec{k} \\
&= \left(x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}\right) + \left(v_{xi}\vec{i} + v_{yi}\vec{j} + v_{zi}\vec{k}\right)t + \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right)t^2 \\
&= \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2
\end{aligned}$$

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

Resumen del movimiento uniformemente acelerado en 3D

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$$

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$



Un movimiento en tres dimensiones con aceleración constante es equivalente a tres movimientos independientes en las direcciones x, y, y z con aceleraciones constantes a_x, a_y, y a_z.

Tiro parabólico: aproximaciones fundamentales

La aceleración de caída libre, g, es constante a lo largo de todo el movimiento y tiene dirección descendente (hacia el centro de la Tierra)

El efecto de la resistencia del aire es despreciable

Equivalente a suponer:

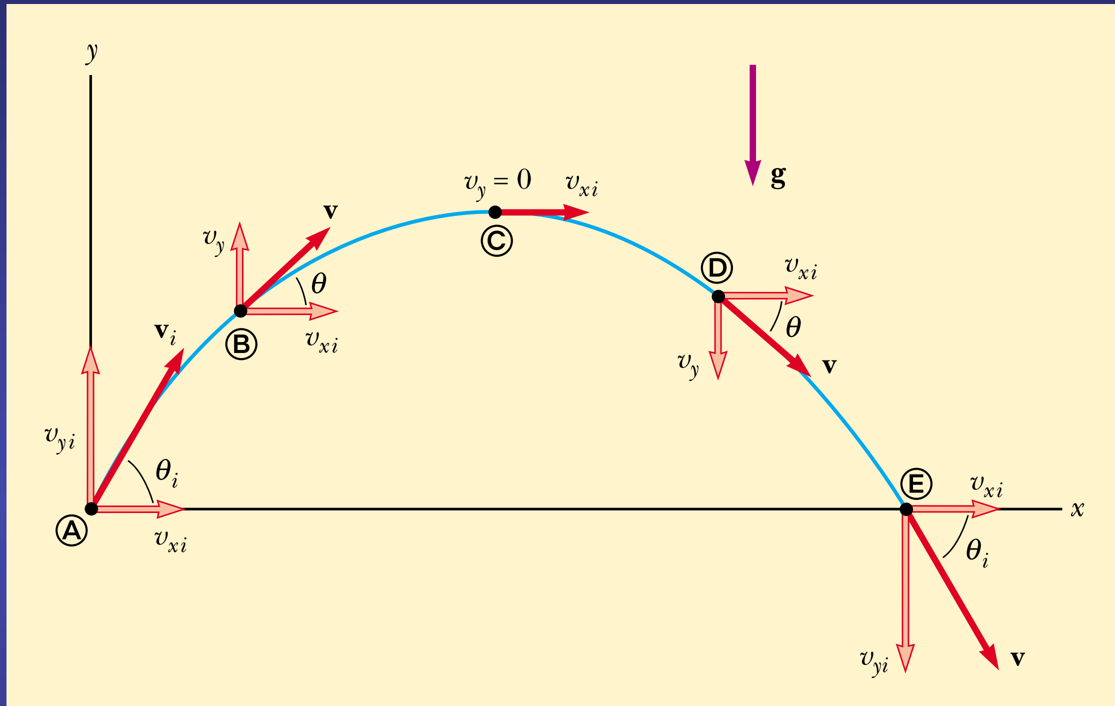
- la velocidad inicial del objeto es pequeña (para que el efecto del rozamiento sea despreciable).

- rango de movimiento pequeño comparado con el radio de la Tierra (podemos considerar que la Tierra es plana dentro de ese rango).

- la altura máxima del objeto es también pequeña comparada con el radio de la Tierra (g varía con la altura).

- la Tierra está en reposo.

Tiro parabólico: condiciones iniciales



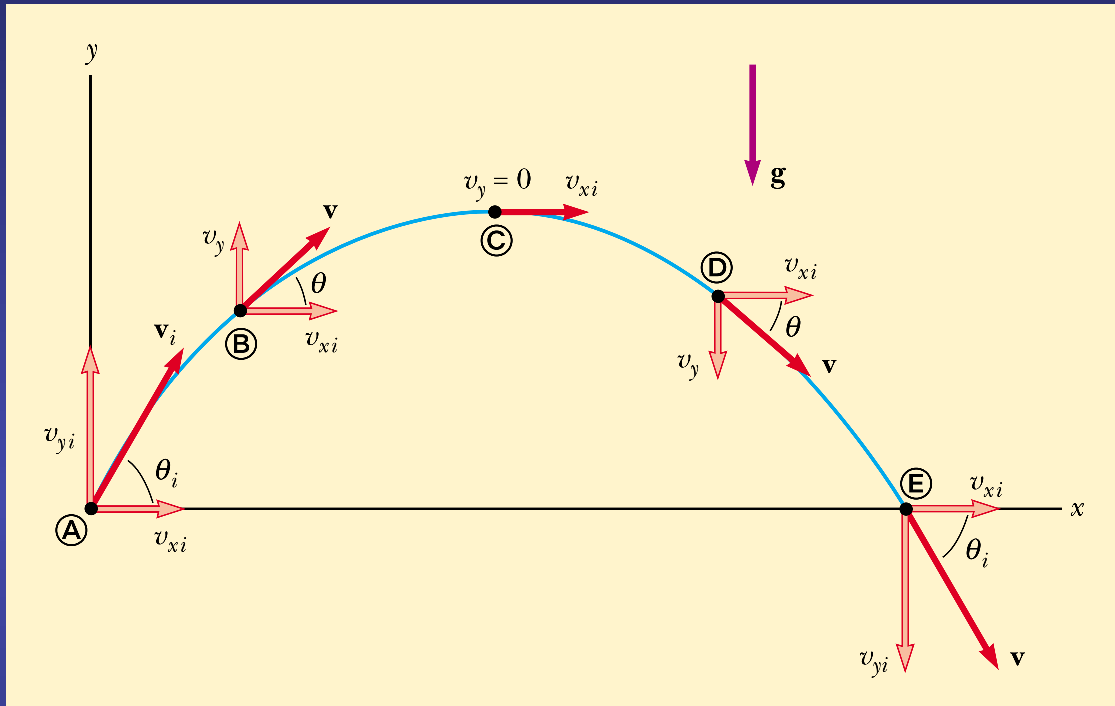
Sistema de referencia: **eje y sea vertical y sentido positivo hacia arriba**

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g = 9.80\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases}$$

Posición inicial: **en t = 0, la partícula está en el origen ($x_i = y_i$ = 0)**

Velocidad inicial: $v_{xi} = v_i \cos\theta_i$ $\quad$ $v_{yi} = v_i \sin\theta_i$

Tiro parabólico:
velocidad y posición como función del tiempo



Velocidad

$$v_{xf} = v_{xi} = v_i \cos\theta_i = \text{constante}$$

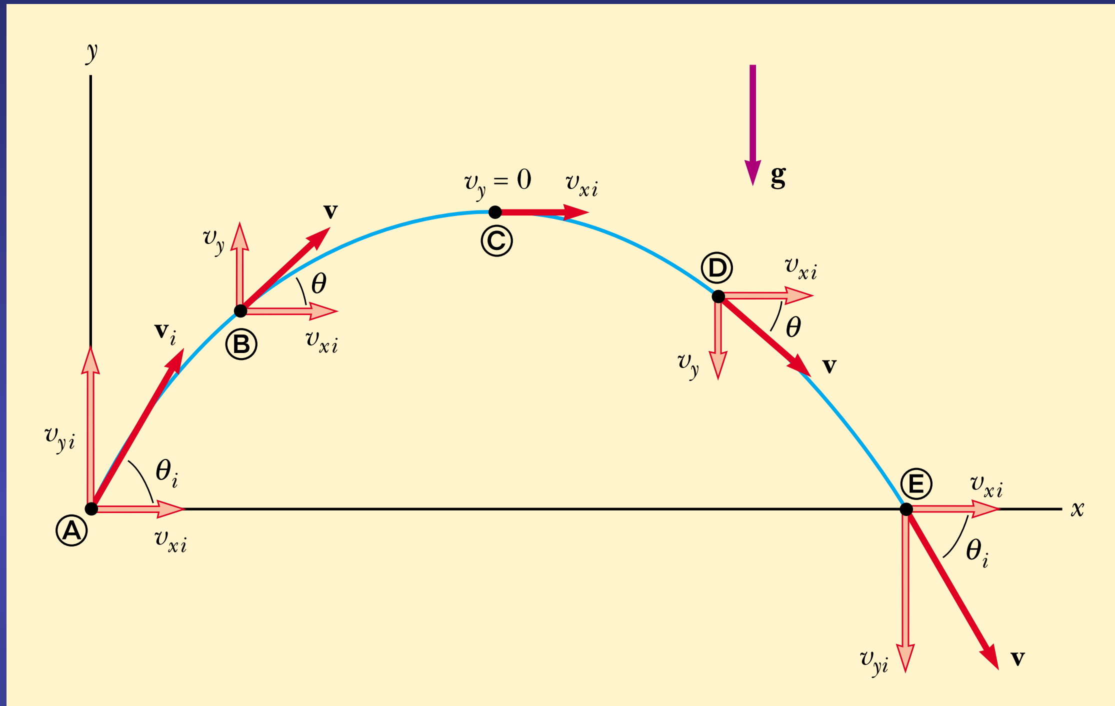
$$v_{yf} = v_{yi} - gt = v_i \sin\theta_i - gt$$

