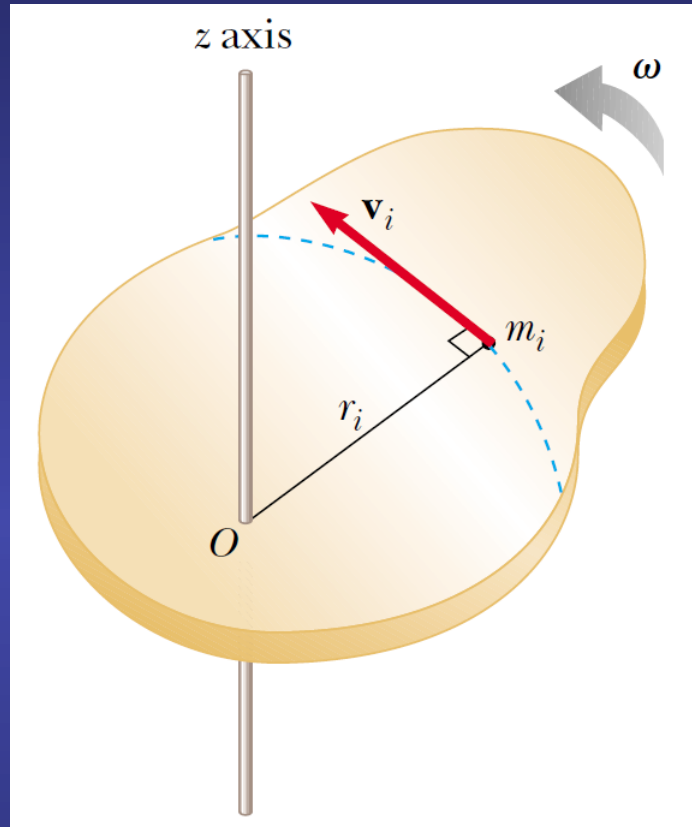


Movimiento de rotación



Javier Junquera



Bibliografía

FUENTE PRINCIPAL

Física, Volumen 1, 3° edición

Raymod A. Serway y John W. Jewett, Jr.

Ed. Thomson

ISBN: 84-9732-168-5

Capítulo 10

Física para Ciencias e Ingeniería, Volumen 1, 7° edición

Raymod A. Serway y John W. Jewett, Jr.

Cengage Learning

ISBN 978-970-686-822-0

Capítulo 10

Tips on Physics

R. P. Feynman, R. B. Leighton, y M. Sands

Ed. Pearson Addison Wesley

ISBN: 0-8053-9063-4

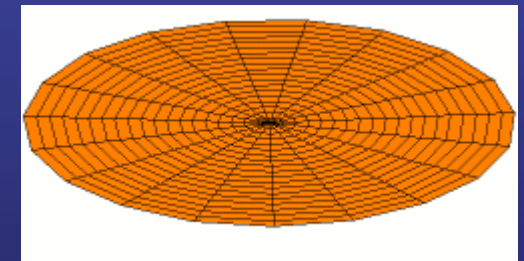
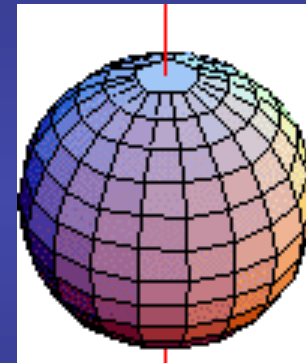
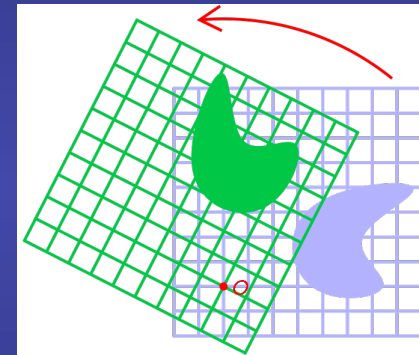
Capítulo 3-3 y siguientes

Definición de traslación, rotación y vibración

Traslación: las posiciones de todas las partículas del cuerpo se desplazan una misma cantidad.

Rotación: el movimiento de cambio de orientación de un sólido extenso de forma que, dado un punto cualquiera del mismo, este permanece a una distancia constante de un punto fijo.

Vibración: oscilación en torno a una posición de equilibrio



Partícula en un movimiento de rotación.

Posición angular o posición de rotación

Supongamos un objeto que gira sobre sí mismo

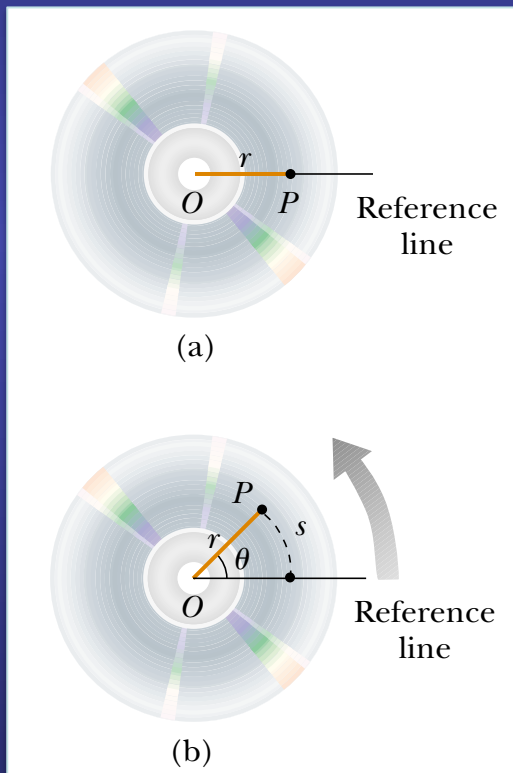
¿cómo describiríamos su posición en ese movimiento de rotación?.

La manera más fácil de describir su posición en ese movimiento de rotación es describiendo su orientación con respecto a alguna dirección de referencia fija.

Podemos utilizar un ángulo, medido a partir de una dirección de referencia, como una medida de la **posición de rotación** o **posición angular**.

Partícula en un movimiento de rotación. Posición angular o posición de rotación

Supongamos un objeto plano que gira alrededor de un eje fijo perpendicular al objeto y que pasa por un punto O .



La partícula indicada por el punto negro se encuentra a una distancia fija r del origen y gira alrededor de O describiendo un círculo de radio r .

Todas las partículas del objeto describen un movimiento circular alrededor de O .

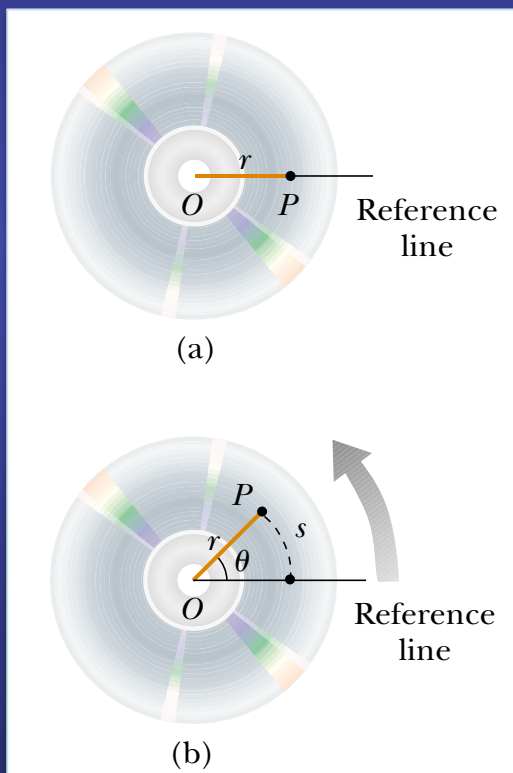
Hay una estrecha relación entre el movimiento de rotación del objeto y el movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria circular.

Un objeto que rota está compuesto por muchas partículas, cada una de las cuales se mueve con un movimiento circular (puede ser no uniforme)

Partícula en un movimiento de rotación.

Coordenadas polares

Resulta conveniente representar la posición de una partícula mediante sus coordenadas polares



Se elige como centro del sistema de coordenadas polares un punto que coincida con el centro de las trayectorias circulares de las partículas

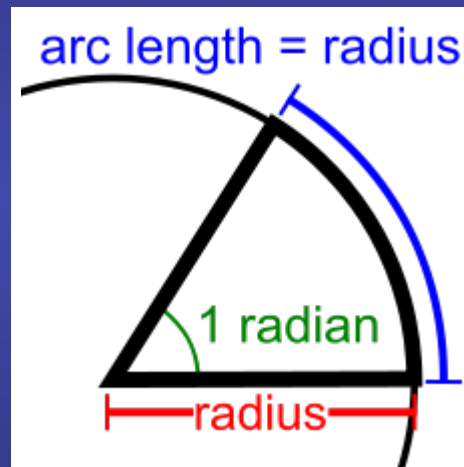
En este sistema de referencia, la única coordenada de una determinada partícula que cambia con el tiempo es θ , permaneciendo r constante

A medida que una partícula del objeto se mueve a lo largo del círculo de radio r desde el eje x positivo ($\theta = 0$) hasta el punto P , se está moviendo a lo largo de un arco de longitud s , que está relacionado con el ángulo θ por la expresión

$$s = r\theta \qquad \theta = \frac{s}{r}$$

Partícula con movimiento circular: definición de radián

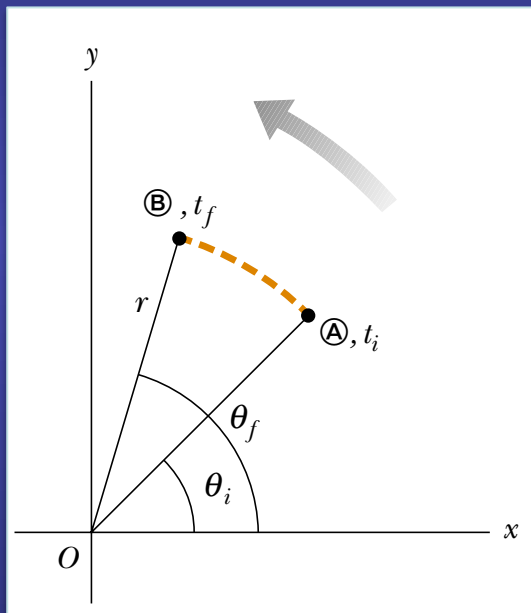
Un radián representa el ángulo central en una circunferencia que subtiende un arco cuya longitud es igual a la del radio.
Su símbolo es rad.



Equivalencia entre grados y radianes

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

Partícula con movimiento circular: definición de velocidades angulares



Mientras la partícula se mueve desde A hasta B en un tiempo $\Delta t = t_f - t_i$, el vector correspondiente al radio barre el ángulo $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$ que equivale al desplazamiento angular durante ese intervalo de tiempo

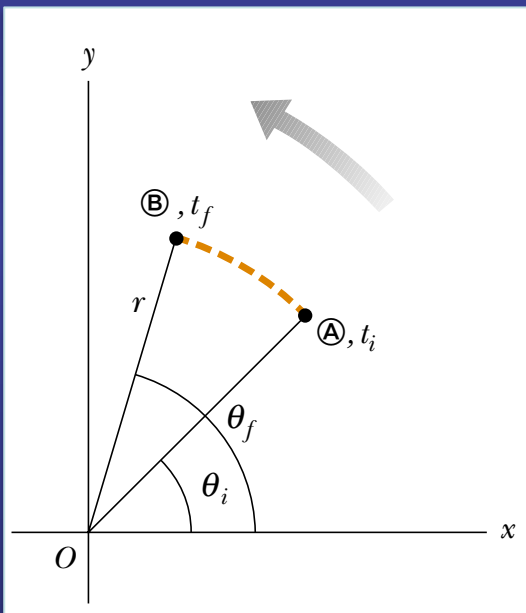
Ni la posición angular ni el desplazamiento angular están limitados al rango $0 < \theta < 2\pi$ (no hace falta “reiniciar” la posición angular a cero cada vez que la partícula cruza el eje x).

