CAMPOS: CIRCULACIÓN Y FLUJO

Dado el vector $\vec{a} = (x+y)\hat{i} + xy\,\hat{j}$ calcular su circulación a lo largo de la recta $y = x+1$ desde el punto A (0, 1) al B (1, 2).

Solución: I.T.I. 99, 05, I.T.T. 02

En la trayectoria que nos indican: $y = x+1$, $dy = dx$

$$\int_{recta} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \left[(x+y)dx + xy\,dy\right] = \int_0^1 \left[(2x+1)\,dx + x(x+1)dx\right] = \int_0^1 \left(x^2+3x+1\right)dx = \boxed{\frac{17}{6}}$$

Dado el vector $\vec{v} = (x+y)^2\,\hat{i} + xy\,\hat{j}$ calcular su circulación a lo largo de la recta $y = x+1$ desde el punto A (0, 1) al B (1, 2).

Solución: I.T.I. 04

En la trayectoria que nos indican: $y = x+1$, $dy = dx$

$$\int_{recta} \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \left[(x+y)^2\,dx + xy\,dy\right] = \int_0^1 \left[(2x+1)^2\,dx + x(x+1)dx\right] = \int_0^1 \left(5x^2+5x+1\right)dx = \boxed{\frac{31}{6}}$$

Siendo $\vec{A} = (2y+3)\hat{i} + xz\,\hat{j} + (yz-x)\hat{k}$ hallar $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$ a lo largo de las siguientes trayectorias C:

a) $x = 2t^2, y = t, z = t^3$ desde $t = 0$ hasta $t = 1$
b) La quebrada que une los puntos (0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (2,1,1)
c) La recta que une los puntos (0,0,0) y (2,1,1)

Solución: I.T.I. 95, 03, 06, I.T.T. 95, 03, 06, I.I. 94

Independientemente de cual sea la trayectoria seguida, en cualquiera de los tres casos tendremos que:

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_C \left[(2y+3)dx + xz\,dy + (yz-x)\,dz\right] \quad (1)$$

Para cada caso en particular:

a) $x = 2t^2,\ dx = 4t\,dt, y = t, dy = dt, z = t^3, dz = 3t^2\,dt$

Sustituyendo en (1): $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left[(2t+3)4t\,dt + 2t^2 t^3\,dt + \left(t\,t^3 - 2t^2\right)3t^2 dt\right] = \boxed{\frac{288}{35}}$

b) En la línea que une los puntos (0,0,0), (0,0,1) tenemos que: $x = y = 0$, $dx = dy = 0$.

Sustituyendo en (1): $\int_{(0,0,0)\to(0,0,1)} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 0\,dz = 0$

En la línea que une los puntos (0,0,1), (0,1,1) tenemos que: $x = 0$, $z = 1$, $dx = dz = 0$.

Sustituyendo en (1): $\int_{(0,0,1)\to(0,1,1)} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 0\,dy = 0$

En la línea que une los puntos (0,1,1), (2,1,1) tenemos que: $y = z = 1$, $dy = dz = 0$.

Sustituyendo en (1): $\int_{(0,1,1)\to(2,1,1)} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_0^2 5\,dx = 10$

Por lo tanto a lo largo de la trayectoria quebrada tendremos: $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = 0 + 0 + 10 = \boxed{10}$

c) En la línea que une los puntos (0,0,0), (2,1,1) tenemos que: $x = 2t$, $y = z = t$, $dx = 2dt$, $dy = dz = dt$ con t un parámetro que va de 0 a 1.

Sustituyendo en (1): $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left(3t^2 + 2t + 6\right)dt = \boxed{8}$

Siendo $\vec{A} = \left(3x^2 + 6y\right)\hat{\imath} - 14yz\,\hat{\jmath} + 20xz^2\,\hat{k}$ hallar $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$ a lo largo de las siguientes trayectorias C:

a) $x = t, y = t^2, z = t^3$ desde $t = 0$ hasta $t = 1$
b) La quebrada que une los puntos (0,0,0), (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)
c) La recta que une los puntos (0,0,0) y (1,1,1)

Solución: I.T.I. 96, 00, 01, 02, I.T.T. 96, 00, 04

Independientemente de cual sea la trayectoria seguida, en cualquiera de los tres casos tendremos que:

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_C \left[\left(3x^2 + 6y\right)dx - 14\,yz\,dy + 20xz^2\,dz\right] \quad (1)$$

Para cada caso en particular:

a) $x = t, dx = dt, y = t^2, dy = 2t\,dt, z = t^3, dz = 3t^2\,dt$

Sustituyendo en (1): $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left[\left(3t^2 + 6t^2\right)dt - 14t^2 t^3\, 2t\,dt + 20t\,t^6\, 3t^2\,dt\right] = \boxed{5}$

b) En la línea que une los puntos (0,0,0), (1,0,0) tenemos que: $y = z = 0$, $dy = dz = 0$.