Posición

$$x_f = x_i + v_{xi}t = (v_i \cos\theta_i)t$$

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_i \sin\theta_i)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Tiro parabólico:
origen del nombre



Posición

$$x_f = x_i + v_{xi}t = (v_i\ \cos\theta_i)t$$

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_i\ \sin\theta_i)t - \frac{1}{2}gt^2$$

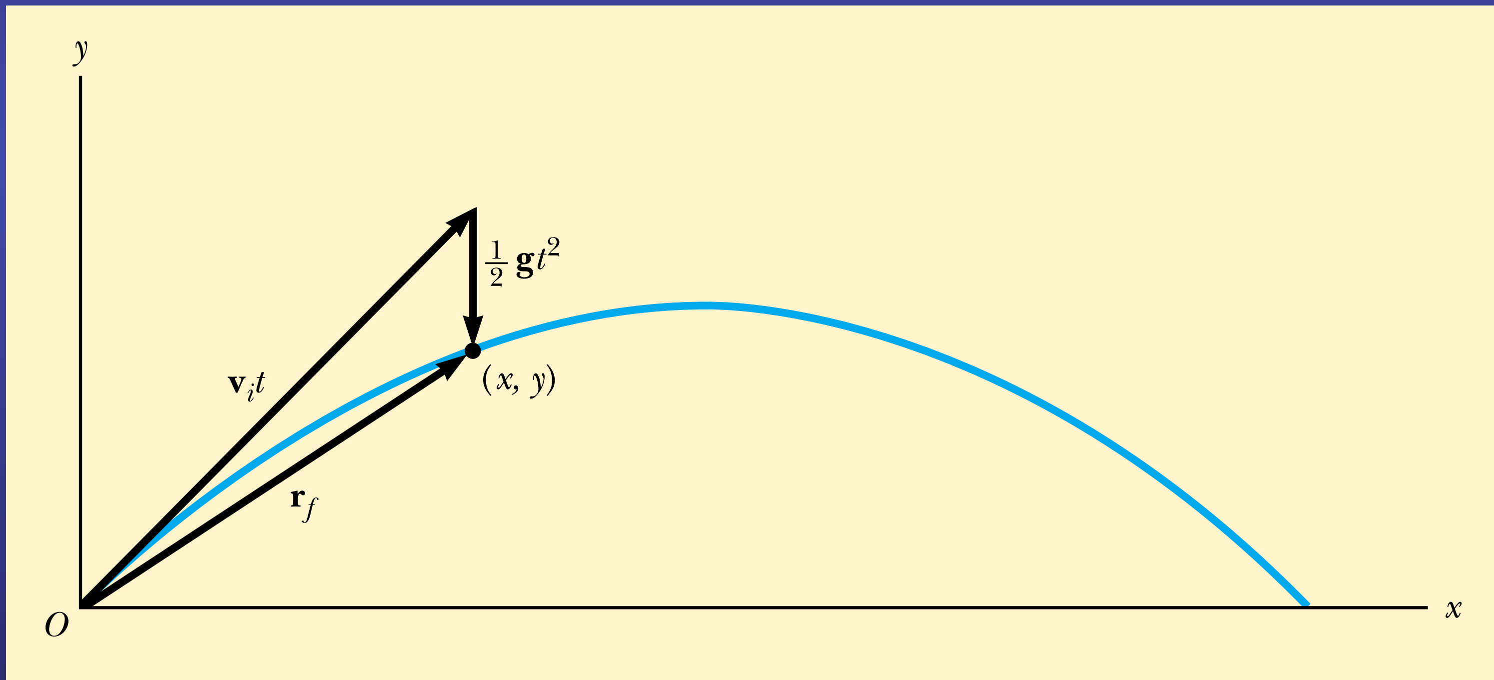
Despejando t de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda

$$y_f = (\tan\theta_i)x_f - \left(\frac{g}{2v_i^2\cos^2\theta_i}\right)x_f^2$$

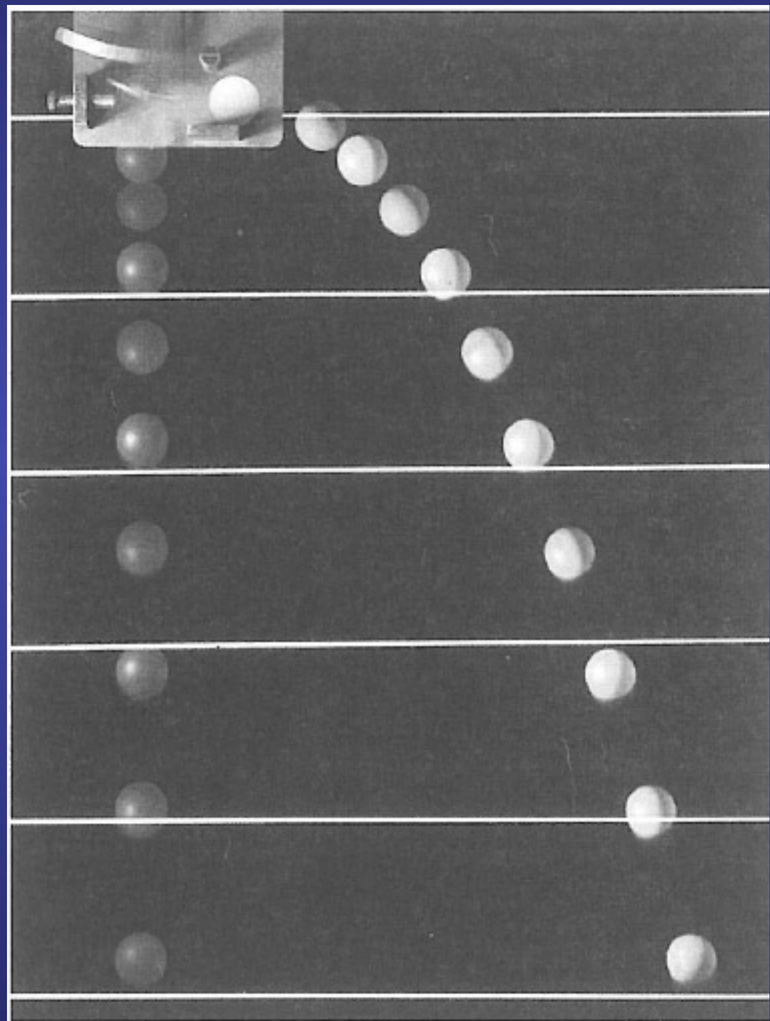
Ecuación de una parábola $y = ax - bx^2$

Tiro parabólico:
expresión vectorial para la posición

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$



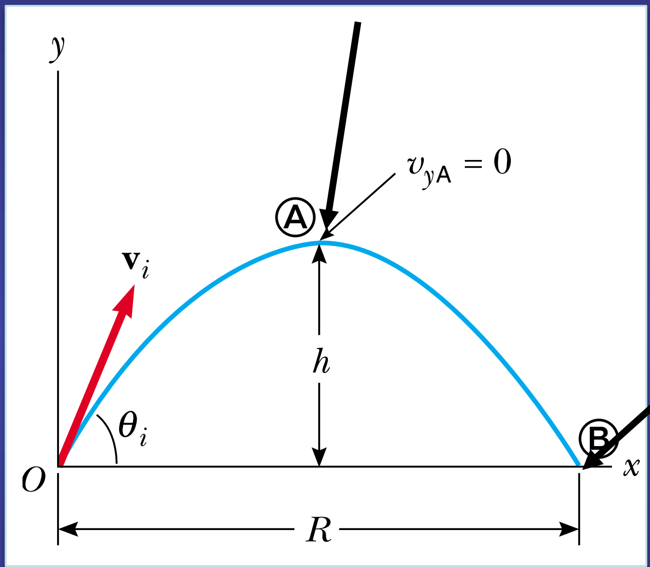
Tiro parabólico: Ilustración del movimiento de caída libre, con y sin velocidad inicial a lo largo de x



¿Qué les ocurre a los astronautas en la ISS?

Tiro parabólico:
Alcance horizontal y altura máxima

Punto de altura máxima



Alcance horizontal

En el punto de altura máxima, la componente de la velocidad a lo largo de y se anula

La partícula llegará al punto de altura máxima en el instante t_1

$$t_1 = \frac{v_i \sin\theta_i}{g}$$

Durante este tiempo, la partícula se habrá desplazado una distancia h a lo largo de y

$$h = (v_i \sin\theta_i)\frac{v_i \sin\theta_i}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_i \sin\theta_i}{g}\right)^2$$

$$h = \frac{v_i^2 \sin^2\theta_i}{2g}$$

¿Cómo se puede aumentar h?