Definimos la velocidad angular media $\overline{\omega}$ como el cociente entre el desplazamiento angular y el intervalo de tiempo

$$\overline{\omega} \equiv \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Partícula con movimiento circular: definición de velocidades angulares

Definimos la velocidad angular media $\overline{\omega}$ como el cociente entre el desplazamiento angular y el intervalo de tiempo



$$\overline{\omega} \equiv \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Por analogía con la velocidad de traslación, la velocidad angular instantánea se define como

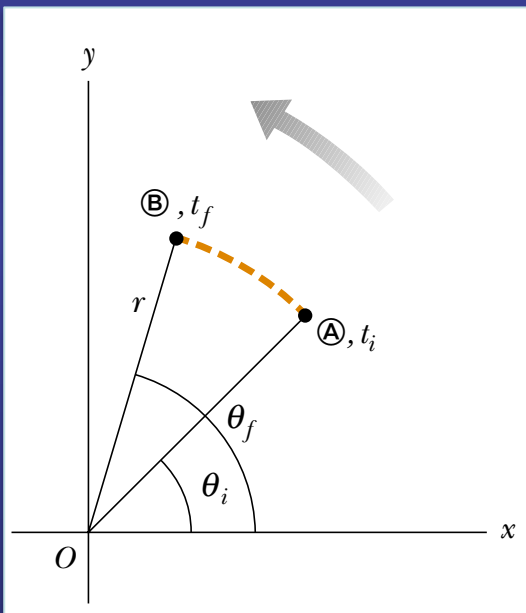
$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Unidades: rad/s o s⁻¹

Si adoptamos el convenio de que el eje fijo de rotación es el eje z, entonces diremos que ω es positiva cuando θ aumente (movimiento en sentido contrario del sentido del reloj y negativo en caso contrario

Partícula con movimiento circular: definición de aceleraciones angulares

Si la velocidad angular instantánea de una partícula cambia de ω_i a ω_f en el intervalo de tiempo Δt , la partícula tiene una aceleración angular



Aceleración angular media

$$\bar{\alpha} \equiv \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Por analogía con la aceleración de traslación, la aceleración angular instantánea se define como

$$\alpha \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

Unidades: rad/s² o s⁻²

Partícula con movimiento circular: dirección de velocidad y aceleración angular

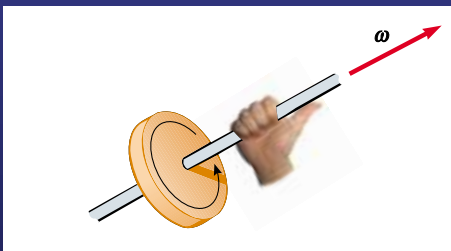
No se ha asociado ninguna dirección con la velocidad angular ni la aceleración angular

Siendo estrictos, la velocidad y la aceleración angular instantánea definidas anteriormente son los módulos de las correspondientes magnitudes vectoriales

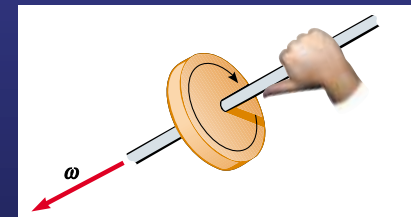
En el caso de rotación alrededor de un eje fijo, la única dirección que permite especificar de forma unívoca el movimiento de rotación es la dirección a lo largo del eje

La dirección de ω se orienta a lo largo del eje de rotación.

Por convenio, se considera que el sentido de ω es **saliente** con respecto al plano en el diagrama cuando la rotación es en el **sentido contrario a las agujas del reloj**



Por convenio, se considera que el sentido de ω es **entrante** con respecto al plano en el diagrama cuando la rotación es en el **sentido de las agujas del reloj**



Partícula con movimiento circular: dirección de velocidad y aceleración angular

No se ha asociado ninguna dirección con la velocidad angular ni la aceleración angular

Siendo estrictos, la velocidad y la aceleración angular instantánea definidas anteriormente son los módulos de las correspondientes magnitudes vectoriales

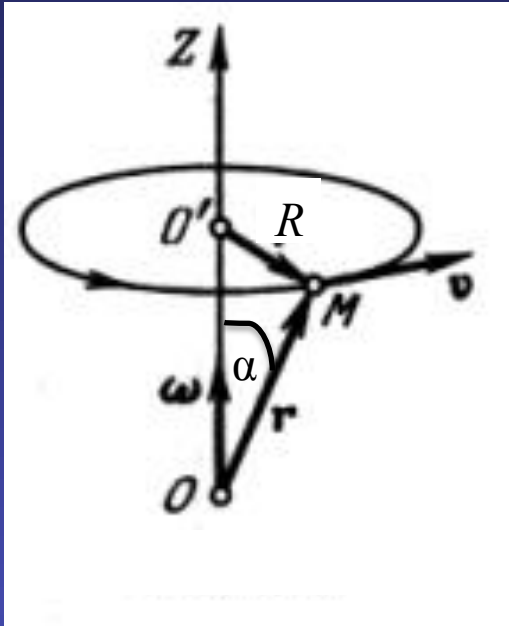
En el caso de rotación alrededor de un eje fijo, la única dirección que permite especificar de forma unívoca el movimiento de rotación es la dirección a lo largo del eje

La dirección de α se deduce de su definición vectorial como $d\omega/dt$

La dirección de la aceleración es la misma que la de la velocidad angular si la velocidad angular (el módulo de ω) aumenta con el tiempo

La dirección de la aceleración es antiparalela a la velocidad angular si la velocidad angular (el módulo de ω) disminuye con el tiempo

Vector velocidad angular



Vector velocidad angular

Módulo: celeridad angular

Dirección: perpendicular al plano del movimiento

Sentido: tornillo a derechas

Como $R = r \sin \alpha \Rightarrow v = \omega r \sin \alpha$

sugiere que $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Derivando el vector velocidad, obtenemos la aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}_t \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $\vec{a}_t$ $\vec{a}_r$

Cinemática de rotación: cuerpo rígido con aceleración angular constante

En el caso de movimiento de rotación alrededor de un eje fijo, el movimiento acelerado más simple es el movimiento bajo aceleración angular constante

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \alpha dt$$

Y además $\omega = \omega_i$ en el instante $t_i = 0$

Podemos integrar esta expresión directamente para calcular la velocidad angular final

$$\int_{\omega_i}^{\omega_f} d\omega = \int_0^t \alpha dt \rightarrow \omega_f = \omega_i + \alpha t$$

Cinemática de rotación: cuerpo rígido con aceleración angular constante

Integrando una vez más obtenemos el ángulo en función del tiempo

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt$$

con $\theta = \theta_i$ en el instante $t_i = 0$

$$\int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta = \int_0^t \omega dt = \int_0^t (\omega_i + \alpha t) dt \rightarrow \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

Cinemática de rotación: cuerpo rígido con aceleración angular constante

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

Si eliminamos el tiempo de la primera ecuación y sustituimos en la segunda

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$$

Y eliminando la aceleración angular

$$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$$

Cinemática de rotación: cuerpo rígido con aceleración angular constante

Kinematic Equations for Rotational and Linear Motion Under Constant Acceleration

Rotational Motion About Fixed Axis

$$\begin{aligned}\omega_f &= \omega_i + \alpha t \\ \theta_f &= \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega_f^2 &= \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \\ \theta_f &= \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t\end{aligned}$$

Linear Motion

$$\begin{aligned}v_f &= v_i + at \\ x_f &= x_i + v_i t + \frac{1}{2} at^2 \\ v_f^2 &= v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \\ x_f &= x_i + \frac{1}{2}(v_i + v_f)t\end{aligned}$$

Las expresiones cinemáticas para el movimiento de rotación bajo aceleración angular constante tienen la misma forma matemática que las del movimiento de traslación bajo aceleración de traslación constante, sustituyendo

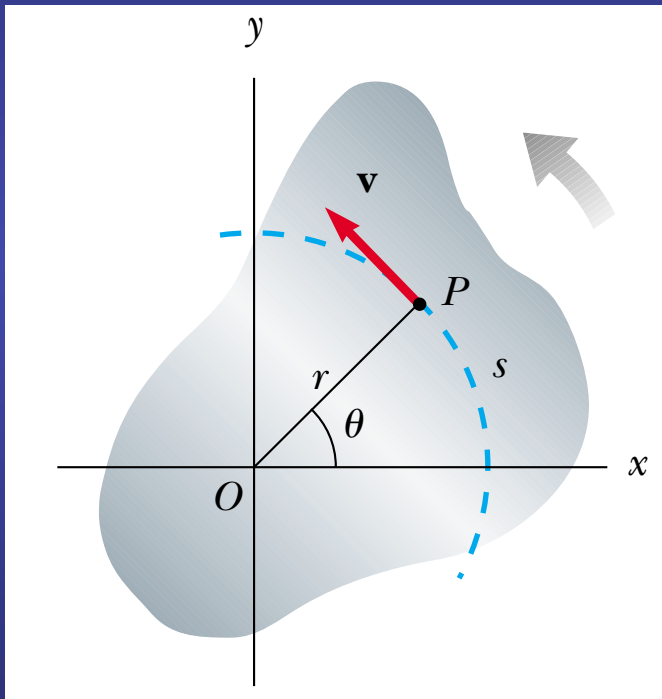
$$x \rightarrow \theta$$

$$v \rightarrow \omega$$

$$a \rightarrow \alpha$$

Relaciones entre las magnitudes de rotación y traslación

Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo, cada partícula del cuerpo se mueve alrededor de un círculo cuyo centro es el eje de giro



Una partícula de un cuerpo rígido en rotación se mueve en un círculo de radio r alrededor del eje z

Dado que la partícula se mueve en una trayectoria circular, su vector velocidad es siempre perpendicular a la trayectoria
(a menudo se denomina **velocidad tangencial**)

El módulo de la velocidad tangencial viene dado por

$$v = \frac{ds}{dt}$$

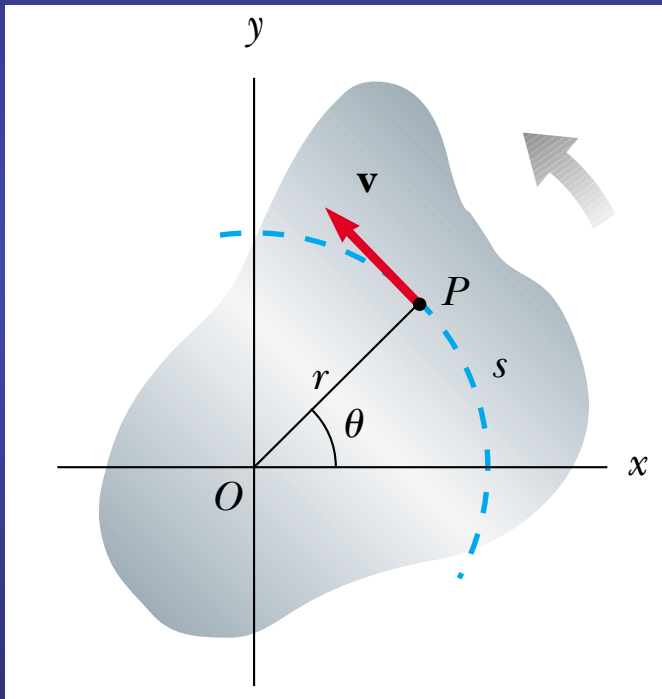
Donde s es la distancia recorrida por la partícula a lo largo de la trayectoria circular

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \quad v = r\omega$$

El módulo de la velocidad tangencial de la partícula es igual a la distancia de la partícula al eje de giro multiplicada por la velocidad angular de la partícula

Relaciones entre las magnitudes de rotación y traslación

Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo, cada partícula del cuerpo se mueve alrededor de un círculo cuyo centro es el eje de giro



Una partícula de un cuerpo rígido en rotación se mueve en un círculo de radio r alrededor del eje z

El módulo de la velocidad tangencial de la partícula es igual a la distancia de la partícula al eje de giro multiplicada por la velocidad angular de la partícula

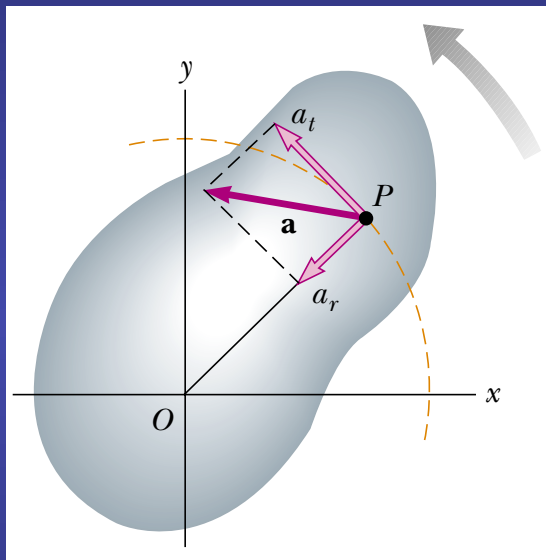
$$v = r\omega$$

Aunque cada punto del sólido rígido tenga la misma velocidad angular, no todos los puntos tienen la misma velocidad tangencial, puesto que r cambia de punto a punto.