Sustituyendo en (1): $\int_{(0,0,0)\to(1,0,0)} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 3x^2 dx = 1$

En la línea que une los puntos (1,0,0), (1,1,0) tenemos que: $x = 1$, $z = 0$, $dx = dz = 0$.

Sustituyendo en (1): $\int_{(1,0,0)\to(1,1,0)} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 0\,dy = 0$

En la línea que une los puntos (1,1,0), (1,1,1) tenemos que: $x = y = 1$, $dx = dy = 0$.

Sustituyendo en (1): $\int_{(1,1,0)\to(1,1,1)} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 20z^2\,dz = \dfrac{20}{3}$

Por lo tanto a lo largo de la trayectoria quebrada tendremos: $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = 1 + 0 + \dfrac{20}{3} = \boxed{\dfrac{23}{3}}$

c) En la línea que une los puntos (0,0,0), (1,1,1) tenemos que: $x = y = z = t$, $dx = dy = dz = dt$ con t un parámetro que va de 0 a 1.

Sustituyendo en (1): $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left(20t^3 - 11t^2 + 6t\right)dt = \boxed{\dfrac{13}{3}}$

Hallar para el campo vectorial $\vec{A} = x^2\,\hat{i} + yz\,\hat{j} + zx\,\hat{k}$ su circulación $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$ a lo largo de las siguientes trayectorias C:

a) $y = x^2, z = x^3$ desde el origen hasta el punto (1,1,1)
b) La quebrada que une los puntos (0,0,0), (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)
c) La recta que une los puntos (0,0,0) y (1,1,1)

Solución: I.T.I. 97, I.T.T. 97, 01, 05

Independientemente de cual sea la trayectoria seguida, en cualquiera de los tres casos tendremos que:

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_C \left(x^2\,dx + yz\,dy + zx\,dz\right) \quad (1)$$

Para cada caso en particular:

a) $x = t, dx = dt, y = t^2, dy = 2t\,dt, z = t^3, dz = 3t^2\,dt$ con t variando entre 0 y 1

Sustituyendo en (1): $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_C \left(t^2 + 5t^6\right) dt = \boxed{\dfrac{22}{21}}$

b) En la línea que une los puntos (0,0,0), (1,0,0) tenemos que: $y = z = 0, dy = dz = 0$.

Sustituyendo en (1): $\int_{(0,0,0)\to(1,0,0)} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 x^2 dx = \dfrac{1}{3}$

En la línea que une los puntos (1,0,0), (1,1,0) tenemos que: $x = 1, z = 0, dx = dz = 0$.

Sustituyendo en (1): $\int_{(1,0,0)\to(1,1,0)} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 0\,dy = 0$

En la línea que une los puntos (1,1,0), (1,1,1) tenemos que: $x = y = 1, dx = dy = 0$.

Sustituyendo en (1): $\int_{(1,1,0)\to(1,1,1)} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 z\,dz = \dfrac{1}{2}$

Por lo tanto a lo largo de la trayectoria quebrada tendremos: $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \dfrac{1}{3} + 0 + \dfrac{1}{2} = \boxed{\dfrac{5}{6}}$

c) En la línea que une los puntos (0,0,0), (1,1,1) tenemos que: $x = y = z = t$, $dx = dy = dz = dt$ con t un parámetro que va de 0 a 1.

Sustituyendo en (1): $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 3t^2\,dt = \boxed{1}$

Calcular la circulación del campo vectorial $\vec{A} = 6xy\,\hat{i} + 3x^2\,\hat{j} + 2\,\hat{k}$ desde el punto O (0,0,0) hasta el punto M (1,1,1) a lo largo de las siguientes trayectorias:

a) La recta que une los puntos.
b) La quebrada que une los puntos (0,0,0), (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)
c) La curva OM $\left(t, t^2, t^3\right)$

¿Qué se puede decir de los resultados obtenidos? ¿Estará $\vec{A}$ relacionado con algún campo escalar? En caso afirmativo determinarlo.