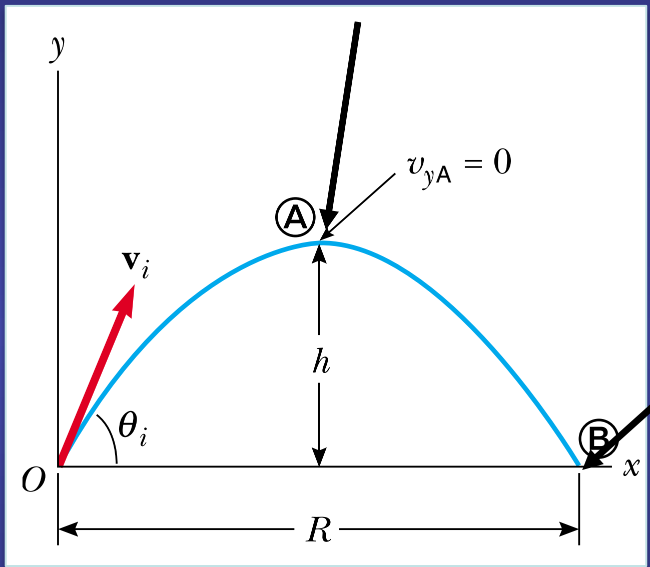
Aumentando módulo de la velocidad inicial

Lanzando con un ángulo mayor

Lanzando en un sitio con aceleración de caída libre menor (la Luna)

Tiro parabólico:
Alcance horizontal y altura máxima

Punto de altura máxima



Alcance horizontal

En alcance R es la distancia horizontal recorrida.
En el punto de alcance máximo $y_f = 0$

$$y_f = 0 \Rightarrow t = \frac{2v_i \sin\theta_i}{g} = 2t_1$$

$$R = (v_i\cos\theta_i)2t_1 = (v_i\cos\theta_i)\frac{2v_i\sin\theta_i}{g} = \frac{2v_i^2\sin\theta_i\cos\theta_i}{g}$$

¿Cómo se puede aumentar R?

Como $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

Aumentando módulo de la velocidad inicial

Lanzando en un sitio con aceleración de caída libre menor (la Luna)

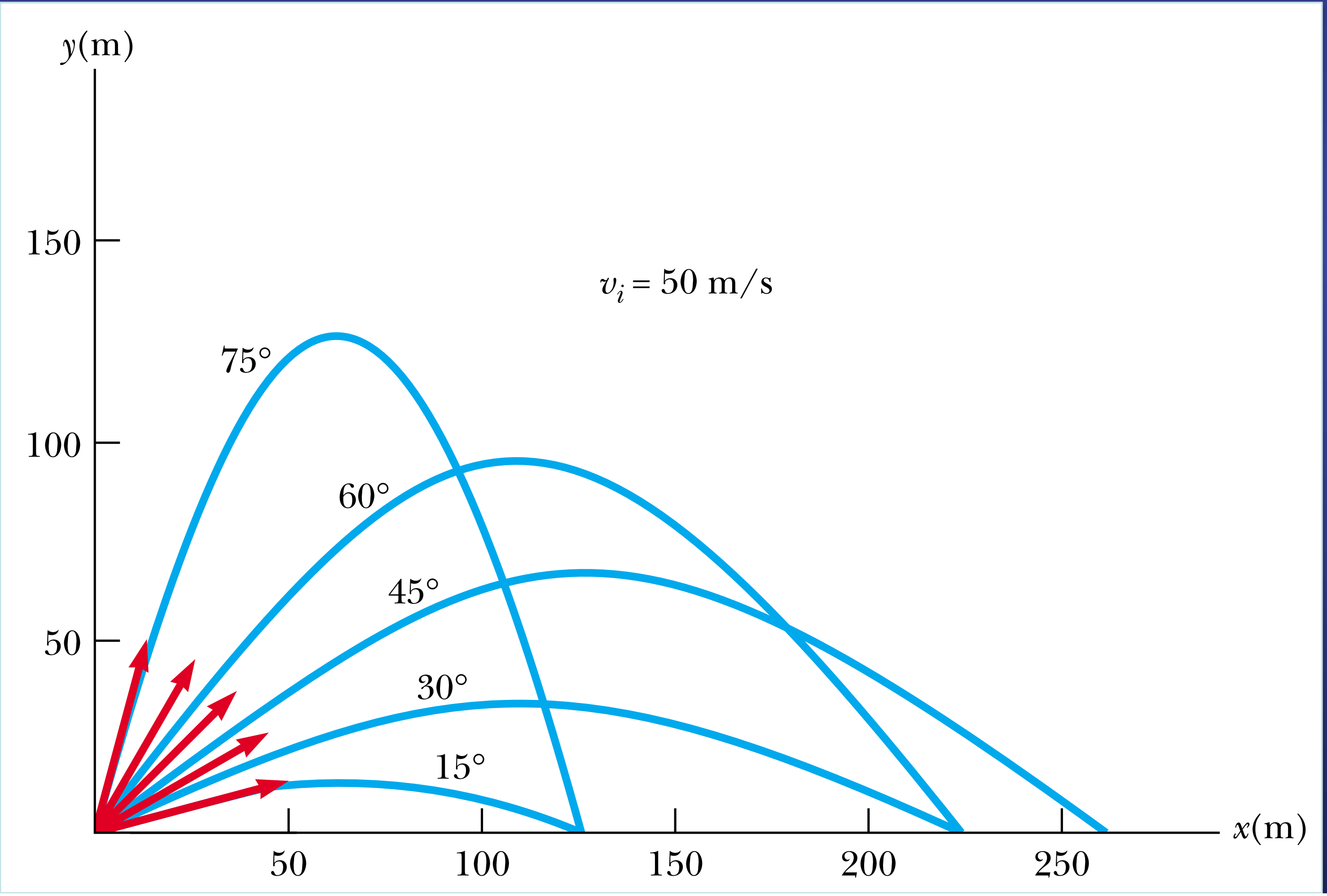
$$R = \frac{v_i^2\sin(2\theta_i)}{g}$$

Sólo para movimientos simétricos

Tiro parabólico:
Alcance horizontal y altura máxima

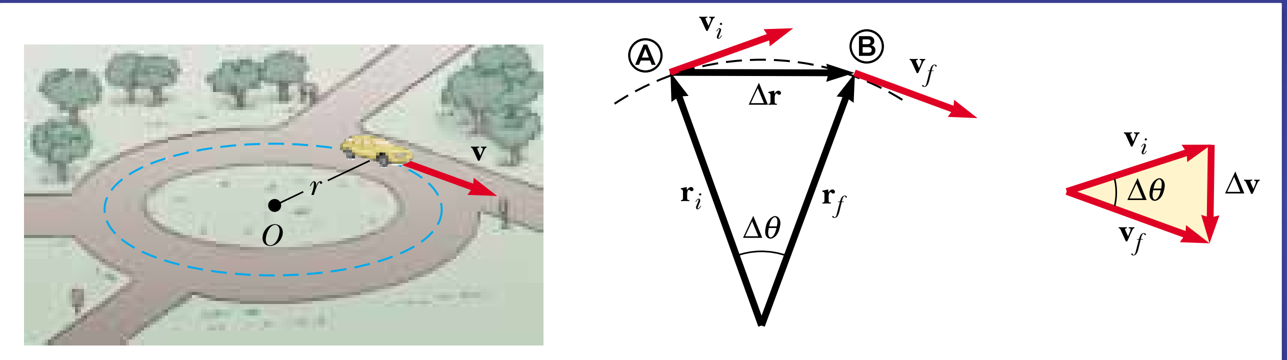
El alcance horizontal máximo se consigue para un valor del ángulo $\theta_i = 45^\circ$

Para cualquier otro valor del ángulo, un punto de coordenadas (R,0) se puede alcanzar con los dos valores complementarios de θ_i



Partícula con movimiento circular uniforme: definición

Se dice que una partícula se mueve con un movimiento circular uniforme cuando se desplaza siguiendo una trayectoria circular con celeridad constante v



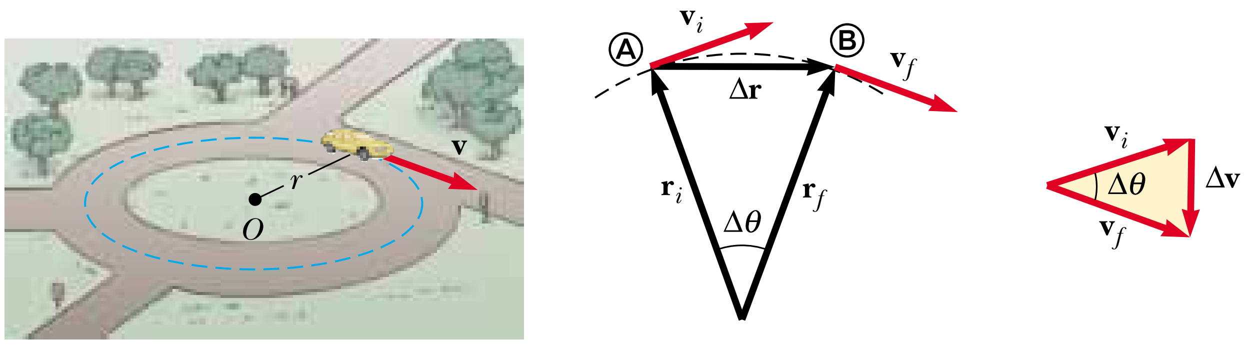
(a) (b) (c)

Aunque un objeto se mueva con una celeridad constante en una trayectoria circular, también tiene una aceleración, ya que varía la dirección del vector velocidad.

El vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria del objeto y perpendicular al radio de la trayectoria circular.