La velocidad tangencial de un punto en un objeto que rota aumenta según nos separamos del eje de giro

Relaciones entre las magnitudes de rotación y traslación

Podemos establecer una relación entre la aceleración angular de la partícula y su aceleración tangencial a_t , cuya componente es tangente a la trayectoria del movimiento



$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}$$

$$a_t = r\alpha$$

La componente tangencial de la aceleración de traslación de una partícula que experimenta un movimiento circular es igual a la distancia de la partícula al eje de giro multiplicada por la aceleración angular

Pero la aceleración de traslación también tiene una componente centrípeta

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2$$

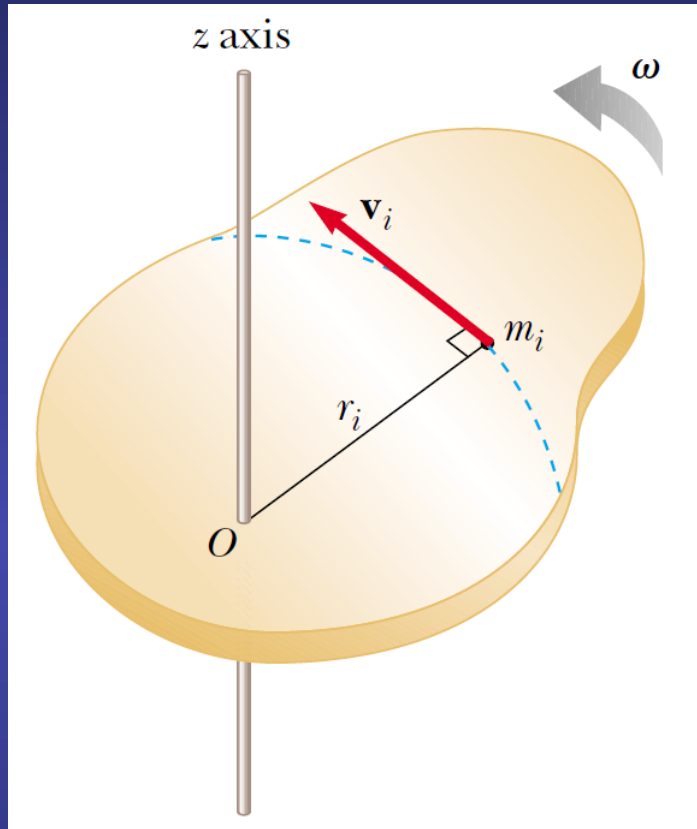
Aceleración de traslación total

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

Módulo de la aceleración de traslación total

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Energía cinética rotacional



Supongamos que podemos considerar el objeto como un conjunto de partículas que rotan alrededor del eje z con una velocidad angular ω

Cada una de esas partículas tiene una energía cinética caracterizada por su masa y el módulo de su velocidad tangencial

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Aunque todas las partículas tengan la misma velocidad angular, las celeridades tangenciales individuales dependerán de su distancia al eje de rotación

$$v_i = r_i \omega$$

La energía cinética total del sólido rígido vendrá dada por la suma de las energías cinéticas de todas las partículas que lo componen

$$K = \sum_{i=1}^n K_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

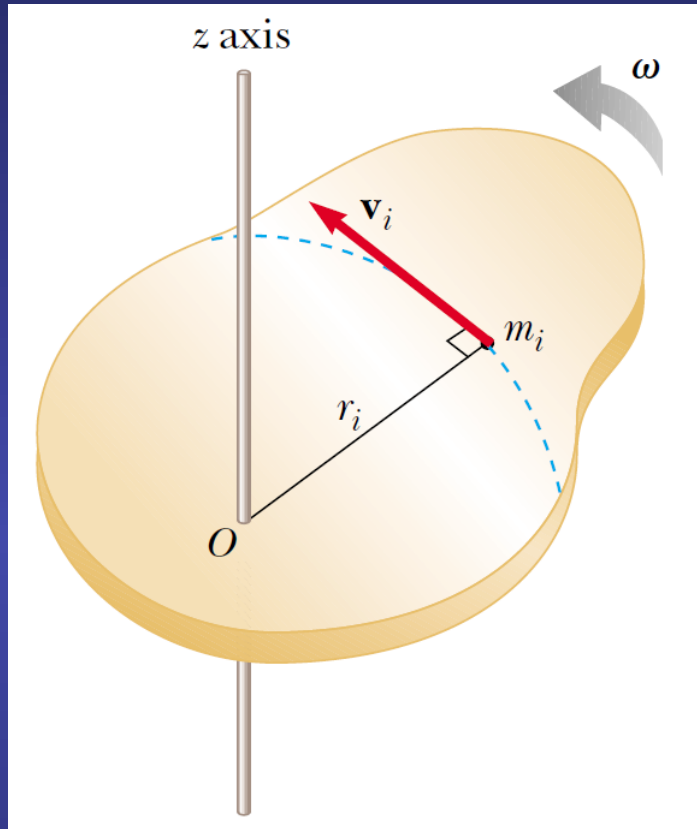
Momento de inercia

El momento de inercia se define como

$$I \equiv \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Tiene por dimensiones ML^2 , siendo sus unidades en el SI ($kg \cdot m^2$)

Energía cinética rotacional



La energía cinética rotacional toma el valor

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

La energía cinética rotacional no es una nueva forma de energía.

Simplemente se trata de energía cinética ordinaria (se ha calculado como la suma de la energía cinética de las partículas contenidas en el sólido rígido).

Sin embargo, la nueva expresión matemática es más conveniente cuando tratamos con rotaciones (siempre que sepamos como calcular el momento de inercia)

Ahora, en el lado correspondiente al almacenamiento, dentro de la ecuación de conservación de la energía, deberemos ahora considerar que el término de la energía cinética es la suma de los cambios tanto en la energía cinética de traslación como de rotación.

Analogía entre la energía cinética asociada con las rotaciones y la energía cinética asociada con movimiento lineal

La energía cinética de traslación

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

El papel de ...

m

v

La energía cinética rotacional

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

... lo juega

I

ω

Esto va a ocurrir cada vez que comparemos una ecuación del movimiento lineal con su correspondiente análogo en el movimiento rotacional

El momento de inercia es una medida de la resistencia de un objeto a cambiar su estado de movimiento rotacional

Analogías y diferencias entre masa y momento de inercia

Masa

Momento de inercia

Analogías

Es una medida de la resistencia de un objeto a cambiar su estado de movimiento lineal

Es una medida de la resistencia de un objeto a cambiar su estado de movimiento rotacional

Diferencias

Es una propiedad intrínseca del objeto (asumiendo velocidades no relativistas)

Depende de la elección del eje de rotación (no hay un valor único del momento de inercia de un objeto).

No sólo depende de la masa, sino de cómo está distribuida la masa alrededor del eje de giro.

Es un escalar

Es un tensor

Cálculo del momento de inercia en un sistema discreto

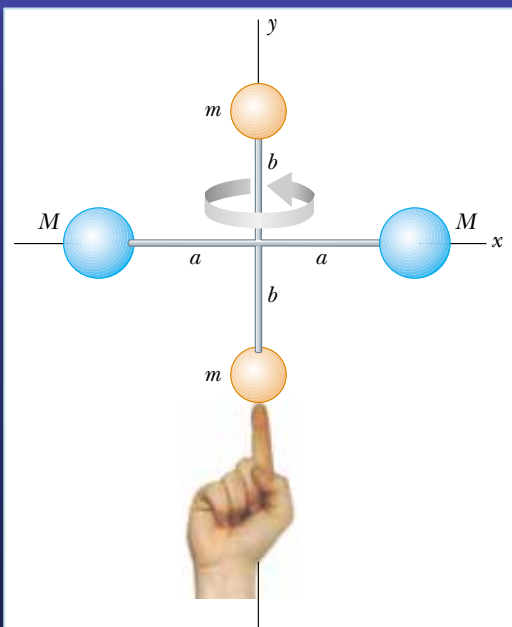
Sistema discreto

$$I \equiv \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Ejemplo: cuatro pequeñas esferas están unidas a las cuatro esquinas de un marco de masa despreciable que está situado sobre el plano xy .

Si la rotación se produce alrededor del eje y con celeridad angular ω , calcular:

- el momento de inercia I_y con respecto al eje y
- la energía cinética de rotación con respecto a dicho eje.



Las dos esferas de masa m que están situadas en el eje y no contribuyen a I_y

$$I_y = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 = 2Ma^2$$

$$K = \frac{1}{2} I_y \omega^2 = \frac{1}{2} (2Ma^2) \omega^2 = Ma^2 \omega^2$$

Las dos esferas de masa m no se mueven alrededor del eje y y, por tanto, no tienen energía cinética

Cálculo del momento de inercia en un sistema discreto

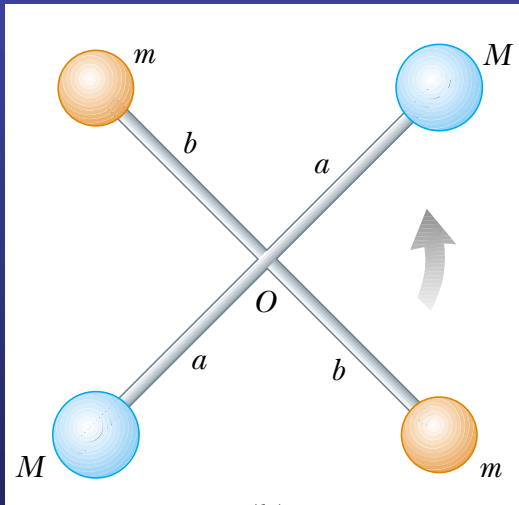
Sistema discreto

$$I \equiv \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Ejemplo: cuatro pequeñas esferas están unidas a las cuatro esquinas de un marco de masa despreciable que está situado sobre el plano xy .

Si la rotación se produce alrededor del **eje z** con celeridad angular ω , calcular:

- el momento de inercia **I_z con respecto al eje z**
- la energía cinética de rotación con respecto a dicho eje.



Dado que r_i representa la distancia perpendicular al eje de giro

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 = 2Ma^2 + 2mb^2$$

$$K = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} (2Ma^2 + 2mb^2) \omega^2 = (Ma^2 + mb^2) \omega^2$$

El momento de inercia y la energía cinética de rotación asociada a una celeridad angular determinada cambia con respecto al eje de giro

Cálculo del momento de inercia en un sistema continuo

En el caso de un objeto continuo:

1. Se divide el objeto en muchos elementos infinitesimales de masa Δm_i
2. Aproximamos el momento de inercia del sólido continuo a partir de la expresión para un sistema discreto

$$I \approx \sum_i r_i^2 \Delta m_i$$

donde r_i^2 es el cuadrado de la distancia entre el elemento de masa finita y el eje de giro

3. Tomamos el límite de la suma cuando $\Delta m_i \rightarrow 0$. En este caso, la suma se convierte en una integral.

$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$$

4. Generalmente es más fácil calcular momentos de inercia en términos de volumen de los elementos, más que en sus masas. Podemos hacer la transformación ya que $\rho = m/V$

$$dm = \rho dV \Rightarrow I = \int \rho r^2 dV$$

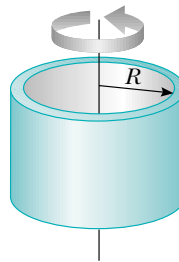
Si el sistema es homogéneo ρ es constante y la integral se puede evaluar para una geometría dada.

