CAMPOS: SUPERFICIES

Hallar un vector unitario normal a la superficie $x^2y + 2xz = 4$ en el punto (2,–2,3).

Solución: **I.T.I. 98, I.T.T. 99, 02**

En primer lugar deberíamos verificar que el punto (2,–2,3) pertenece realmente a dicha superficie. Si sustituimos x por 2, y por –2 y z por 3 en la ecuación de la superficie vemos que se verifica.

La superficie cuya ecuación nos dan se puede interpretar como la superficie en la cual el campo escalar $\Phi(x,y,z) = x^2y + 2xz$ toma el valor 4 en cada uno de sus puntos. Desde este punto de vista se trataría de una superficie equiescalar de dicho campo.

Si calculamos el gradiente de dicho campo escalar en el punto (2,–2,3) nos dará un vector perpendicular a la superficie equiescalar que pasa por dicho punto, es decir, a la superficie que nos dan en el enunciado del problema.

$$\left[\vec{\nabla}\Phi(x,y,z)\right]_{(2,-2,3)} = \left[(2xy+2z)\hat{i} + x^2\,\hat{j} + 2x\,\hat{k}\right]_{(2,-2,3)} = -2\hat{i} + 4\,\hat{j} + 4\,\hat{k}$$

Para hallar el vector unitario que nos piden simplemente dividimos el vector obtenido por su módulo:

$$\hat{u} = \frac{-2\hat{i} + 4\,\hat{j} + 4\,\hat{k}}{\left|-2\hat{i} + 4\,\hat{j} + 4\,\hat{k}\right|} = \boxed{-\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}}$$

Hallar un vector unitario normal a la superficie $x^2z + 2xy = 6$ en el punto (1,3,0). Hallar la ecuación del plano tangente a dicha superficie en dicho punto.

Solución: **I.T.I. 00, 03, I.T.T. 96, 00, 04**

En primer lugar deberíamos verificar que el punto (1,3,0) pertenece realmente a dicha superficie. Si sustituimos x por 1, y por 3 y z por 0 en la ecuación de la superficie vemos que se verifica.

La superficie cuya ecuación nos dan se puede interpretar como la superficie en la cual el campo escalar $\Phi(x,y,z) = x^2z + 2xy$ toma el valor 6 en cada uno de sus puntos. Desde este punto de vista se trataría de una superficie equiescalar de dicho campo.

Si calculamos el gradiente de dicho campo escalar en el punto (1,3,0) nos dará un vector perpendicular a la superficie equiescalar que pasa por dicho punto, es decir, a la superficie que nos dan en el enunciado del problema.

$$\left[\vec{\nabla}\Phi(x,y,z)\right]_{(1,3,0)} = \left[(2xz+2y)\hat{\imath} + 2x\,\hat{\jmath} + x^2\,\hat{k}\right]_{(1,3,0)} = 6\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + \hat{k}$$

Para hallar el vector unitario que nos piden simplemente dividimos el vector obtenido por su módulo:

$$\hat{u} = \frac{6\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + \hat{k}}{\left|6\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + \hat{k}\right|} = \boxed{\frac{6}{\sqrt{41}}\hat{\imath} + \frac{2}{\sqrt{41}}\hat{\jmath} + \frac{1}{\sqrt{41}}\hat{k}}$$

El plano que nos piden debe ser perpendicular al vector $\vec{V} = 6\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + \hat{k}$ y pasar por el punto Q de coordenadas (1,3,0).

Sea A de coordenadas (x, y, z) un punto cualquiera del plano. El vector $\overrightarrow{AQ}$ es un vector contenido en el plano que nos piden y por lo tanto debe ser perpendicular al vector $\vec{V}$:

$$\overrightarrow{AQ}\cdot\vec{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{6x + 2y + z = 12}$$

(Se podría haber tomado al inicio del problema en su lugar el campo $\Phi(x,y,z) = x^2z + 2xy - 6$ que tomaría el valor nulo en cada uno de los puntos de la superficie considerada. El hecho de añadir una constante, en esta caso –6, al campo escalar no modifica en nada el cálculo del gradiente y por lo tanto no modifica el resultado del problema.)

Obtener un vector unitario perpendicular al paraboloide $y^2 + z^2 = 5x$ en el punto (1,1,2). ¿Cuál será la ecuación del plano tangente al paraboloide en dicho punto?

Solución: I.T.I. 99, 02, 05, 06, I.T.T. 03, 06

En primer lugar deberíamos verificar que el punto (1,1,2) pertenece realmente a dicha superficie. Si sustituimos x por 1, y por 1 y z por 2 en la ecuación de la superficie vemos que se verifica.

La superficie cuya ecuación nos dan se puede interpretar como la superficie en la cual el campo escalar $\Phi(x,y,z) = y^2 + z^2 - 5x$ toma el valor 0 en cada uno de sus puntos. Desde este punto de vista se trataría de una superficie equiescalar de dicho campo.