Partícula con movimiento circular uniforme: dirección de la velocidad y aceleración

Se dice que una partícula se mueve con un **movimiento circular uniforme** cuando se desplaza siguiendo una **trayectoria circular con celeridad constante** v

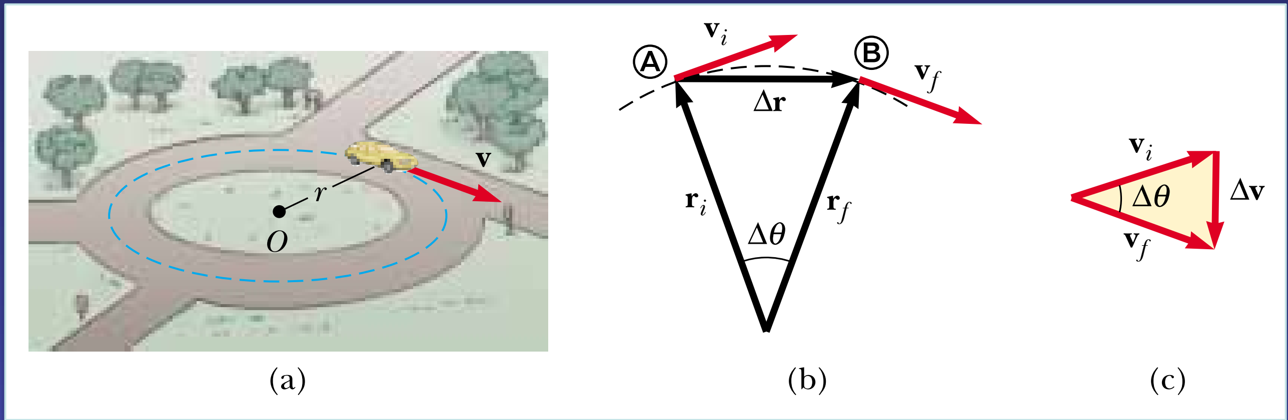


(a) (b) (c)

El vector **velocidad** siempre es **tangente a la trayectoria** del objeto y **perpendicular al radio** de la trayectoria circular.

El vector **aceleración** en un movimiento circular uniforme siempre es **perpendicular a la trayectoria y siempre apunta hacia el centro del círculo.** Si no fuera así, habría una componente de la aceleración paralela a la trayectoria, es decir, paralela al vector velocidad. Esta componente contribuiría a aumentar la celeridad, contradiciendo nuestra hipótesis

Partícula con movimiento circular uniforme: módulo de la aceleración



El ángulo $\Delta\theta$ entre los dos vectores posición es igual al ángulo entre los dos vectores velocidad
(el vector velocidad siempre es perpendicular al vector posición)

Los dos triángulos son similares

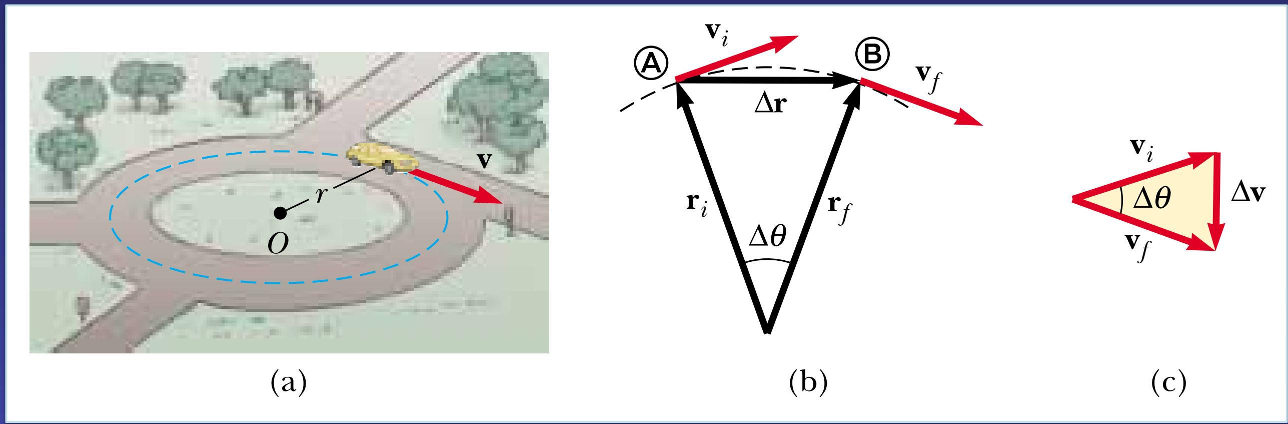
(dos triángulos son similares si el ángulo entre cualquiera de dos de sus lados es igual en ambos triángulos y si la relación entre las longitudes de dichos lados es la misma).

$$v = v_i = v_f$$

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{r}$$

$$r = r_i = r_f$$

Partícula con movimiento circular uniforme: módulo de la aceleración



$$v = v_i = v_f$$

$$\frac{|\Delta \vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta \vec{r}|}{r}$$

$$r = r_i = r_f$$

Aceleración instantánea

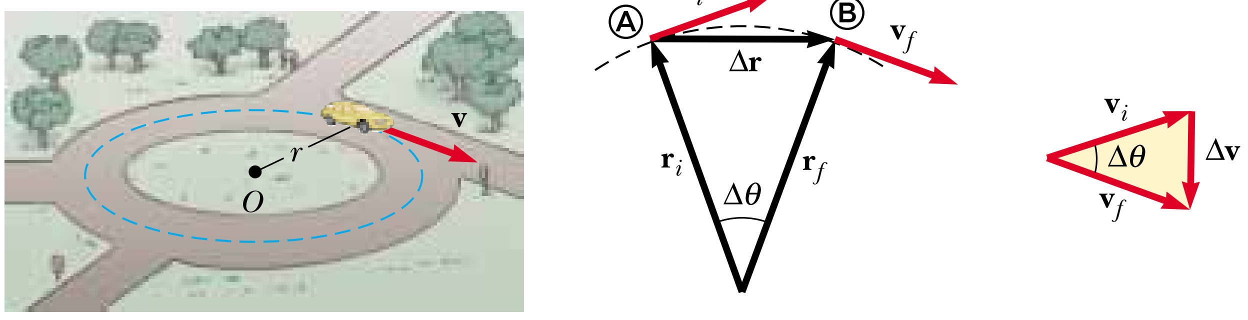
$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad |\bar{\vec{a}}| = \frac{v}{r}\frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}$$

Módulo de la velocidad v

Tomando límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Partícula con movimiento circular uniforme: resumen de la aceleración



(a) (b) (c)

En el movimiento circular uniforme, la aceleración se dirige hacia el centro del círculo y tiene por módulo

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Aceleración centrípeta

El vector aceleración centrípeta no es constante:

- su módulo si es constante y viene dada por la expresión anterior.

- su dirección cambia de manera contínua según se desplaza el objeto: siempre apunta hacia el centro del círculo.

Descripción del movimiento circular uniforme en términos del periodo

Se define el periodo como el tiempo requerido para completar una vuelta
Se suele representar por la letra T y se mide en segundos

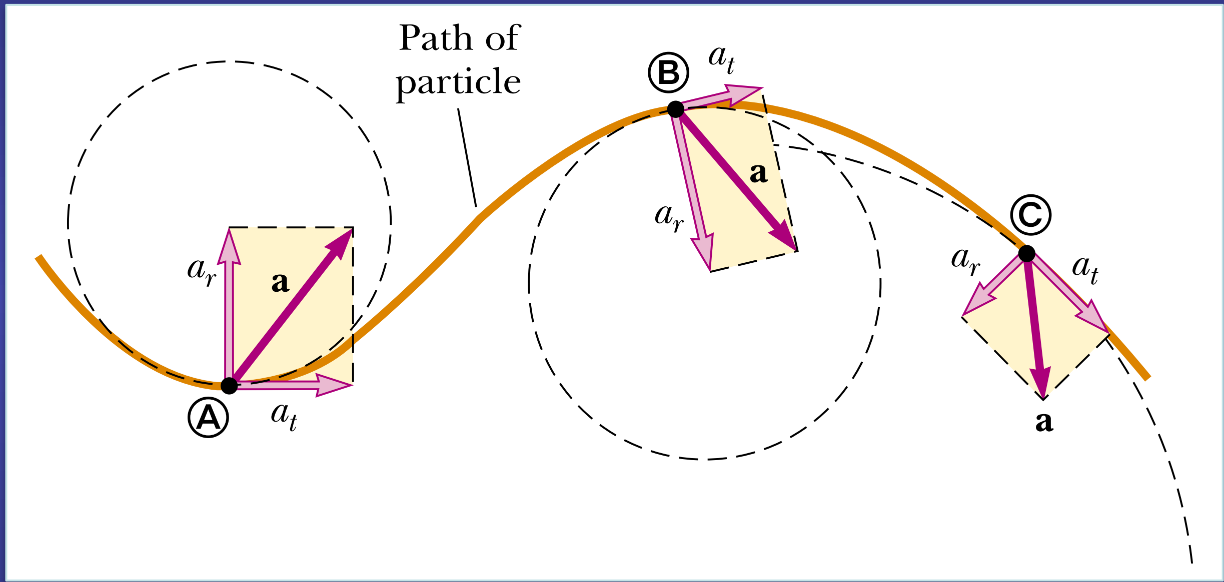
En un periodo la partícula recorre una distancia de $2\pi r$

Por lo tanto, la celeridad de la partícula vendrá dada por $v = \dfrac{2\pi r}{T}$

De donde $T \equiv \dfrac{2\pi r}{v}$

Componentes intrínsecas de la aceleración: aceleraciones tangencial y radial

Imaginemos una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria curva, donde el vector velocidad varía tanto en dirección como en módulo