Solución: I.T.I. 98, I.T.T. 99, 02

Independientemente de cual sea la trayectoria seguida, en cualquiera de los tres casos tendremos que:

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_C \left(6xy\,dx + 3x^2\,dy + 2\,dz\right) \quad (1)$$

Para cada caso en particular:

a) En la línea que une los puntos (0,0,0), (1,1,1) tenemos que: $x = y = z = t$, $dx = dy = dz = dt$ con t un parámetro que va de 0 a 1.

Sustituyendo en (1): $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left(9t^2 + 2\right) dt = \boxed{5}$

b) En la línea que une los puntos (0,0,0), (1,0,0) tenemos que: $y = z = 0$, $dy = dz = 0$.

Sustituyendo en (1): $\int_{(0,0,0)\to(1,0,0)} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 0\,dx = 0$

En la línea que une los puntos (1,0,0), (1,1,0) tenemos que: $x = 1$, $z = 0$, $dx = dz = 0$.

Sustituyendo en (1): $\int_{(1,0,0)\to(1,1,0)} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 3\,dy = 3$

En la línea que une los puntos (1,1,0), (1,1,1) tenemos que: $x = y = 1$, $dx = dy = 0$.

Sustituyendo en (1): $\int_{(1,1,0)\to(1,1,1)} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 2\,dz = 2$

Por lo tanto a lo largo de la trayectoria quebrada tendremos: $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = 0 + 3 + 2 = \boxed{5}$

c) $x = t, dx = dt, y = t^2, dy = 2t\,dt, z = t^3, dz = 3t^2\,dt$ con t variando entre 0 y 1

Sustituyendo en (1): $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_C \left(12t^3 + 6t^2\right) dt = \boxed{5}$

Al haber obtenido el mismo resultado en los tres casos puede que el campo vectorial que nos dan sea un campo vectorial conservativo. Si se tratase de un campo conservativo debería presentar un rotacional nulo:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k} = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{A} \text{ es un campo conservativo, deriva de un campo escalar: } \vec{A}=\vec{\nabla}\Phi}$

El campo conservativo $\vec{A}$ será igual al gradiente de un campo escalar Φ, por lo tanto se verificará que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = A_x = 6xy \quad \Rightarrow \quad \Phi(x,y,z) = 3x^2 y + f(y,z)$$

Donde $f(y,z)$ es una función que no depende de x y que por lo tanto actúa de constante a la hora de hacer la integración respecto de x. La función $f(y,z)$ la podemos determinar estudiando la derivada respecto a y:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = A_y = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(y,z) = g(z)$$

Para determinar g(z) recurrimos al estudio de la derivada respecto de z:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = A_z = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 2 \quad \Rightarrow \quad g(z) = 2z + C$$

Con lo cual la expresión final para Φ será: $\boxed{\Phi(x,y,z) = 3x^2 y + 2z + C}$

Teniendo en cuenta que el vector de posición de un punto de coordenadas (x, y, z) es $\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$, consideremos el siguiente campo escalar $U(x,y,z) = C\,r^2$, donde C es una constante y r el módulo del vector de posición.

a) Descríbase dicho campo escalar (puntos donde toma el valor máximo y mínimo, forma de las superficies equiescalares, …). De los siguientes puntos ¿cuáles estarán en la misma superficie equiescalar?: (3,1,–1), (1,1,1), ($\sqrt{3}$,0,0), (5,–1,–1), (1,0,$\sqrt{2}$).
b) Encuéntrese el campo vectorial conservativo asociado a dicho campo escalar sabiendo que el valor de su módulo en el punto (1,1,1) es 24.
c) Encuéntrese la expresión de la divergencia y el rotacional de dicho campo vectorial y coméntense estos resultados.
d) Calcúlese la circulación de dicho campo vectorial entre los puntos (0,0,0) y (1,1,1) según la trayectoria $x = t, y = t^2, z = t^3$. ¿Cuánto valdría si se realizase entre estos dos mismos puntos según la trayectoria $x = y = z = t$? ¿Por qué?