Momentos de inercia de diferentes sólidos rígidos con respecto a determinados ejes

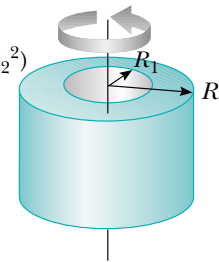
Table 10.2

Moments of Inertia of Homogeneous Rigid Objects with Different Geometries

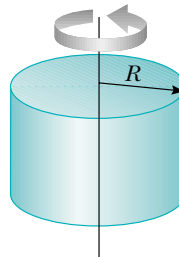
Hoop or thin cylindrical shell
 $I_{\text{CM}} = MR^2$



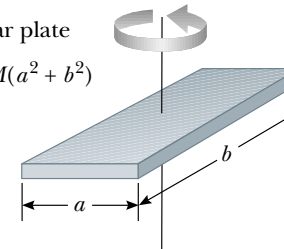
Hollow cylinder
 $I_{\text{CM}} = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$



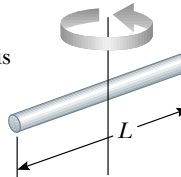
Solid cylinder or disk
 $I_{\text{CM}} = \frac{1}{2} MR^2$



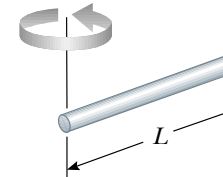
Rectangular plate
 $I_{\text{CM}} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$



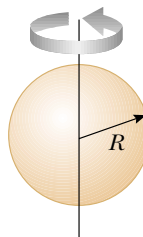
Long thin rod with rotation axis through center
 $I_{\text{CM}} = \frac{1}{12} ML^2$



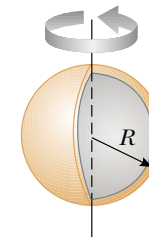
Long thin rod with rotation axis through end
 $I = \frac{1}{3} ML^2$



Solid sphere
 $I_{\text{CM}} = \frac{2}{5} MR^2$

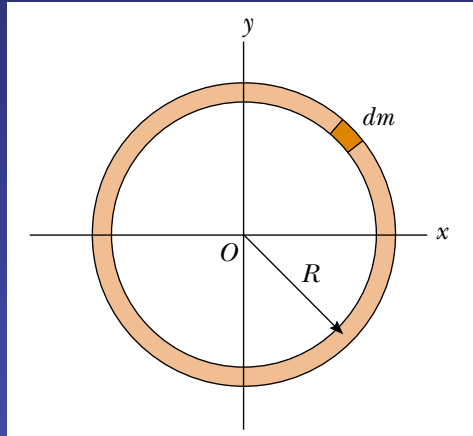


Thin spherical shell
 $I_{\text{CM}} = \frac{2}{3} MR^2$



Cálculos de momentos de inercia:

Momento de inercia de un anillo con respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro



Consideremos un anillo de masa M y radio R

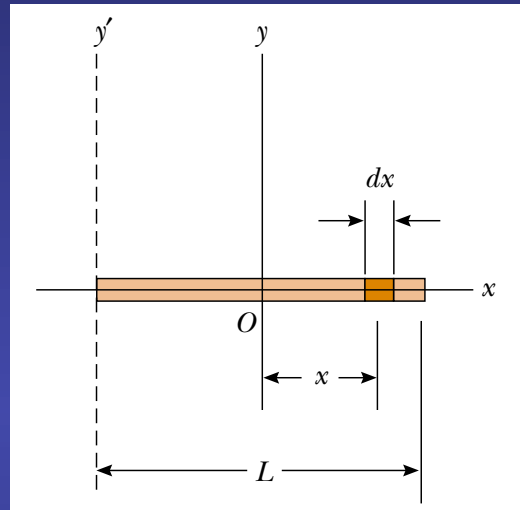
El eje de rotación es el eje de simetría del anillo, perpendicular al plano del mismo y que atraviesa su centro

Toda la masa se encuentra a una distancia $r = R$ y el momento de inercia es

$$I = \int r^2 dm = \int R^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$$

Cálculos de momentos de inercia:

Momento de inercia de un varilla uniforme con respecto a un eje perpendicular a la barra que pasa por su centro de masas



Consideremos una barra uniforme de longitud L y masa M

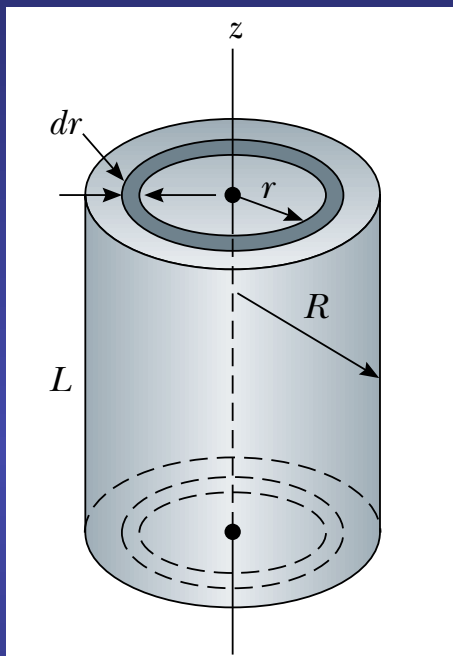
La zona sombreada de longitud dx tiene una masa dm igual a la masa por unidad de longitud λ multiplicada por dx

$$dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$$

$$I_y = \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{M}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12} M L^2$$

Cálculos de momentos de inercia:

Momento de inercia de un cilindro uniforme con respecto a su eje central



Dividimos el cilindro en muchas cortezas cilíndricas de radio r , grosor dr , y altura L

El volumen dV de cada corteza es igual al área de su sección transversal multiplicada por la altura

$$dV = L \, dA = (2\pi r dr) L$$

$$I = \int \rho r^2 dV = \int_0^R \rho r^2 (2\pi r L) dr = 2\pi \rho L \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi \rho L R^4$$

El volumen total del cilindro es $\pi R^2 L$, de modo que la densidad es

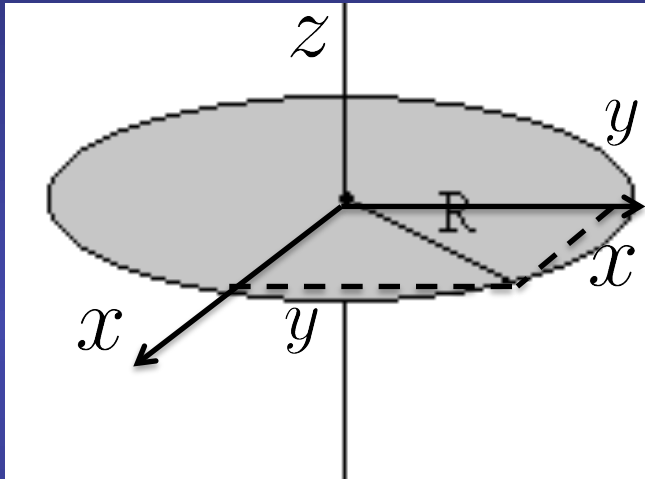
$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 L}$$

$$I = \frac{1}{2} \pi \rho L R^4 = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{M}{\pi R^2 L} \right) L R^4 = \frac{1}{2} M R^2$$

El resultado no depende de L . El resultado es aplicable tanto para un cilindro de gran longitud como para un disco plano

Cálculos de momentos de inercia:

Momento de inercia de un placa plana con respecto a un eje perpendicular a la misma



$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int dm \, y^2 \\ I_y &= \int dm \, x^2 \end{aligned} \right\} I_z = \int dm \, (x^2 + y^2) = I_x + I_y$$

El momento de inercia de un placa plana con respecto a un eje perpendicular a la misma es la suma de los momentos de inercia de la lámina con respecto a dos ejes contenidos en el plano de la misma que sean perpendiculares entre sí y que se corten en el punto por donde pasa el eje perpendicular

Teorema de Steiner

Los momentos de inercia de sólidos rígidos con una geometría simple (alta simetría) son relativamente fáciles de calcular si el eje de rotación coincide con un eje de simetría.

Sin embargo, los cálculos de momentos de inercia con respecto a un eje arbitrario puede ser engorroso, incluso para sólidos con alta simetría.

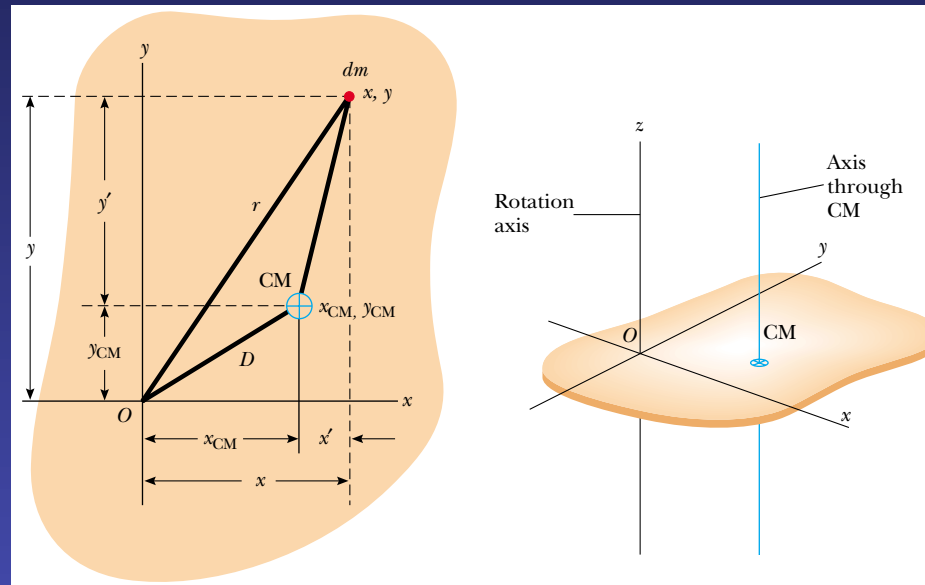
El **Teorema de Steiner** (o teorema del eje-paralelo) a menudo simplifican los cálculos.

Premisa: Supongamos que conocemos el momento de inercia con respecto a un eje que pase por el centro de masas de un objeto, I_{CM}

Teorema: Entonces podemos conocer el momento de inercia con respecto a cualquier otro eje paralelo al primero y que se encuentra a una distancia D

$$I = I_{CM} + MD^2$$

Teorema de Steiner: demostración



Supongamos que un objeto rota en el plano xy alrededor del eje z .

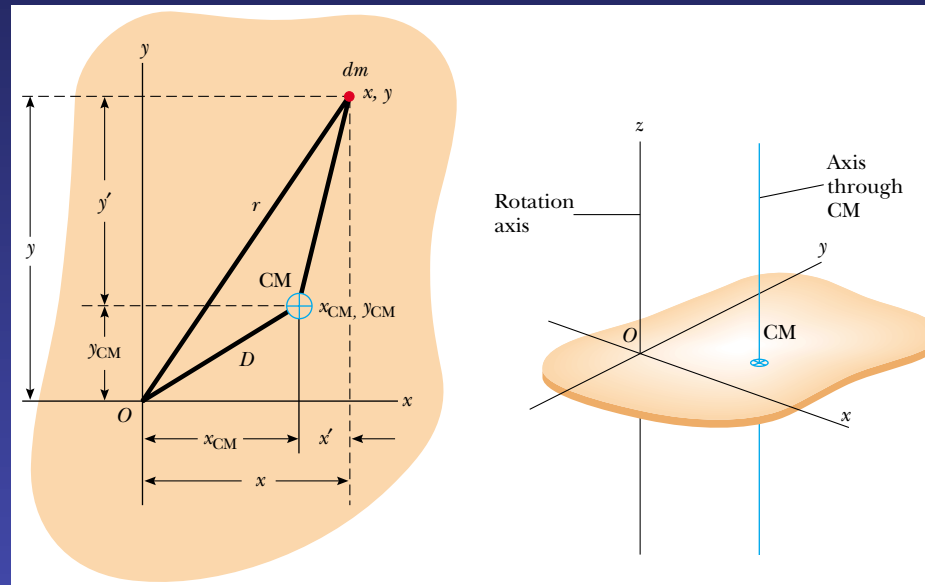
Supongamos además que las coordenadas del centro de masas son x_{CM} e y_{CM}

Tomemos un elemento de masa dm situado en las coordenadas (x, y)

La distancia desde este elemento al eje de rotación (eje z) es $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Y el momento de inercia con respecto al eje z vale $I_z = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$

Teorema de Steiner: demostración



Tomemos un elemento de masa dm situado en las coordenadas (x, y)

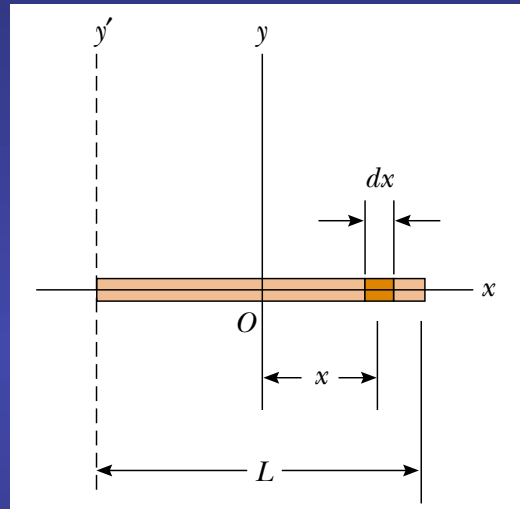
Si ahora escogemos un sistema de coordenadas con origen en el centro de masas del objeto, las nuevas coordenadas del elemento de masa serán (x', y')

$$x = x' + x_{CM} \quad y = y' + y_{CM}$$

$$\begin{aligned} I_z &= \int \left[(x' + x_{CM})^2 + (y' + y_{CM})^2 \right] dm \\ &= \int \left[(x')^2 + (y')^2 \right] dm + 2x_{CM} \int x' dm + 2y_{CM} \int y' dm + (x_{CM}^2 + y_{CM}^2) \int dm \\ &= I_{CM} + MD^2 \end{aligned}$$

Aplicación del teorema de Steiner

Consideremos de nuevo la varilla uniforme de masa M y longitud L .
Calcularemos el momento de inercia con respecto a un eje perpendicular a la barra que pasa por uno de sus extremos.