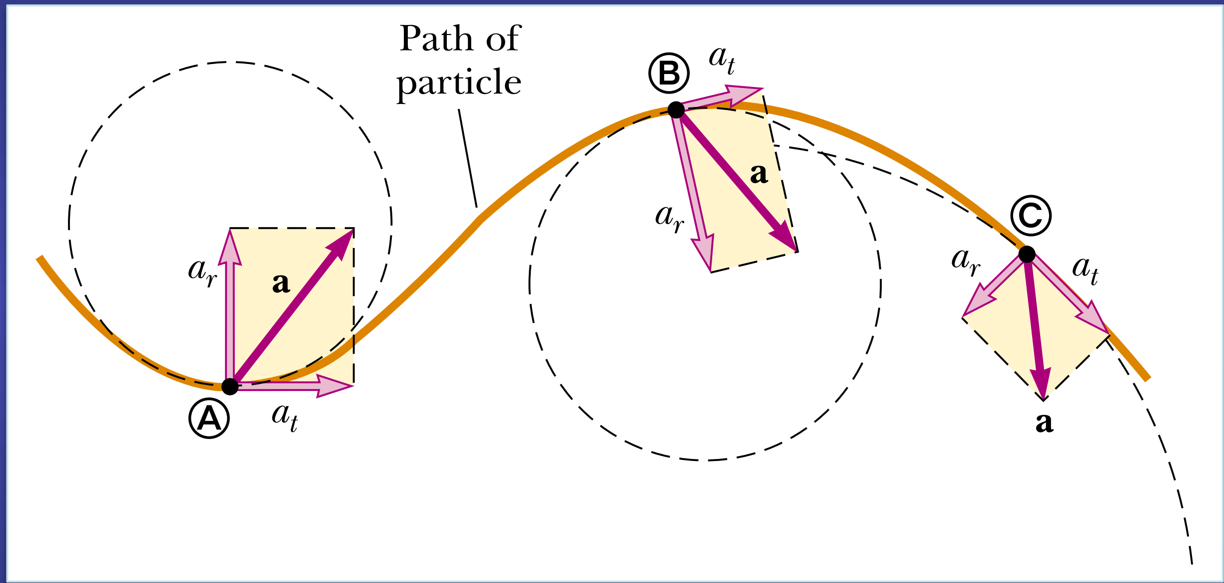


El vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria

El vector aceleración forma un ángulo con la misma

Componentes intrínsecas de la aceleración: aceleraciones tangencial y radial

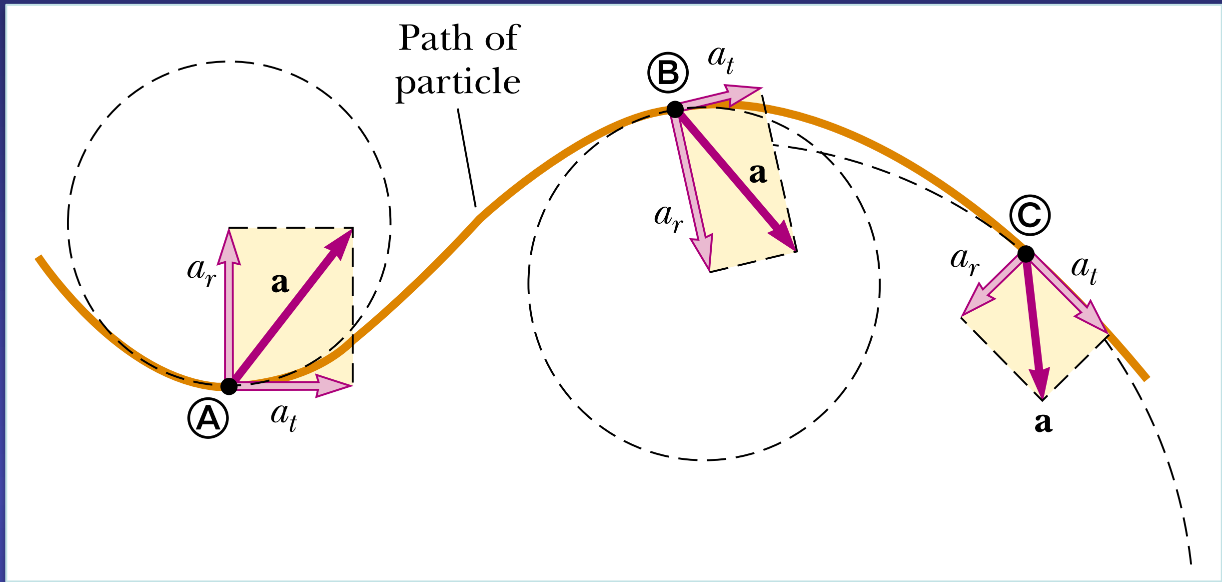
Imaginemos una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria curva, donde el vector velocidad varía tanto en dirección como en módulo



Modelo geométrico: se sustituye la trayectoria real en cada punto por una trayectoria circular, cuyo radio es el radio de curvatura de la trayectoria en ese punto.

Sustituimos pequeñas porciones de la trayectoria real por trayectorias circulares (líneas discontinuas).

Componentes intrínsecas de la aceleración: aceleraciones tangencial y radial



Expresamos la aceleración en cada punto mediante dos componentes, en función de un origen situado en el centro de cada círculo.

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$

Componente radial a lo largo del círculo del modelo

Componente tangencial perpendicular a dicho radio

Componentes intrínsecas de la aceleración: aceleraciones tangencial y radial

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$

La aceleración **tangencial** produce el **cambio del módulo** del vector velocidad de la partícula.

Su **módulo** es:

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

Su **dirección** es tangencial.
Como la velocidad lleva también la dirección tangencial podemos calcular un vector unitario en esa dirección

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \Rightarrow \vec{a}_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{\tau}$$

La aceleración **radial** se debe al **cambio de la dirección** del vector velocidad de la partícula.

Su módulo es:

$$a_r = -a_c = -\frac{v^2}{r}$$

Radio del círculo modelo

Signo menos: la aceleración centrípeta se dirige hacia el centro del círculo modelo, y éste es opuesto al vector unidad en la dirección radial

El vector aceleración normal vendrá dado por la diferencia entre el vector aceleración total y el vector aceleración tangencial

Componentes intrínsecas de la aceleración: aceleraciones tangencial y radial

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$

Como las dos componentes son normales (perpediculares) entre sí

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$$

Para una celeridad constante, a_r es mayor cuanto menor sea el radio de curvatura

La dirección de a_t puede ser:

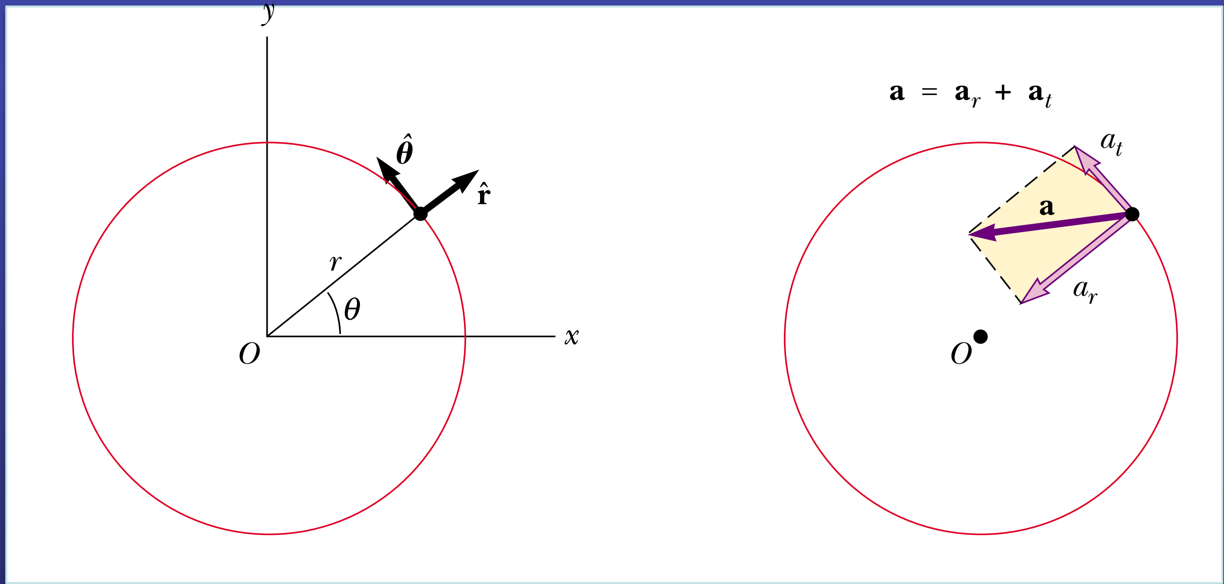
- **la misma que la de la velocidad (si la celeridad aumenta)**
- **opuesta a la de la velocidad (si la celeridad disminuye)**

Aceleraciones tangencial y radial en términos de vectores unitarios

$\hat{r}$: Vector unitario dirigido a lo largo del radiovector y dirigido hacia fuera

$\hat{\theta}$: Vector unitario tangente al círculo. La dirección de $\hat{\theta}$ viene determinada por la dirección de crecimiento del ángulo, cuando éste se mide en sentido contrario a las agujas del reloj desde el eje positivo de las x

Tanto $\hat{r}$ como $\hat{\theta}$ "se mueven con la partícula", es decir, cambian con el tiempo



$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\hat{\theta} - \frac{v^2}{r}\hat{r}$$