Solución: I.T.I. 01, 05, I.T.T. 02

a) Si la constante C es positiva el campo escalar tomará siempre valores positivos salvo en el origen donde tendrá un mínimo y se anulará. Si la constante C es negativa el campo escalar tomará siempre valores negativos salvo en el origen donde tendrá un máximo y tendrá un valor nulo.
Como la única dependencia del campo escalar de las coordenadas del punto es a través del módulo al cuadrado, r^2, del vector de posición, todos los puntos que se encuentren a la misma distancia del origen tendrán el mismo valor para el campo escalar. Estos puntos formaran por lo tanto superficies equiescalares esféricas centradas en el origen.

De los puntos que nos dan (1,1,1), ($\sqrt{3}$,0,0), y (1,0,$\sqrt{2}$) se encuentran a la misma distancia del origen y por lo tanto pertenecerán a la misma superficie equiescalar.

b) El campo vectorial conservativo será:

$$\vec{V} = \vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k} = 2C\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right) = 2C\vec{r}$$

En el punto (1,1,1) su módulo es 24, luego:

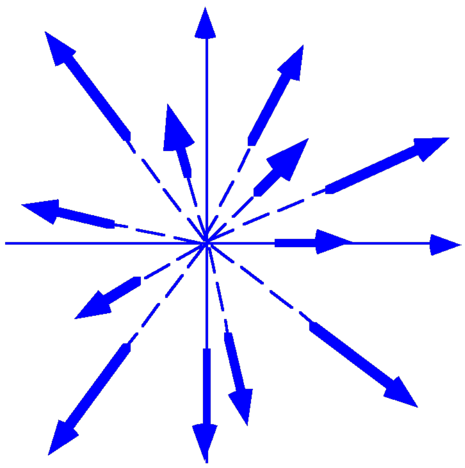
$$\left.\begin{array}{l} \vec{V}(x,y,z)\Big|_{(1,1,1)} = 2C\vec{r}\Big|_{(1,1,1)} = 2C(1,1,1) \\ \left|\vec{V}(x,y,z)\Big|_{(1,1,1)}\right| = 24 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad C = 4\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}(x,y,z) = 8\sqrt{3}\,\vec{r}$$

c) $$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 8\sqrt{3}\left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) = \boxed{24\sqrt{3}}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = 8\sqrt{3}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \boxed{0}$$

Al tratarse de un campo que deriva del gradiente de un campo escalar U será un campo vectorial conservativo, y por lo tanto es lógico que su rotacional se anule.

El valor positivo de la divergencia de $\vec{V}$ indica la existencia en el espacio de “fuentes” de donde diverge dicho campo vectorial (ver figura). Como la divergencia es constante, dichas fuentes se encuentran repartidas de modo homogéneo por todo el espacio.



d) Al tratarse de un campo conservativo que deriva del gradiente de un campo escalar no hace falta realizar las integraciones, ya que el resultado será el cambio en el campo escalar entre los puntos inicial y final, independientemente del tipo de trayectoria escogida:

$$\int_C \vec{V}\cdot d\vec{r} = \int_C \vec{\nabla} U\cdot d\vec{r} = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} dU = \Delta U = U(1,1,1) - U(0,0,0) = \boxed{12\sqrt{3}}$$

Hallar $\oiint_S \vec{A}\, d\vec{S}$ extendida a la superficie S del cubo limitado por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$, siendo $\vec{A} = 2yz\,\hat{\imath} - (x + 3y - 2)\,\hat{\jmath} + (x^2 + z)\hat{k}$

Solución: **I.T.I. 96, 00, 03, I.T.T. 96, 99, 02**

Para la cara $x = 0$ tenemos que $d\vec{S} = dy\, dz(-\hat{\imath})$ con lo cual:

$$\iint_{x=0} \vec{A}d\vec{S} = \int_0^1\int_0^1 -2yz\, dy\, dz = -\frac{1}{2}$$

Para la cara $x = 1$ tenemos que $d\vec{S} = dy\, dz\,\hat{\imath}$ con lo cual:

$$\iint_{x=1} \vec{A}d\vec{S} = \int_0^1\int_0^1 2yz dy\, dz = \frac{1}{2}$$

Para la cara $y = 0$ tenemos que $d\vec{S} = dx\, dz(-\hat{\jmath})$ con lo cual:

$$\iint_{y=0} \vec{A}d\vec{S} = \int_0^1\int_0^1 (x-2) dx\, dz = -\frac{3}{2}$$

Para la cara $y = 1$ tenemos que $d\vec{S} = dx\, dz\,\hat{\jmath}$ con lo cual:

$$\iint_{y=1} \vec{A}d\vec{S} = \int_0^1\int_0^1 -(x+1)\, dx\, dz = -\frac{3}{2}$$