Como la distancia entre el centro de masas y el eje y' es $D = L/2$, el teorema de Steiner (o teorema de ejes paralelos) nos da:

$$I = I_{\text{CM}} + MD^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

Es cuatro veces más difícil cambiar el estado de rotación de una varilla que gira con respecto a uno de sus extremos que cambiar el estado de rotación de una varilla que gira con respecto a su centro

Radio de giro

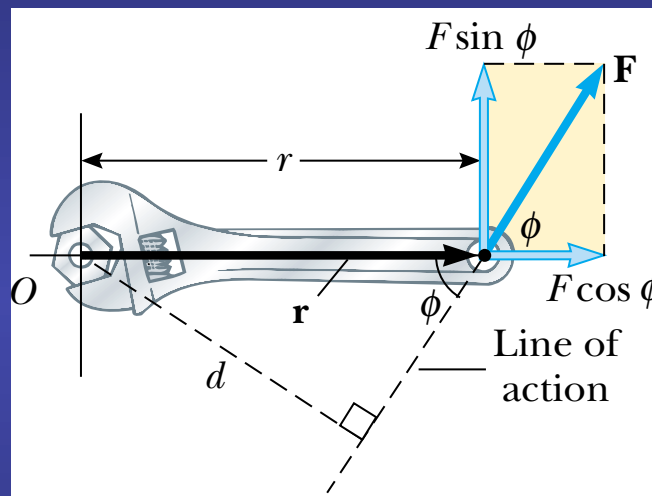
Es la distancia K a la que tendríamos que colocar toda la masa del cuerpo (suponiendo que está concentrada en un único punto) para obtener el mismo momento de inercia

$$I = mK^2$$

Momento (o par o torque) de una fuerza

Cuando se ejerce una fuerza sobre un cuerpo rígido que puede girar alrededor de un cierto eje gracias a un pivote, y la línea de acción de la fuerza no pasa a través de ese pivote, el cuerpo tiende a girar alrededor de ese eje

La línea de acción de una fuerza es una línea imaginaria colineal con el vector fuerza y que se extiende hasta al infinito en ambas direcciones

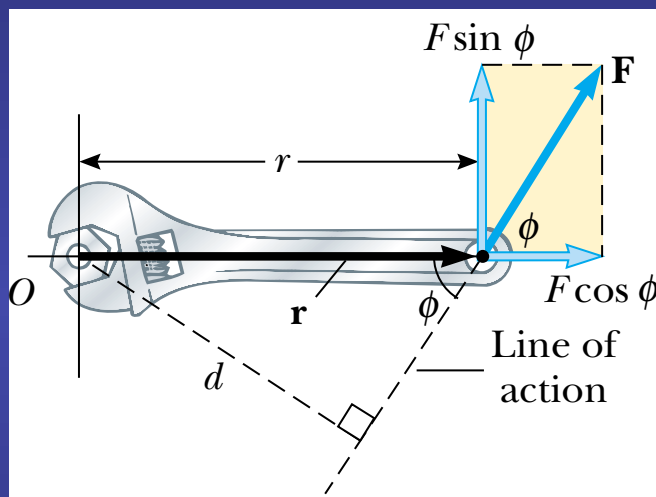


La tendencia de una fuerza a hacer que un cuerpo gire alrededor de un eje se mide mediante una magnitud vectorial denominada par (o momento axial) de la fuerza

El par es la causa de los cambios producidos en el movimiento de rotación y juega un papel en la dinámica de rotación análogo a las fuerzas en la dinámica de traslación

Momento (o par o torque) de una fuerza

Consideremos la llave inglesa que puede girar alrededor de un eje que pasa por O .
La fuerza aplicada $\vec{F}$ puede formar un ángulo ϕ con respecto al vector posición $\vec{r}$ que indica el punto de aplicación de la fuerza



Hasta ahora hemos definido el módulo, pero el momento de una fuerza es un vector

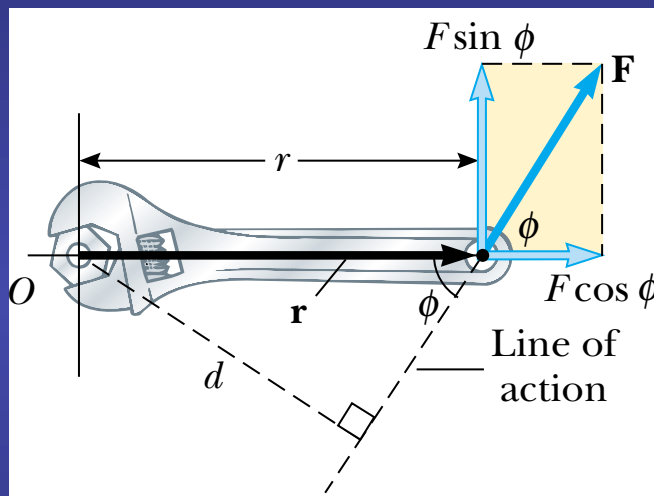
Definimos el módulo del momento asociado por la fuerza $\vec{F}$ como

$$\tau \equiv r F \sin \phi$$

El momento de la fuerza solo queda definido cuando se especifica un eje de referencia a partir del cual se determina la distancia r entre el pivote y el punto de aplicación de la fuerza

Interpretación de la fórmula del módulo del momento (I)

Consideremos la llave inglesa que puede girar alrededor de un eje que pasa por O .
La fuerza aplicada $\vec{F}$ puede formar un ángulo ϕ con respecto al vector posición $\vec{r}$ que indica el punto de aplicación de la fuerza



Solo la componente perpendicular provoca un giro alrededor del pivote

La componente de la fuerza $F \cos \phi$ paralela a $\vec{r}$ no contribuirá al giro alrededor del punto de pivote, porque su línea de acción pasa justamente a través del punto del pivote

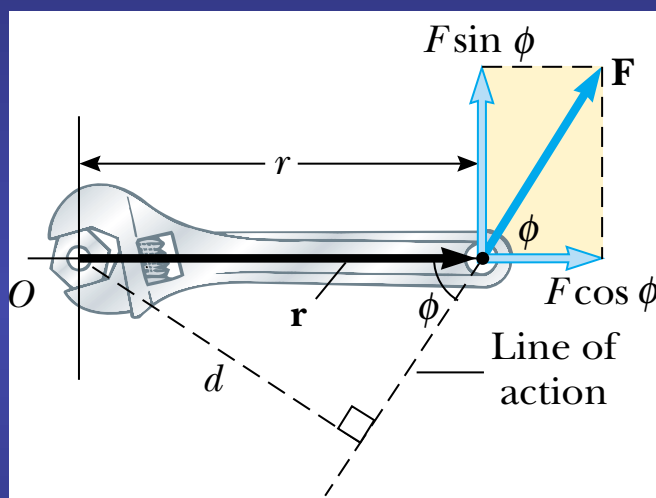
$$\tau \equiv r F \sin \phi$$

$$\tau = r(F \sin \phi)$$

El módulo del momento de la fuerza es el producto de la distancia al punto de aplicación de la fuerza multiplicada por la componente perpendicular de la fuerza

Interpretación de la fórmula del módulo del momento (II)

Consideremos la llave inglesa que puede girar alrededor de un eje que pasa por O .
La fuerza aplicada $\vec{F}$ puede formar un ángulo ϕ con respecto al vector posición $\vec{r}$ que indica el punto de aplicación de la fuerza



$$\tau \equiv r F \sin \phi$$

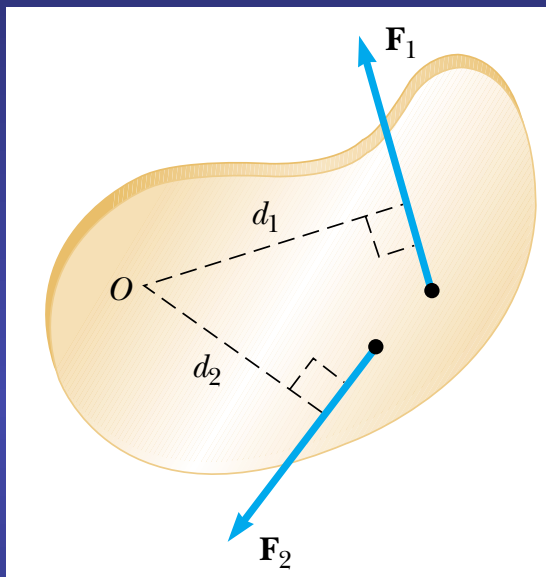
Si asociamos la función seno a la distancia r

$$\tau = F(r \sin \phi) = Fd$$

A la magnitud $d = r \sin \phi$ se la denomina **brazo del momento (o brazo de palanca)** de la fuerza $\vec{F}$ y representa la distancia perpendicular entre el eje de rotación y la línea de acción de $\vec{F}$

Momento de un sistema de fuerzas

Si dos o más fuerzas están actuando sobre un cuerpo rígido, cada una de ellas tiene una cierta tendencia a producir un movimiento de rotación alrededor del punto de pivote



Si el cuerpo está inicialmente en reposo:

$\vec{F}_2$ tiende a hacer girar el cuerpo en el sentido de las agujas del reloj

$\vec{F}_1$ tiende a hacer girar el cuerpo en el sentido contrario al de las agujas del reloj

Por convenio: signo negativo

Por convenio: signo positivo

$$\tau_{\text{neto}} = \tau_1 + \tau_2 = F_1 d_1 - F_2 d_2$$

No se debe confundir momento con fuerza

Las fuerzas pueden producir cambios en los movimientos lineales (segunda ley de Newton)

Las fuerzas también pueden producir cambios en los movimientos de rotación, per su efectividad no solo depende del módulo de la fuerza sino del punto de aplicación con respecto al eje de giro

Naturaleza vectorial del momento de una fuerza

$$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$$

Unidades en el SI: $N \cdot m$ (no confundir con Julios)

Aplicación de un momento neto a un cuerpo rígido

Supongamos que podemos considerar un cuerpo rígido en rotación como un conjunto de partículas.

El cuerpo rígido está sometido a la acción de un número de fuerzas que se aplican en distintas posiciones del cuerpo rígido, en las cuales estarán situadas determinadas partículas.

Por tanto, podemos imaginar las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo rígido como si fueran ejercidas sobre partículas individuales del mismo.

Calcularemos el momento neto sobre el objeto debido a los momentos resultantes de la acción de estas fuerzas alrededor del eje de rotación del cuerpo.

Cualquier fuerza que actúe sobre el cuerpo rígido puede ser descompuesta en sus componentes radial y tangencial.

La componente radial de la fuerza aplicada no contribuye al momento, dado que su línea de acción pasa a través del eje de rotación.
Solo la componente tangencial contribuye al par.