Partícula en un movimiento de rotación. Posición angular o posición de rotación

Supongamos un objeto que gira sobre sí mismo

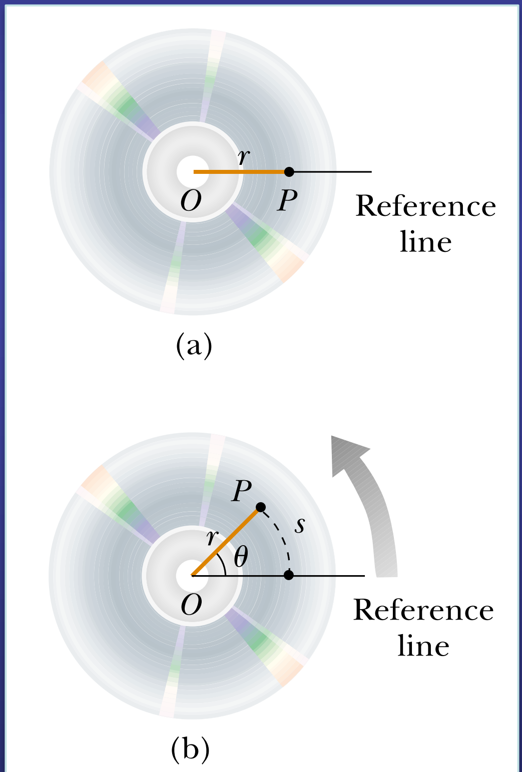
¿cómo describiríamos su posición en ese movimiento de rotación?.

La manera más fácil de describir su posición en ese movimiento de rotación es describiendo su orientación con respecto a alguna dirección de referencia fija.

Podemos utilizar un ángulo, medido a partir de una dirección de referencia, como una medida de la **posición de rotación** o **posición angular**.

Partícula en un movimiento de rotación. Posición angular o posición de rotación

Supongamos un objeto plano que gira alrededor de un eje fijo perpendicular al objeto y que pasa por un punto O.



La partícula indicada por el punto negro se encuentra a una distancia fija r del origen y gira alrededor de O describiendo un círculo de radio r.

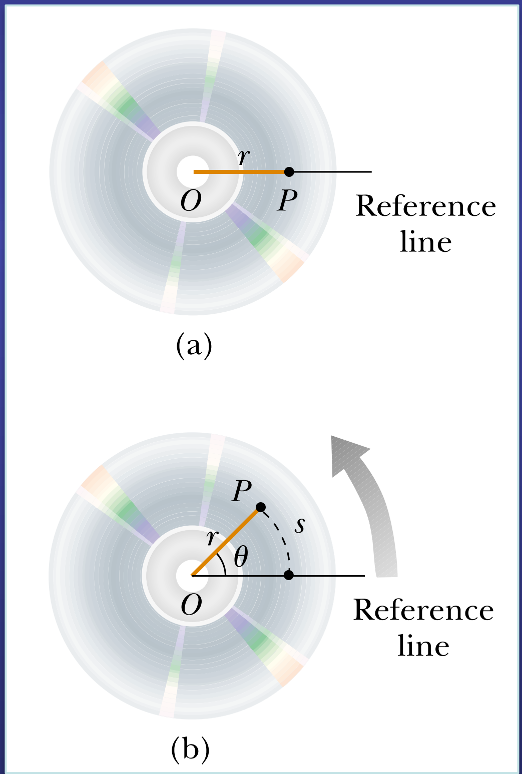
Todas las partículas del objeto describen un movimiento circular alrededor de O.

Hay una estrecha relación entre el movimiento de rotación del objeto y el movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria circular.

Un objeto que rota está compuesto por muchas partículas, cada una de las cuales se mueve con un movimiento circular (puede ser no uniforme)

Partícula en un movimiento de rotación. Coordenadas polares

Resulta conveniente representar la posición de una partícula mediante sus coordenadas polares



Se elige como centro del sistema de coordenadas polares un punto que coincida con el centro de las trayectorias circulares de las partículas

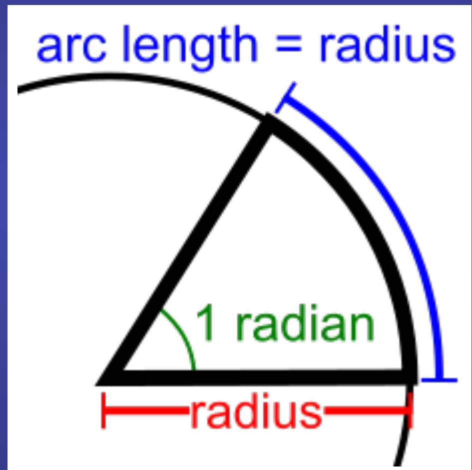
En este sistema de referencia, la única coordenada de una determinada partícula que cambia con el tiempo es θ, permaneciendo r constante

A medida que un partícula del objeto se mueve a lo largo del círculo de radio r desde el eje x positivo (θ = 0) hasta el punto P, se está moviendo a lo largo de un arco de longitud s, que está relacionado con el ángulo θ por la expresión

$$s = r\theta \qquad \theta = \frac{s}{r}$$

Partícula con movimiento circular: definición de radián

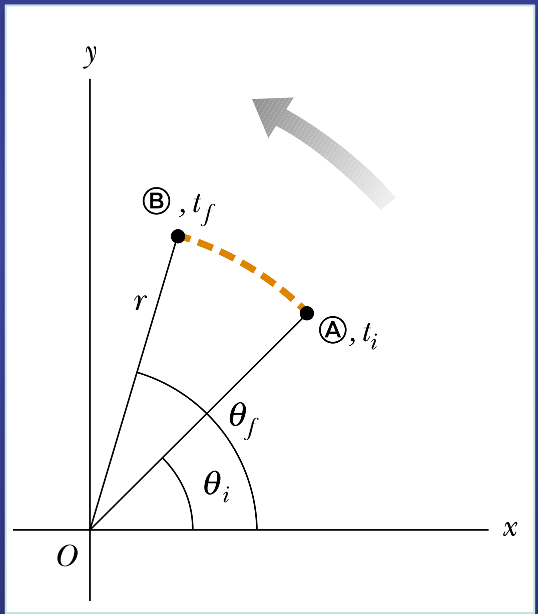
Un radián representa el ángulo central en una circunferencia que subtiende un arco cuya longitud es igual a la del radio.
Su símbolo es rad.



Equivalencia entre grados y radianes

Grados	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**	**270°**	**360°**
Radianes	**0**	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

Partícula con movimiento circular: definición de velocidades angulares



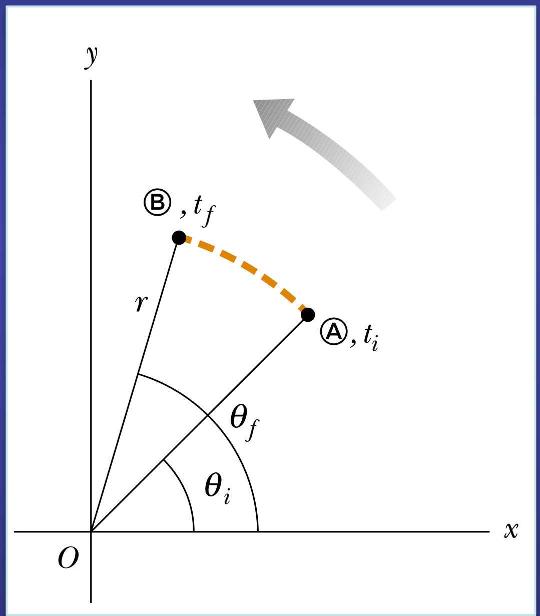
Mientras la partícula se mueve desde A hasta B en un tiempo $\Delta t = t_f - t_i$, el vector correspondiente al radio barre el ángulo $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$ que equivale al desplazamiento angular durante ese intervalo de tiempo

Ni la posición angular ni el desplazamiento angular están limitados al rango $0 < \theta < 2\pi$
(no hace falta "reiniciar" la posición angular a cero cada vez que la partícula cruza el eje x).