Para la cara $z = 0$ tenemos que $d\vec{S} = dx\, dy(-\hat{k})$ con lo cual:

$$\iint_{z=0} \vec{A}d\vec{S} = \int_0^1\int_0^1 -x^2\, dx\, dy = -\frac{1}{3}$$

Para la cara $z = 1$ tenemos que $d\vec{S} = dx\, dy\,\hat{k}$ con lo cual:

$$\iint_{z=1} \vec{A}d\vec{S} = \int_0^1\int_0^1 (x^2+1)\, dx\, dy = \frac{4}{3}$$

Sumando todas las contribuciones: $\oiint_S \vec{A}\, d\vec{S} = \boxed{-2}$

Siendo $\vec{A} = 4xz\,\hat{\imath} - y^2\,\hat{\jmath} + yz\,\hat{k}$, hallar $\oiint_S \vec{A}\, d\vec{S}$ extendida a la superficie S del cubo limitado por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

Solución: I.T.I. 95, 97, 02, I.T.T. 95, 97, 01, 04

Para la cara $x = 0$ tenemos que $d\vec{S} = dy\,dz\left(-\hat{i}\right)$ con lo cual:

$$\iint_{x=0} \vec{A}d\vec{S} = \int_0^1\int_0^1 0\,dy\,dz = 0$$

Para la cara $x = 1$ tenemos que $d\vec{S} = dy\,dz\,\hat{i}$ con lo cual:

$$\iint_{x=1} \vec{A}d\vec{S} = \int_0^1\int_0^1 4z\,dy\,dz = 2$$

Para la cara $y = 0$ tenemos que $d\vec{S} = dx\,dz\left(-\hat{j}\right)$ con lo cual:

$$\iint_{y=0} \vec{A}d\vec{S} = \int_0^1\int_0^1 0\,dx\,dz = 0$$

Para la cara $y = 1$ tenemos que $d\vec{S} = dx\,dz\,\hat{j}$ con lo cual:

$$\iint_{y=1} \vec{A}d\vec{S} = \int_0^1\int_0^1 -dx\,dz = -1$$

Para la cara $z = 0$ tenemos que $d\vec{S} = dx\,dy\left(-\hat{k}\right)$ con lo cual:

$$\iint_{z=0} \vec{A}d\vec{S} = \int_0^1\int_0^1 0\,dx\,dy = 0$$

Para la cara $z = 1$ tenemos que $d\vec{S} = dx\,dy\,\hat{k}$ con lo cual:

$$\iint_{z=1} \vec{A}d\vec{S} = \int_0^1\int_0^1 y\,dx\,dy = \frac{1}{2}$$

Sumando todas las contribuciones: $\oiint_S \vec{A}\,d\vec{S} = \boxed{\frac{3}{2}}$

Calcular el flujo del vector de posición $\vec{r}$ a través de una superficie esférica centrada en el origen y de radio 3 metros.

Solución: I.T.I. 98, 01, 04, I.T.T. 99, 02

Los vectores $d\vec{S}$ son perpendiculares a la superficie esférica y por lo tanto son radiales y hacia afuera de la superficie cerrada. El producto escalar entre $\vec{r}$ y $d\vec{S}$ se reduce por lo tanto al producto de sus módulos:

$$\oiint_S \vec{r}\, d\vec{S} = \oiint_S r\, dS = r \oiint_S dS = r\left(4\pi r^2\right) = 4\pi r^3 = \boxed{339 \text{ m}^3}$$

Calcular el flujo del vector de posición $\vec{r}$ a través de una superficie esférica centrada en el origen y de radio 1 metro, y a través de una superficie cúbica circunscrita a la anterior, con las caras del cubo perpendiculares a los ejes coordenados.