Aplicación de un momento neto a un cuerpo rígido

Para cualquier partícula dada, identificada mediante la variable de índice i del interior del cuerpo rígido, podemos utilizar la segunda ley de Newton para describir la aceleración tangencial de la partícula

$$F_{ti} = m_i a_{ti}$$

Multiplicamos los dos miembros de esta ecuación por r_i , la distancia de la partícula al eje de giro

$$r_i F_{ti} = r_i m_i a_{ti}$$

Como $\tau = rF \sin \phi = rF_t$ y $a_{ti} = r_i \alpha_i$

$$\tau_i = m_i r_i^2 \alpha_i$$

Ahora sumamos los momentos ejercidos sobre todas las partículas del cuerpo rígido

$$\sum_i \tau_i = \sum_i m_i r_i^2 \alpha_i$$

Segunda ley de Newton en las rotaciones

$$\sum_i \tau_i = \sum_i m_i r_i^2 \alpha_i$$


Par neto sobre todas las partículas del cuerpo rígido

En el modelo de cuerpo rígido, todas las partículas tienen la misma aceleración angular

Como el par neto debido a las fuerzas internas se anula (ver tema de Sistemas de partículas), entonces **el término de la izquierda queda reducido al par externo neto**

$$\sum \tau = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \alpha$$

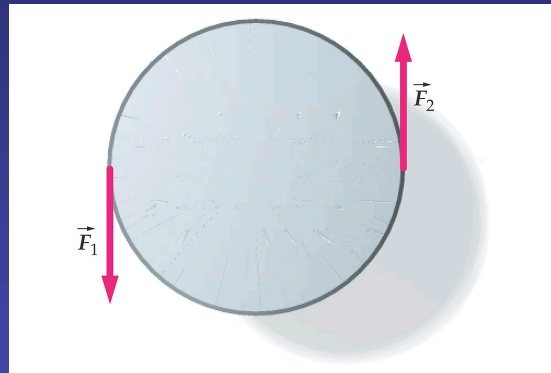
$$\sum \tau = I \alpha$$

La segunda ley de Newton en las rotaciones

El par neto que actúa sobre un cuerpo rígido es proporcional a su aceleración angular y la constante de proporcionalidad es el momento de inercia

Segunda ley de Newton en las rotaciones

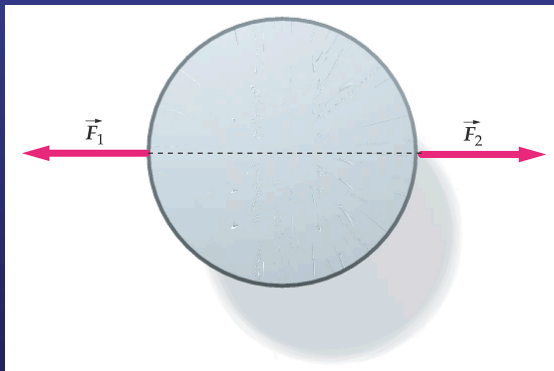
Se puede hacer girar el disco mediante la aplicación de dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ ejercidas en el borde del disco y en la dirección tangencial



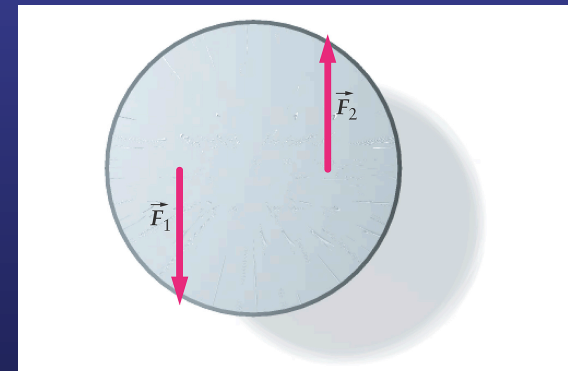
Física para la Ciencia y Tecnología
Tipler, Mosca
Editorial Reverté
Volumen 1, capítulo 9

La dirección y sentido de las fuerzas son importantes

Si las mismas fuerzas se aplican en la radial el disco no gira

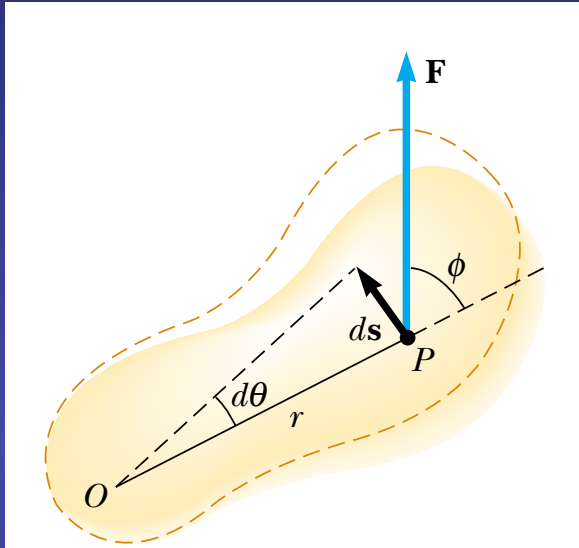


Si las mismas fuerzas se aplican en la dirección tangencial, pero en puntos cercanos al centro del disco, este no ganará velocidad angular tan rápidamente



Trabajo y energía en el movimiento de rotación

Supongamos un cuerpo rígido que puede rotar alrededor de un punto O



Supongamos que aplicamos una única fuerza externa $\vec{F}$ en el punto P y que $d\vec{s}$ es el desplazamiento que experimenta el punto de aplicación de la fuerza por acción de la misma

El trabajo infinitesimal que realiza la fuerza $\vec{F}$ sobre el cuerpo, a medida que el punto de aplicación de la fuerza gira a lo largo de una distancia infinitesimal $ds = r d\theta$ en un tiempo dt

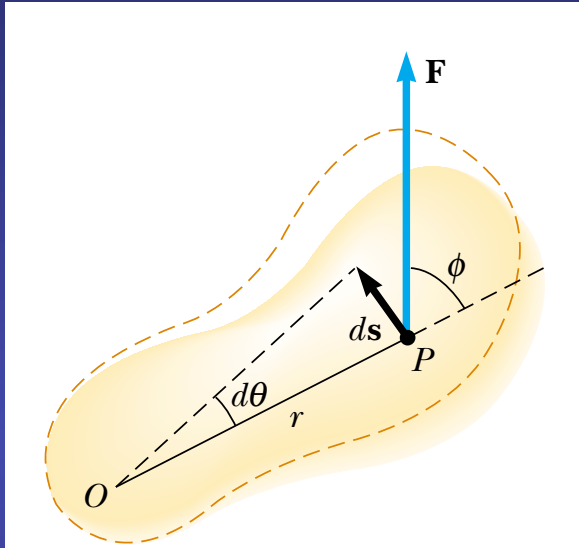
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (F \sin \phi) r d\theta$$

$F \sin \phi$ es la componente tangencial de la fuerza, o la componente a lo largo del desplazamiento

La componente radial de la fuerza no realiza ningún trabajo porque es perpendicular al desplazamiento

Trabajo y energía en el movimiento de rotación

Supongamos un cuerpo rígido que puede rotar alrededor de un punto O



Supongamos que aplicamos una única fuerza externa $\vec{F}$ en el punto P y que $d\vec{s}$ es el desplazamiento que experimenta el punto de aplicación de la fuerza por acción de la misma

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (F \sin \phi) r d\theta$$

Como $\tau = rF \sin \phi$

$$dW = \tau d\theta$$

El trabajo realizado en el movimiento de rotación es igual al producto del par por el desplazamiento angular

Trabajo y energía en el movimiento de rotación

A partir de la segunda ley de Newton para las rotaciones

$$\tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\omega$$

De la expresión anterior para el diferencial de trabajo

$$dW = \tau d\theta = I\omega d\omega$$

Integrando esta expresión tenemos el trabajo total realizado por el par

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega d\omega = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2$$

Exactamente la misma fórmula matemática que el teorema de las fuerzas vivas para el movimiento de traslación

Potencia en el movimiento de rotación

La potencia es el ritmo al cual una fuerza realiza un trabajo

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

Con lo que la potencia instantánea queda definida como

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \tau \omega$$

Expresión análoga a $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ en el movimiento de traslación

Comparación de los movimientos lineales y movimientos rotacionales

Table 8-2 Comparison of Linear Motion and Rotational Motion

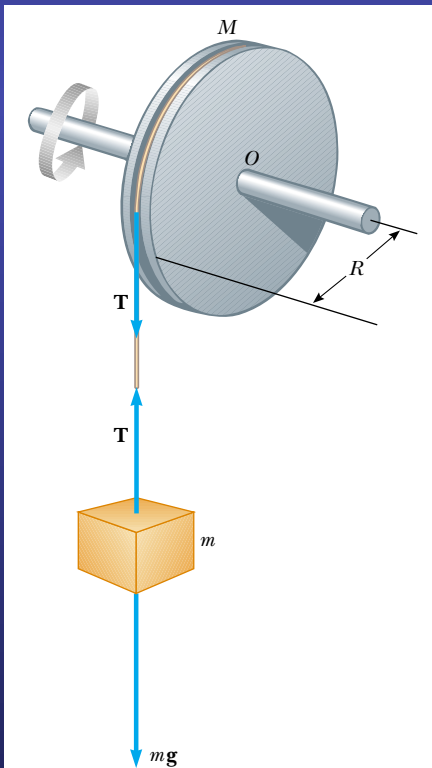
Linear motion		Rotational motion	
Displacement	Δx	Angular displacement	$\Delta \theta$
Velocity	$v = \frac{dx}{dt}$	Angular velocity	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Acceleration	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Angular acceleration	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
Constant-acceleration equations	$v = v_0 + at$ $\Delta x = v_{av} \Delta t$ $v_{av} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$ $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$	Constant-angular-acceleration equations	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\Delta \theta = \omega_{av} \Delta t$ $\omega_{av} = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha \Delta \theta$
Mass	m	Moment of inertia	I
Momentum	$p = mv$	Angular momentum	$L = I\omega$
Force	F	Torque	τ
Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Power	$P = Fv$	Power	$P = \tau\omega$
Newton's second law	$F_{net} = \frac{dp}{dt} = ma$	Newton's second law	$\tau_{net} = \frac{dL}{dt} = I\alpha$

Aceleración angular de una rueda

Una rueda de radio R , masa M y momento de inercia I se monta sobre un eje horizontal sin fricción.

Calcular:

- la aceleración angular de la rueda,
- la aceleración lineal del objeto,
- la tensión de la cuerda



Magnitud del torque neto de las fuerzas externas que actúan sobre la rueda

$$\tau = TR$$

Ni la gravedad ni la normal que ejerce el eje sobre la rueda no ejercen ningún par sobre la rueda si este se calcula con respecto a O.

Segunda ley de Newton de las rotaciones

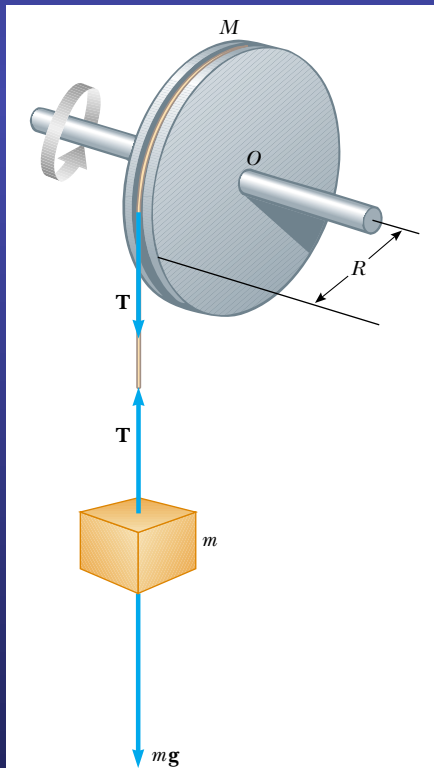
$$\sum \tau = I\alpha = TR \Rightarrow \alpha = \frac{TR}{I}$$

Aceleración angular de una rueda

Una rueda de radio R , masa M y momento de inercia I se monta sobre un eje horizontal sin fricción.

Calcular:

- la aceleración angular de la rueda,
- la aceleración lineal del objeto,
- la tensión de la cuerda



Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento del objeto (tomado hacia abajo como sentido positivo)

$$\sum F_y = mg - T = ma \Rightarrow a = \frac{mg - T}{m}$$

Como el objeto y la rueda están conectados por una cuerda que no resbala, la aceleración lineal del objeto suspendido es igual a la aceleración tangencial de un punto en el borde de la rueda.