Definimos la velocidad angular media $\overline{\omega}$ como el cociente entre el desplazamiento angular y el intervalo de tiempo

$$\overline{\omega} \equiv \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Partícula con movimiento circular: definición de velocidades angulares



Definimos la velocidad angular media $\overline{\omega}$ como el cociente entre el desplazamiento angular y el intervalo de tiempo

$$\overline{\omega} \equiv \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

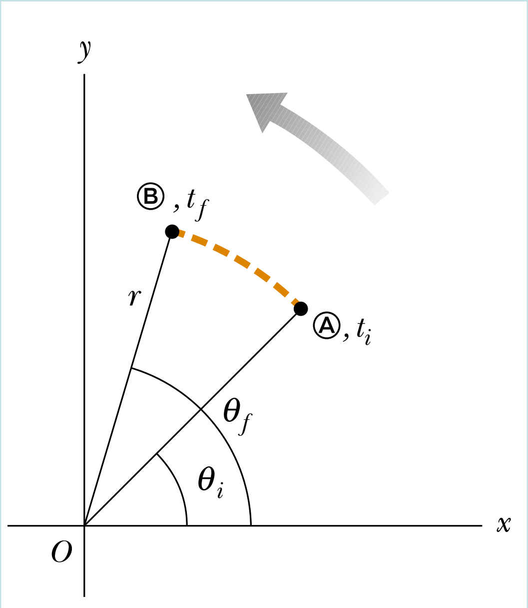
Por analogía con la velocidad de traslación, la velocidad angular instantánea se define como

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Unidades: rad/s o s^{-1}

Si adoptamos el convenio de que el eje fijo de rotación es el eje z, entonces diremos que ω es positiva cuando θ aumente (movimiento en sentido contrario del sentido del reloj y negativo en caso contrario

Partícula con movimiento circular: definición de aceleraciones angulares



Si la velocidad angular instantánea de una partícula cambia de ω_i a ω_f en el intervalo de tiempo Δt, la partícula tiene una aceleración angular

Aceleración angular media

$$\overline{\alpha} \equiv \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Por analogía con la aceleración de traslación, la aceleración angular instantánea se define como

$$\alpha \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

Unidades: rad/s^2 o s^{-2}

Partícula con movimiento circular: dirección de velocidad y aceleración angular

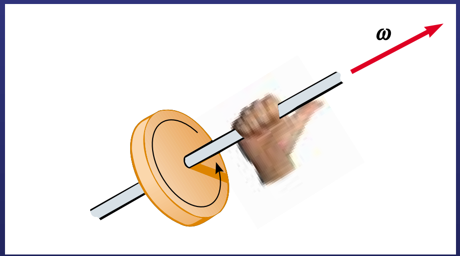
No se ha asociado ninguna dirección con la velocidad angular ni la aceleración angular

Siendo estrictos, la velocidad y la aceleración angular instantánea definidas anteriormente son los módulos de las correspondientes magnitudes vectoriales

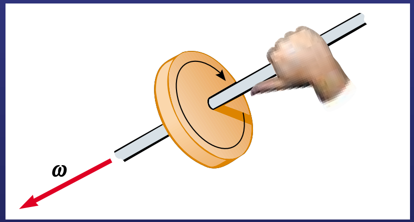
En el caso de rotación alrededor de un eje fijo, la única dirección que permite especificar de forma unívoca el movimiento de rotación es la dirección a lo largo del eje

La dirección de ω se orienta a lo largo del eje de rotación.

Por convenio, se considera que el sentido de ω es saliente con respecto al plano en el diagrama cuando la rotación es en el sentido contrario a las agujas del reloj



Por convenio, se considera que el sentido de ω es entrante con respecto al plano en el diagrama cuando la rotación es en el sentido de las agujas del reloj



Partícula con movimiento circular: dirección de velocidad y aceleración angular

No se ha asociado ninguna dirección con la velocidad angular ni la aceleración angular

Siendo estrictos, la velocidad y la aceleración angular instantánea definidas anteriormente son los módulos de las correspondientes magnitudes vectoriales

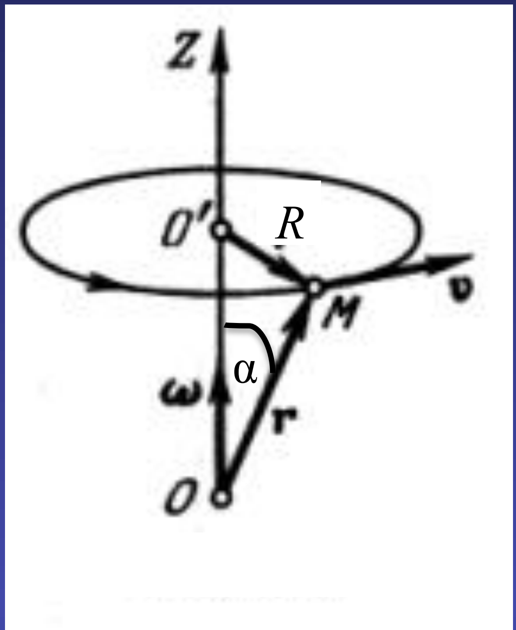
En el caso de rotación alrededor de un eje fijo, la única dirección que permite especificar de forma unívoca el movimiento de rotación es la dirección a lo largo del eje

La dirección de α se deduce de su definición vectorial como $d\omega/dt$

La dirección de la aceleración es la misma que la de la velocidad angular si la velocidad angular (el módulo de ω) aumenta con el tiempo

La dirección de la aceleración es antiparalela a la velocidad angular si la velocidad angular (el módulo de ω) disminuye con el tiempo

Vector velocidad angular



Vector velocidad angular

Módulo: celeridad angular

Dirección: perpendicular al plano del movimiento

Sentido: tornillo a derechas

Como $R = r \;\sin\alpha \Rightarrow v = \omega r \;\sin\alpha$

sugiere que $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Derivando el vector velocidad, obtenemos la aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\vec{\alpha}\times\vec{r}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega}\times\vec{v}}_{\vec{a}_r}$$

Cinemática de rotación: cuerpo rígido con aceleración angular constante

En el caso de movimiento de rotación alrededor de un eje fijo, el movimiento acelerado más simple es el movimiento bajo aceleración angular constante

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \alpha dt$$

Y además $\omega = \omega_i \text{ en el instante } t_i = 0$

Podemos integrar esta expresión directamente para calcular la velocidad angular final

$$\int_{\omega_i}^{\omega_f} d\omega = \int_0^t \alpha dt \longrightarrow \omega_f = \omega_i + \alpha\, t$$

Cinemática de rotación:
cuerpo rígido con aceleración angular constante

Integrando una vez más obtenemos el ángulo en función del tiempo

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega \, dt$$

$$\text{con } \ \theta = \theta_i \ \text{ en el instante } \ t_i = 0$$

$$\int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta = \int_0^t \omega dt = \int_0^t (\omega_i + \alpha \, t) dt \longrightarrow \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha \, t^2$$

Cinemática de rotación: cuerpo rígido con aceleración angular constante

$$\omega_f = \omega_i + \alpha\, t$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Si eliminamos el tiempo de la primera ecuación y sustituimos en la segunda

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$$

Y eliminando la aceleración angular

$$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$$

Cinemática de rotación: cuerpo rígido con aceleración angular constante

Kinematic Equations for Rotational and Linear Motion Under Constant Acceleration

Rotational Motion About Fixed Axis	Linear Motion
$\omega_f = \omega_i + \alpha t$	$v_f = v_i + at$
$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega_f{}^2 = \omega_i{}^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$	$v_f{}^2 = v_i{}^2 + 2a(x_f - x_i)$
$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_i + v_f)t$

Las expresiones cinemáticas para el movimiento de rotación bajo aceleración angular constante tienen la misma forma matemática que las del movimiento de traslación bajo aceleración de traslación constante, sustituyendo

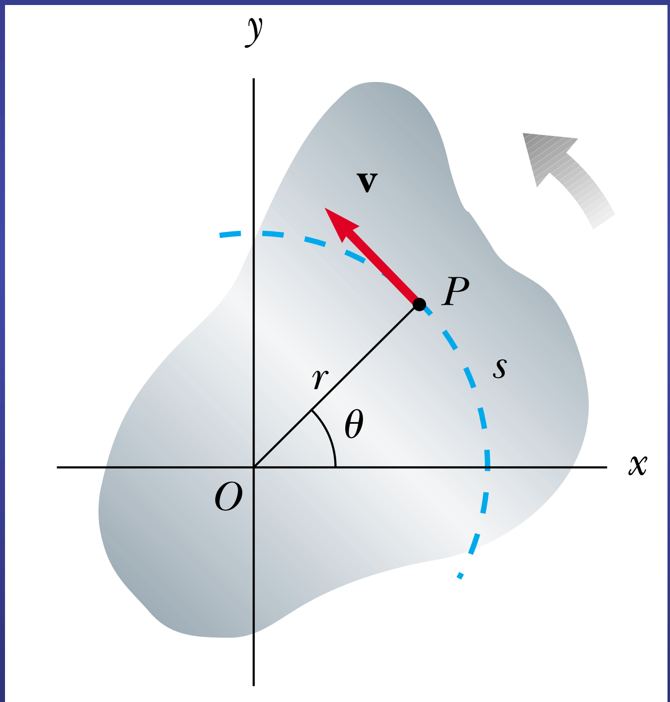
$$x \longrightarrow \theta$$

$$v \longrightarrow \omega$$

$$a \longrightarrow \alpha$$

Relaciones entre las magnitudes de rotación y traslación

Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo, cada partícula del cuerpo se mueve alrededor de un círculo cuyo centro es el eje de giro



Una partícula de un cuerpo rígido en rotación se mueve en un círculo de radio r alrededor del eje z

Dado que la partícula se mueve en una trayectoria circular, su vector velocidad es siempre perpendicular a la trayectoria (a menudo se denomina velocidad tangencial)

El módulo de la velocidad tangencial viene dado por

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Donde s es la distancia recorrida por la partícula a lo largo de la trayectoria circular