Solución: I.T.I. 02, 05, 06, I.T.T. 03, 06

Los vectores $d\vec{S}$ son perpendiculares a la superficie esférica y por lo tanto son radiales y hacia afuera de la superficie cerrada. El producto escalar entre $\vec{r}$ y $d\vec{S}$ se reduce por lo tanto al producto de sus módulos:

$$\oiint_S \vec{r}\, d\vec{S} = \oiint_S r\, dS = r \oiint_S dS = r\left(4\pi r^2\right) = 4\pi r^3 = \boxed{12.57 \text{ m}^3}$$

Para el caso de la superficie cúbica tendremos:

Para la cara $x = 1$ tenemos que $d\vec{S} = dy\, dz\, \hat{i}$ con lo cual:

$$\iint_{x=1} \vec{r} d\vec{S} = \iint_{x=1} x\, dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dy\, dz = 4$$

Para la cara $x = -1$ tenemos que $d\vec{S} = dy\, dz\left(-\hat{i}\right)$ con lo cual:

$$\iint_{x=-1} \vec{r}\, d\vec{S} = \iint_{x=-1} -x\, dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dy\, dz = 4$$

Para la cara $y = 1$ tenemos que $d\vec{S} = dx\, dz\, \hat{j}$ con lo cual:

$$\iint_{y=1} \vec{r} d\vec{S} = \iint_{y=1} y\, dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dx\, dz = 4$$

Para la cara $y = -1$ tenemos que $d\vec{S} = dx\, dz\left(-\hat{j}\right)$ con lo cual:

$$\iint_{y=-1} \vec{r}\, d\vec{S} = \iint_{y=-1} -y\, dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dx\, dz = 4$$

Para la cara $z = 1$ tenemos que $d\vec{S} = dx\,dy\,\hat{k}$ con lo cual:

$$\iint_{z=1} \vec{r}\,d\vec{S} = \iint_{z=1} z\,dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dx\,dy = 4$$

Para la cara $z = -1$ tenemos que $d\vec{S} = dx\,dy\left(-\hat{k}\right)$ con lo cual:

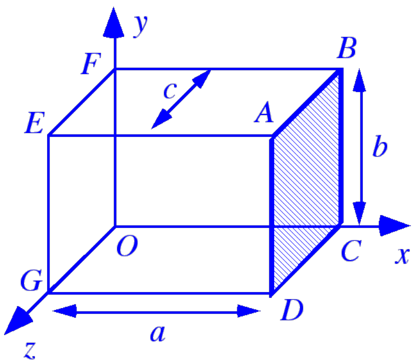
$$\iint_{z=-1} \vec{r}\,d\vec{S} = \iint_{z=-1} -z\,dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dx\,dy = 4$$

Sumando todas las contribuciones: $\oiint_S \vec{r}\,d\vec{S} = \boxed{24\ \text{m}^3}$

Siendo $\vec{r}$ el vector de posición de un punto, determinar el flujo de dicho vector:

a) a través de la superficie rayada de la figura,

b) a través de toda la superficie cerrada de la figura.



Solución: **I.T.I. 99, I.T.T. 00, 05**

a) La superficie rayada *ABCD* viene definida por la ecuación $x = a$, y por lo tanto el vector de posición de un punto cualquiera en esta superficie será: $\vec{r} = a\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. El vector diferencial de superficie será: $d\vec{S} = dy\,dz\,\hat{i}$

$$\iint_{ABCD} \vec{r}\,d\vec{S} = \iint_{ABCD} a\,dy\,dz = \int_0^c\int_0^b a\,dy\,dz = \boxed{abc}$$

b) Haciendo lo mismo para las demás caras del cubo (los vectores unitarios que representarán a los vectores diferenciales de superficie $d\vec{S}$ se tomarán siempre hacia el exterior en el caso de una superficie cerrada):

Cara EFOG: $\vec{r} = 0\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $d\vec{S} = dy\,dz\left(-\hat{i}\right)$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\iint_{EFOG} \vec{r}\,d\vec{S} = 0$

Cara ABFE: $\vec{r} = x\hat{i} + b\hat{j} + z\hat{k}$, $d\vec{S} = dx\,dz\,\hat{j}$

$$\Rightarrow \quad \iint_{ABFE} \vec{r}\, d\vec{S} = \iint_{ABFE} b\, dx\, dz = \int_0^c \int_0^a b\, dx\, dz = abc$$