La aceleración angular de la rueda α y la aceleración lineal del objeto están relacionados por $a = R\alpha$

El péndulo físico

Consideremos un cuerpo rígido que pivota en un punto O situado a una distancia d de su centro de masas

La fuerza gravitacional tiene un momento no nulo con respecto de un eje que pase por O

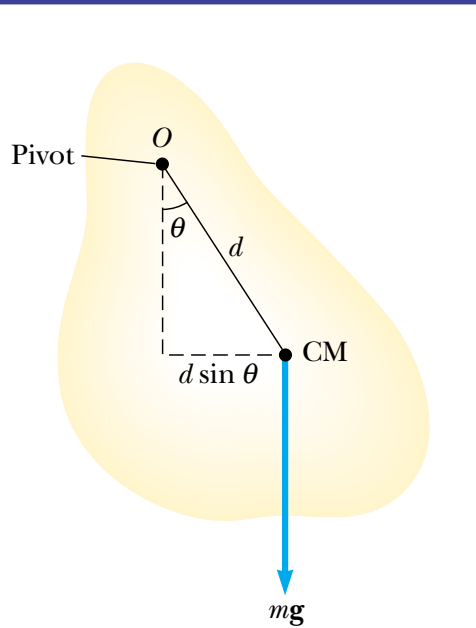
El módulo de este momento viene dado por $mgd \sin \theta$

Usando la regla de la mano derecha, el signo del momento es negativo (se mete en el plano de la pizarra).
Dicho de otra manera, el momento tiende a hacer decrecer el ángulo θ

Por la segunda ley de Newton para las rotaciones

$$-mgd \sin \theta = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

La fuerza gravitacional produce un momento que siempre hace que el ángulo tienda hacia la posición de equilibrio (es un “momento restaurador”).



El péndulo físico

Consideremos un cuerpo rígido que pivota en un punto O situado a una distancia d de su centro de masas

La fuerza gravitacional produce un momento que siempre hace que el ángulo tienda hacia la posición de equilibrio (es un “momento restaurador”).

$$-mgd \sin \theta = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

Si suponemos que los ángulo son pequeños (y están medidos en rad)

$$\sin \theta \approx \theta$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = - \left(\frac{mgd}{I} \right) \theta = -\omega^2 \theta$$

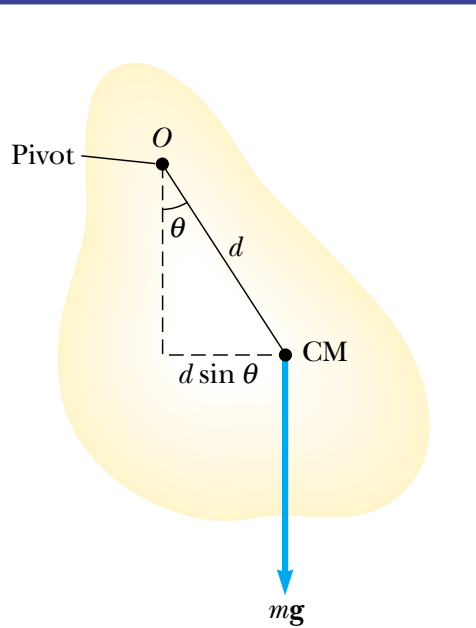
La ecuación del movimiento armónico simple, cuya solución es

$$\theta = \theta_{\max} \cos(\omega t + \phi)$$

Frecuencia angular $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$

Periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$

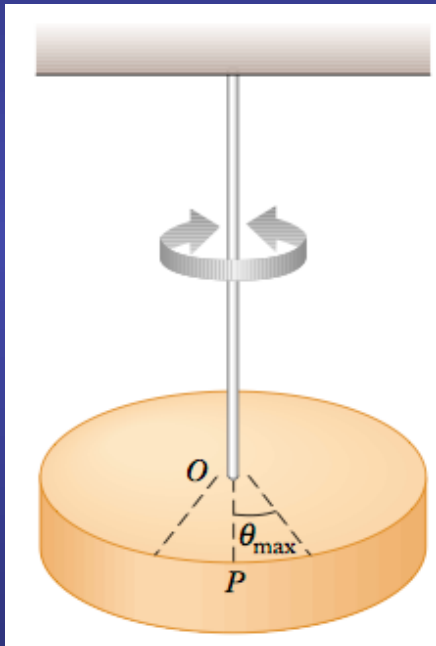
Máxima amplitud angular $\theta_{\max}$



El péndulo de torsión

Consideremos un cuerpo rígido suspendido de un alambre que cuelga del techo

Cuando el objeto se gira un determinado ángulo θ , el alambre girado ejerce sobre el objeto un torque de restauración que es proporcional al ángulo



$$\tau = -\kappa\theta$$

κ es la constante de torsión

(Como la ley de Hooke para los muelles, pero ahora aplicado a rotaciones)

Aplicando la segunda ley de Newton de las rotaciones

$$\tau = -\kappa\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta$$

De nuevo, la ecuación del oscilador armónico simple con una frecuencia y periodos iguales a

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

Movimiento de rodadura de cuerpos rígidos

Supongamos un objeto redondo que **rueda sin deslizar** sobre una superficie.

Ejemplo, un cilindro que rueda según una trayectoria recta.

El eje de rotación permanece paralelo a su orientación inicial en el espacio



El centro de masas del cilindro se mueve según una línea recta.

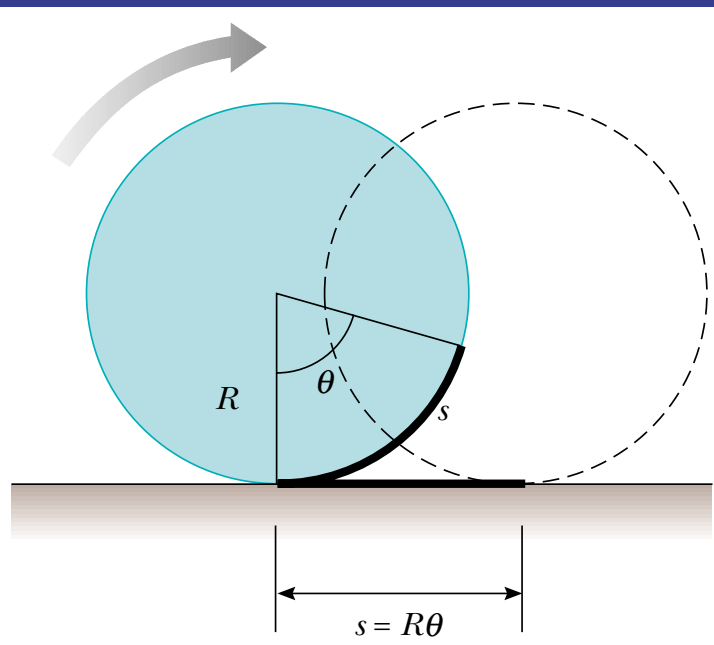
Un punto del borde se mueve siguiendo una trayectoria más compleja: la cicloide.

Movimiento de rodadura de cuerpos rígidos

Supongamos un objeto redondo que **rueda sin deslizar** sobre una superficie.

Ejemplo, un cilindro que rueda según una trayectoria recta.

El eje de rotación permanece paralelo a su orientación inicial en el espacio



Cuando el cilindro gira un ángulo θ su centro de masas se mueve una distancia $s = R\theta$

Por lo tanto, la velocidad y la aceleración del centro de masas para movimiento de rodadura puro son

$$v_{\text{CM}} = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

$$a_{\text{CM}} = \frac{dv_{\text{CM}}}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

Movimiento de rodadura de cuerpos rígidos

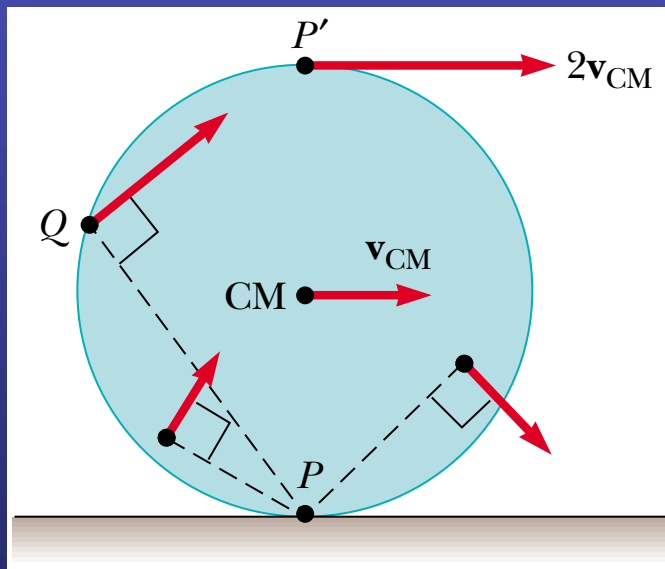
Supongamos un objeto redondo que **rueda sin deslizar** sobre una superficie.

Ejemplo, un cilindro que rueda según una trayectoria recta.

El eje de rotación permanece paralelo a su orientación inicial en el espacio

$$v_{\text{CM}} = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

Velocidades de traslación de
varios puntos del cilindro y del
centro de masas



La velocidad de traslación de cualquier punto sigue una
dirección perpendicular a la línea que une ese punto con
el punto de contacto

En cualquier instante de tiempo, el punto P está en
reposo con relación a la superficie (siempre que no haya
deslizamiento)

Movimiento de rodadura de cuerpos rígidos

Supongamos un objeto redondo que **rueda sin deslizar** sobre una superficie.

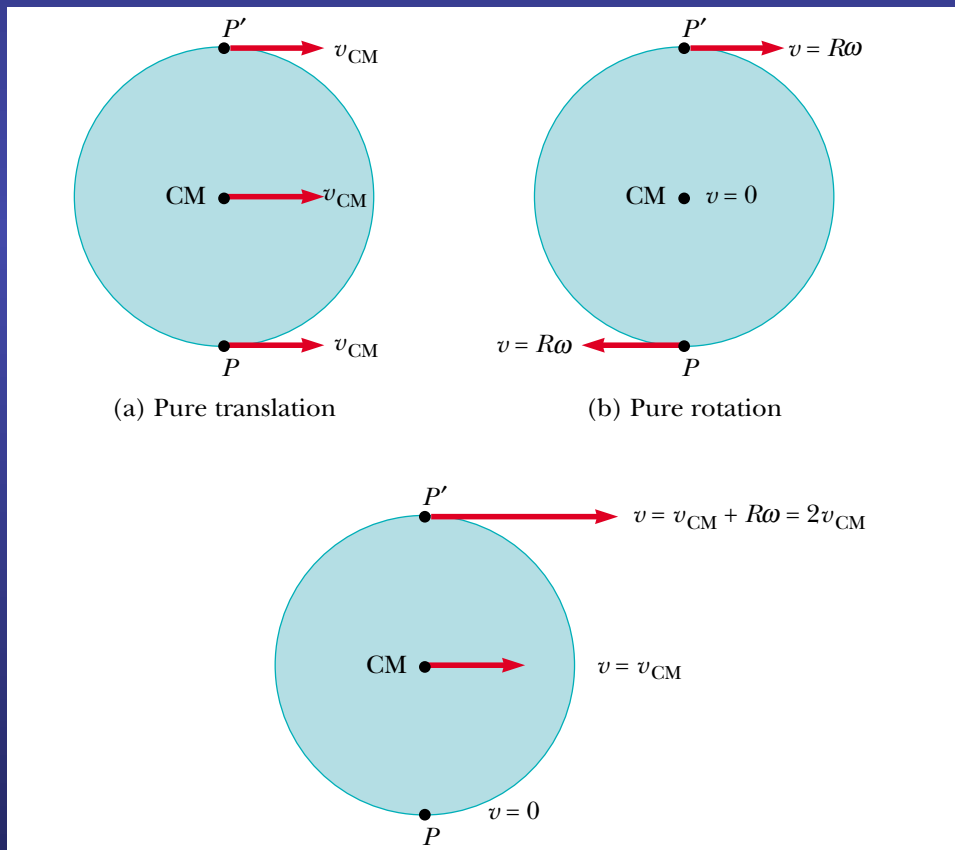
Ejemplo, un cilindro que rueda según una trayectoria recta.