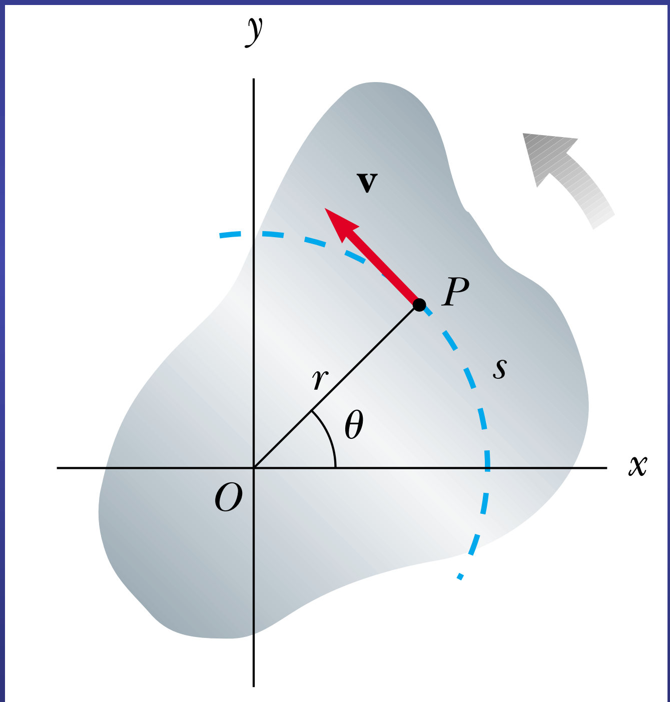
El módulo de la velocidad tangencial de la partícula es igual a la distancia de la partícula al eje de giro multiplicada por la velocidad angular de la partícula

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$v = r\omega$$

Relaciones entre las magnitudes de rotación y traslación

Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo, cada partícula del cuerpo se mueve alrededor de un círculo cuyo centro es el eje de giro



Una partícula de un cuerpo rígido en rotación se mueve en un círculo de radio r alrededor del eje z

El módulo de la velocidad tangencial de la partícula es igual a la distancia de la partícula al eje de giro multiplicada por la velocidad angular de la partícula

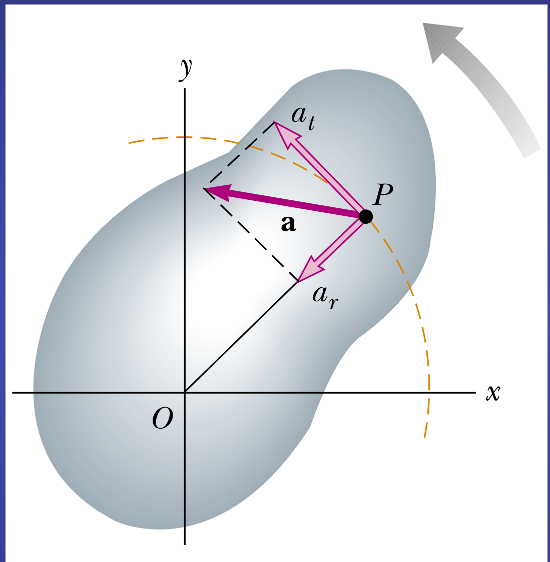
$$v = r\omega$$

Aunque cada punto del sólido rígido tenga la misma velocidad angular, no todos los puntos tienen la misma velocidad tangencial, puesto que r cambia de punto a punto.

La velocidad tangencial de un punto en un objeto que rota aumenta según nos separamos del eje de giro

Relaciones entre las magnitudes de rotación y traslación

Podemos establecer una relación entre la aceleración angular de la partícula y su aceleración tangencial a_t , cuya componente es tangente a la trayectoria del movimiento



$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

$$a_t = r\alpha$$

La componente tangencial de la aceleración de traslación de una partícula que experimenta un movimiento circular es igual a la distancia de la partícula al eje de giro multiplicada por la aceleración angular

Pero la aceleración de traslación también tiene una componente centrípeta

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2$$

Aceleración de traslación total

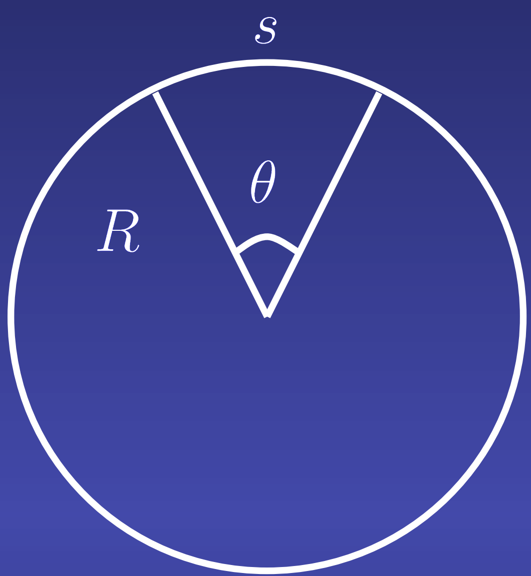
$$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_c}$$

Módulo de la aceleración de traslación total

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega$$

Transparencias de soporte

Partícula con movimiento circular: Celeridad angular



El desplazamiento lineal es igual al radio por el ángulo

$$s = R\theta$$

Definimos el módulo de la velocidad instantánea como

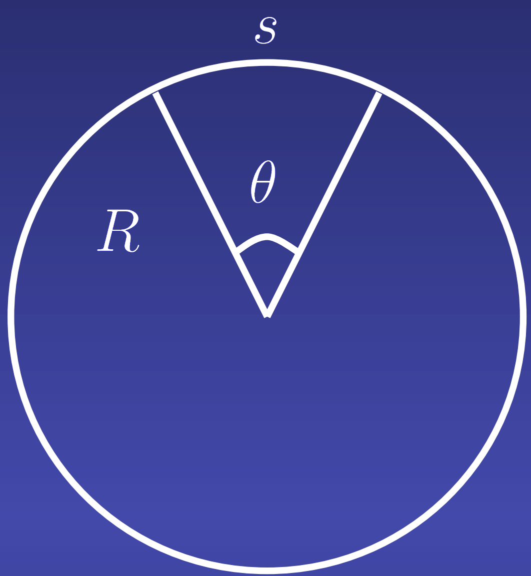
$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(R\theta) = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

Se define a la celeridad angular como:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Unidades: (rad/s)

Partícula con movimiento circular: Módulo de la aceleración angular



El desplazamiento lineal es igual al radio por el ángulo

$$s = R\theta$$

Se define la aceleración angular como:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

Partícula con movimiento circular uniforme: celeridad angular constante $\omega = \text{ constante}$

Se define el periodo T como el tiempo necesario para completar una vuelta. El periodo se mide en segundos.

Se define la frecuencia ν como el número de vueltas que la partícula completa en un segundo. La frecuencia se mide en (revoluciones/segundo) = Hertz

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Celeridad angular $$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Por definición $$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$ **⇒ integrando** $$\theta = \theta_0 + \omega t$$

Partícula con movimiento circular uniformemente acelerado: aceleración angular constante $\alpha = \text{constante}$

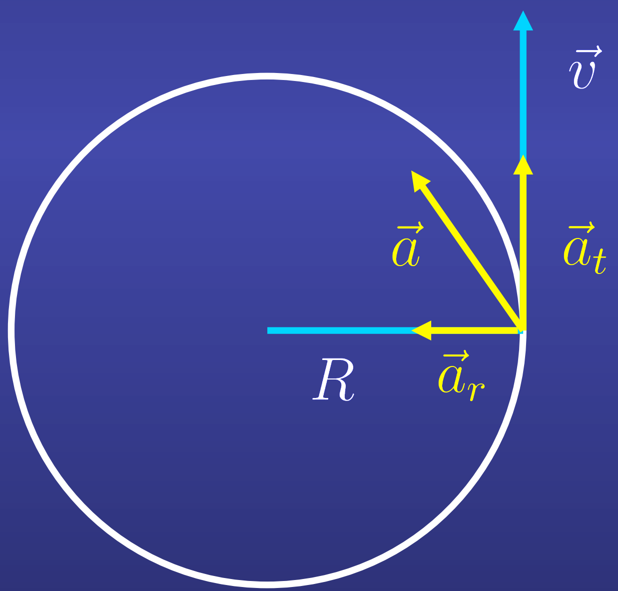
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad \Rightarrow \quad \omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \Rightarrow \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

Componentes intrínsecas de la aceleración: aceleración tangencial y radial en el movimiento circular

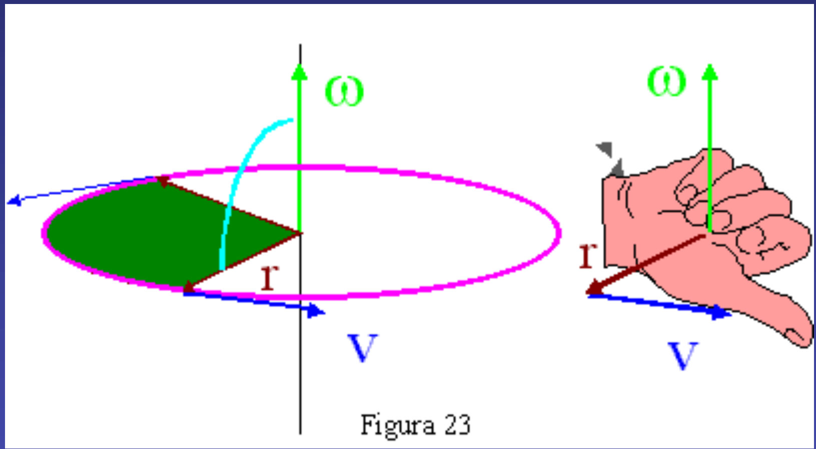
$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$



$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega) = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

$$a_r = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = \omega^2 R$$

Vector velocidad angular



Vector velocidad angular

Módulo: celeridad angular

Dirección: perpendicular al plano del movimiento

Sentido: tornillo a derechas

Como $R = r \ \sin\alpha \Rightarrow v = \omega r \ \sin\alpha$

Podemos escribir $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Derivando el vector velocidad, obtenemos la aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\vec{a}_r}$$