Cara DCOG: $\vec{r} = x\hat{i} + 0\,\hat{j} + z\,\hat{k}$, $d\vec{S} = dx\, dz\left(-\hat{j}\right) \quad \Rightarrow \quad \iint_{DCOG} \vec{r}\, d\vec{S} = 0$

Cara AEGD: $\vec{r} = x\hat{i} + y\,\hat{j} + c\,\hat{k}$, $d\vec{S} = dx\, dy\,\hat{k}$

$$\Rightarrow \quad \iint_{AEGD} \vec{r}\, d\vec{S} = \iint_{AEGD} c\, dx\, dy = \int_0^b \int_0^a c\, dx\, dy = abc$$

Cara BFOC: $\vec{r} = x\hat{i} + y\,\hat{j} + 0\hat{k}$, $d\vec{S} = dx\, dy\left(-\hat{k}\right) \quad \Rightarrow \quad \iint_{BFOC} \vec{r}\, d\vec{S} = 0$

Sumando todas las contribuciones: $\oiint_S \vec{r}\, d\vec{S} = \boxed{3abc}$

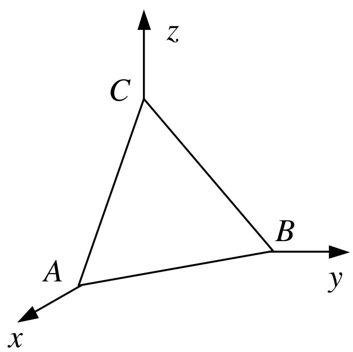
Hallar $\oiint_S \vec{A}\, d\vec{S}$ extendida a la superficie S del volumen limitado por el cilindro $x^2 + z^2 = 9$ y los planos $x = 0, z = 0, y = 0, y = 1, y = 8$, siendo $\vec{A} = 6z\hat{i} + (2x + y)\,\hat{j} - x\,\hat{k}$

Solución: **I.I. 94**

Texto solución

---

a) Calcular el área del triángulo formado por los puntos A (1, 0, 0), B (0, 1, 0) y C (0, 0, 1). b) Encontrar la ecuación del plano que contiene a dicho triángulo. Dado el campo vectorial: $\vec{E}(x, y, z) = (x + y + z)\left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right)$ calcular: c) su flujo a través de la superficie del triángulo, d) su circulación a lo largo del perímetro del triángulo: $A \to B \to C \to A$.



Solución: **I.T.I. 05**

a) Sabemos que el producto vectorial de dos vectores es un vector cuyo módulo es igual al área del paralelogramo formado con ayuda de esos dos vectores. El área del triángulo será justamente la mitad. Utilizando los puntos A, B y C del enunciado:

$$Area = \frac{1}{2}\left|\, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \,\right| = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{unid. long.}^2}$$

b) Como los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ están contenidos en el plano el vector $\vec{V} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right)$ será un vector perpendicular al plano.

Sea D de coordenadas (x, y, z) un punto cualquiera del plano. El vector $\overrightarrow{AD}$ es un vector contenido en el plano que nos piden y por lo tanto debe ser perpendicular al vector $\vec{V}$:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \vec{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x + y + z = 1}$$

c) El cálculo del flujo del campo $\vec{E}$ a través de la superficie del triángulo será:

$$\oint\limits_{\substack{\text{triángulo ABC}\\ \text{en el plano}\\ x+y+z=1}} \vec{E}\left(x, y, z\right) d\vec{S} = \oint\limits_{\substack{\text{triángulo ABC}\\ \text{en el plano}\\ x+y+z=1}} \left(x + y + z\right)\left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right) d\vec{S} = \oint\limits_{\substack{\text{triángulo ABC}\\ \text{en el plano}\\ x+y+z=1}} \left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right) d\vec{S} =$$

$$= \left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right) \oint\limits_{\substack{\text{triángulo ABC}\\ \text{en el plano}\\ x+y+z=1}} d\vec{S} = \left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right) \cdot \vec{S}_{triángulo} =$$

$$= \left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) = \boxed{\frac{3}{2}}$$

d) El perímetro $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ está contenido en el plano del triángulo mientras que la orientación del campo $\vec{E}$ es paralela al vector $\left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right)$ que es justamente un vector perpendicular al plano con lo que se deduce que la circulación de $\vec{E}$ a lo largo del camino propuesto es nula.