El eje de rotación permanece paralelo a su orientación inicial en el espacio

Todos los puntos del cilindro tienen la misma celeridad angular

Como la distancia de P a P' es el doble que la distancia de P al centro de masas, el punto P' tiene una celeridad con respecto a P igual a

$$2v_{\text{CM}} = 2R\omega$$

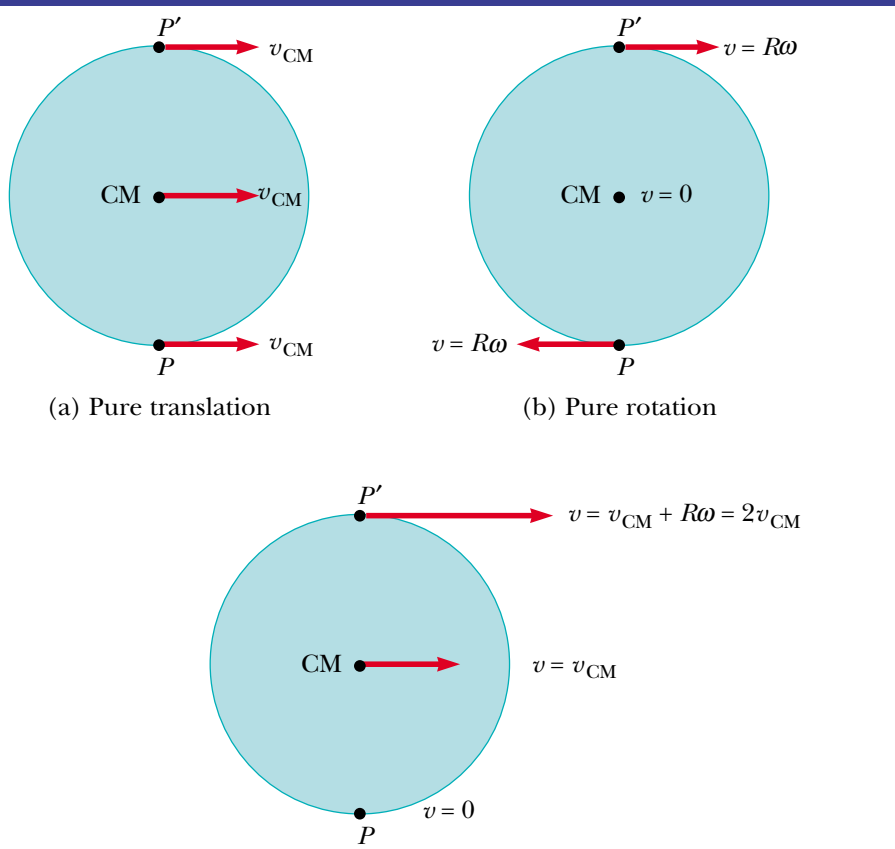


Movimiento de rodadura de cuerpos rígidos

Supongamos un objeto redondo que **rueda sin deslizar** sobre una superficie.

Ejemplo, un cilindro que rueda según una trayectoria recta.

El eje de rotación permanece paralelo a su orientación inicial en el espacio



Las superficies deben ejercer una fuerza de rozamiento la una sobre la otra.

Esta fuerza de rozamiento produce un torque

Si no existiera la fuerza de rozamiento, el objeto simplemente se deslizaría sin rodar

Si la fuerza de rozamiento es suficientemente grande entonces el objeto rueda sin deslizar

La fuerza de rozamiento es estática. El punto P está en reposo relativo con respecto al suelo

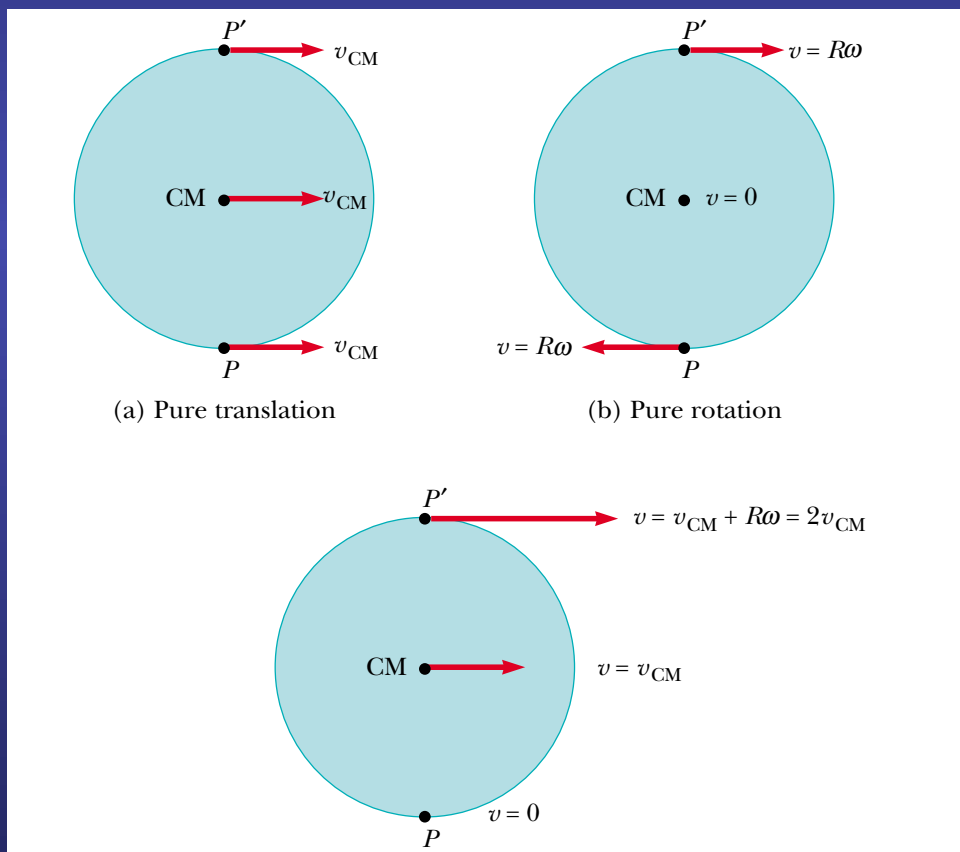
Sin embargo, la fuerza de rozamiento actúa a lo largo de una distancia igual a cero y, por lo tanto, **no realiza ningún trabajo sobre el cilindro y la energía mecánica se conserva**

Movimiento de rodadura de cuerpos rígidos

Supongamos un objeto redondo que **rueda sin deslizar** sobre una superficie.

Ejemplo, un cilindro que rueda según una trayectoria recta.

El eje de rotación permanece paralelo a su orientación inicial en el espacio



La energía cinética total del cilindro que rota con respecto al punto P es

$$K = \frac{1}{2}I_P\omega^2$$

I_P es el momento de inercia del cilindro con respecto a un eje que pasa por P

Aplicando el teorema de Steiner

$$I_P = I_{CM} + MR^2$$

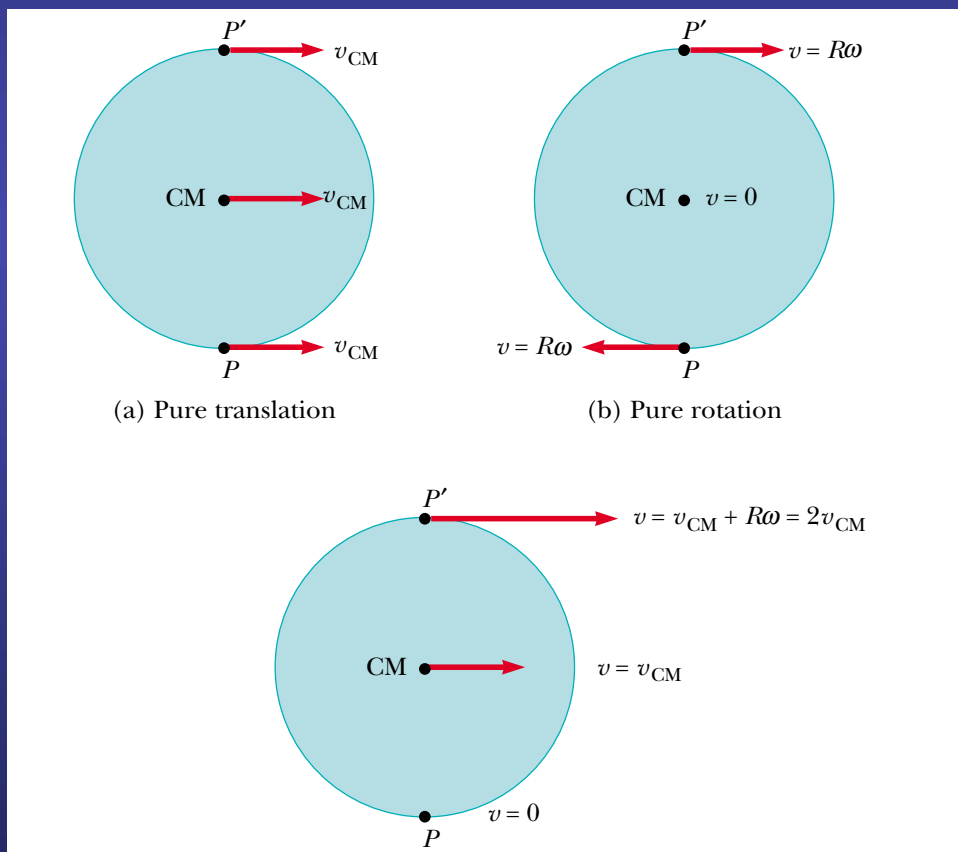
$$\begin{aligned} K &= I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2 \\ &= I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 \end{aligned}$$

Movimiento de rodadura de cuerpos rígidos

Supongamos un objeto redondo que **rueda sin deslizar** sobre una superficie.

Ejemplo, un cilindro que rueda según una trayectoria recta.

El eje de rotación permanece paralelo a su orientación inicial en el espacio



La energía cinética total del cilindro que rota con respecto al punto P es

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

I_P es el momento de inercia del cilindro con respecto a un eje que pasa por P

$$\begin{aligned} K &= I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 \\ &= I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \end{aligned}$$

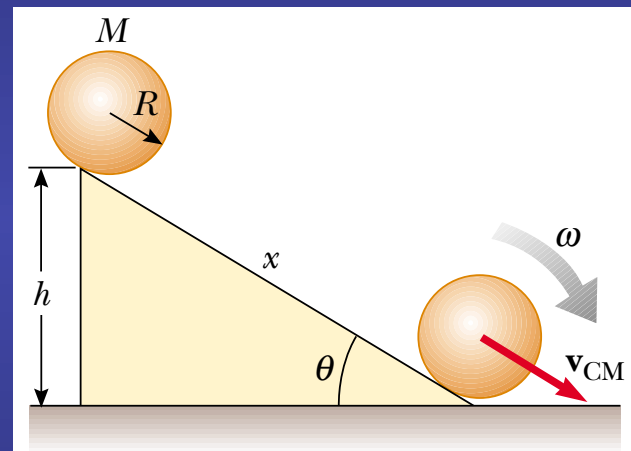
La energía cinética de un objeto rodante es la suma de la energía cinética de rotación alrededor del centro de masas más la energía cinética de traslación del centro de masas

Energía cinética rotacional

Supongamos una esfera que rueda sin deslizar en un plano inclinado.

Supongamos que parte desde el reposo.

¿Cuál es la celeridad del centro de masas cuando llega al punto inferior?



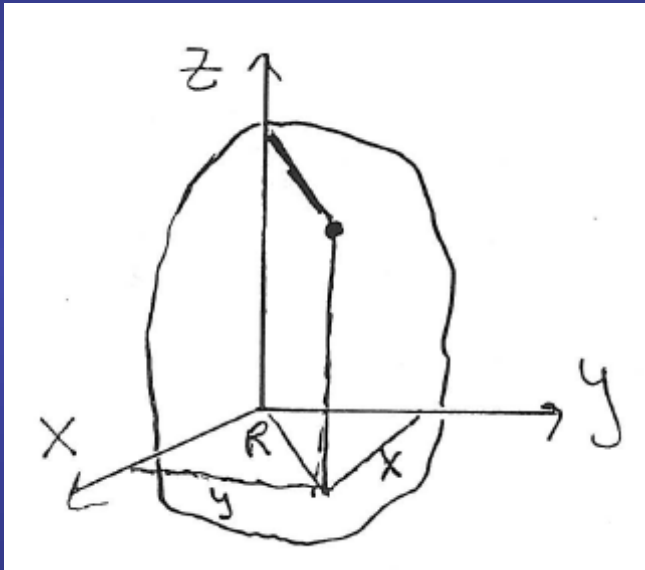
$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \\ &= \frac{1}{2} I_{CM} \left(\frac{v_{CM}}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M \right) v_{CM}^2 \end{aligned}$$

Para el sistema formado por la esfera y la Tierra, y definiendo el cero de energías potenciales en la base del plano inclinado, el teorema de conservación de la energía nos da

$$\begin{aligned} K_f + U_f &= K_i + U_i \\ \frac{1}{2} \left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M \right) v_{CM}^2 + 0 &= 0 + Mgh \\ v_{CM} &= \left(\frac{2gh}{1 + (I_{CM}/MR^2)} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Transparencias de soporte

Cálculos de momentos de inercia



Sistema discreto

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$$

Sistema continuo

$$I_z = \int dm R^2 = \int dm (x^2 + y^2)$$