Si calculamos el gradiente de dicho campo escalar en el punto (1,1,2) nos dará un vector perpendicular a la superficie equiescalar que pasa por dicho punto, es decir, a la superficie que nos dan en el enunciado del problema.

$$\left[\vec{\nabla}\Phi(x,y,z)\right]_{(1,1,2)} = \left[-5\hat{\imath} + 2y\,\hat{\jmath} + 2z\hat{k}\right]_{(1,1,2)} = -5\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + 4\hat{k}$$

Para hallar el vector unitario que nos piden simplemente dividimos el vector obtenido por su módulo:

$$\hat{u}=\frac{-5\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+4\hat{k}}{\left|-5\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+4\hat{k}\right|}=\boxed{\frac{-5}{\sqrt{45}}\hat{\imath}+\frac{2}{\sqrt{45}}\hat{\jmath}+\frac{4}{\sqrt{45}}\hat{k}}$$

El plano que nos piden debe ser perpendicular al vector $\vec{V}=-5\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+4\hat{k}$ y pasar por el punto Q de coordenadas $(1,1,2)$.

Sea A de coordenadas (x, y, z) un punto cualquiera del plano. El vector $\overrightarrow{AQ}$ es un vector contenido en el plano que nos piden y por lo tanto debe ser perpendicular al vector $\vec{V}$:

$$\overrightarrow{AQ}\cdot\vec{V}=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{-5x+2y+4z=5}$$

(Se podría haber tomado al inicio del problema en su lugar el campo $\Phi(x,y,z)=y^2+z^2-5x+6$ que tomaría el valor 6 en cada uno de los puntos de la superficie considerada. El hecho de añadir una constante, en esta caso 6, al campo escalar no modifica en nada el cálculo del gradiente y por lo tanto no modifica el resultado del problema.)

Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z=x^2+y^2$ en el punto $(1,-1,2)$.

Solución: **I.T.I. 97, I.T.T. 97, 01**

En primer lugar deberíamos verificar que el punto $(1,-1,2)$ pertenece realmente a dicha superficie. Si sustituimos x por 1, y por -1 y z por 2 en la ecuación de la superficie vemos que se verifica.

La superficie cuya ecuación nos dan se puede interpretar como la superficie en la cual el campo escalar $\Phi(x,y,z)=x^2+y^2-z$ toma el valor 0 en cada uno de sus puntos. Desde este punto de vista se trataría de una superficie equiescalar de dicho campo.

Si calculamos el gradiente de dicho campo escalar en el punto $(1,-1,2)$ nos dará un vector perpendicular a la superficie equiescalar que pasa por dicho punto, es decir, a la superficie que nos dan en el enunciado del problema.

$$\left[\vec{\nabla}\Phi(x,y,z)\right]_{(1,-1,2)}=\left[2x\hat{\imath}+2y\hat{\jmath}-\hat{k}\right]_{(1,-1,2)}=2\hat{\imath}-2\hat{\jmath}-\hat{k}$$

El plano que nos piden debe ser perpendicular al vector $\vec{V}=2\hat{\imath}-2\hat{\jmath}-\hat{k}$ y pasar por el punto Q de coordenadas $(1,-1,2)$.

Sea A de coordenadas (x, y, z) un punto cualquiera del plano. El vector $\overrightarrow{AQ}$ es un vector contenido en el plano que nos piden y por lo tanto debe ser perpendicular al vector $\vec{V}$:

$$\overrightarrow{AQ}\cdot\vec{V}=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{2x-2y-z=2}$$

Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la normal a la superficie del paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$ en el punto (2,–1,5).

Solución: I.T.T. 95, 05, I.I. 94

En primer lugar deberíamos verificar que el punto (2,–1,5) pertenece realmente a dicha superficie. Si sustituimos x por 2, y por –1 y z por 5 en la ecuación de la superficie vemos que se verifica.

La superficie cuya ecuación nos dan se puede interpretar como la superficie en la cual el campo escalar $\Phi(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$ toma el valor 0 en cada uno de sus puntos. Desde este punto de vista se trataría de una superficie equiescalar de dicho campo.

Si calculamos el gradiente de dicho campo escalar en el punto (2,–1,5) nos dará un vector perpendicular a la superficie equiescalar que pasa por dicho punto, es decir, a la superficie que nos dan en el enunciado del problema.

$$\left[\vec{\nabla}\Phi(x,y,z)\right]_{(2,-1,5)} = \left[2x\,\hat{i} + 2y\,\hat{j} - \hat{k}\right]_{(2,-1,5)} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$$

El plano que nos piden debe ser perpendicular al vector $\vec{V} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ y pasar por el punto Q de coordenadas (2,–1,5).

Sea A de coordenadas (x, y, z) un punto cualquiera del plano. El vector $\overrightarrow{AQ}$ es un vector contenido en el plano que nos piden y por lo tanto debe ser perpendicular al vector $\vec{V}$:

$$\overrightarrow{AQ}\cdot\vec{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{4x - 2y - z = 5}$$

La recta normal que nos piden debe ser paralela al vector $\vec{V} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ y pasar por el punto Q de coordenadas (2,–1,5).

Para calcular la ecuación de dicha recta, cojamos un punto B cualquiera de coordenadas (x, y, z) perteneciente a dicha recta. El vector $\overrightarrow{BQ}$ es un vector contenido en dicha recta y por lo tanto debe ser paralelo al vector $\vec{V}$:

$$\overrightarrow{BQ} \parallel \vec{V} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{BQ} = \lambda\vec{V} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left\{\begin{array}{l} x = 4\lambda + 2 \\ y = -2\lambda - 1 \\ z = -\lambda + 5 \end{array}\right.}$$

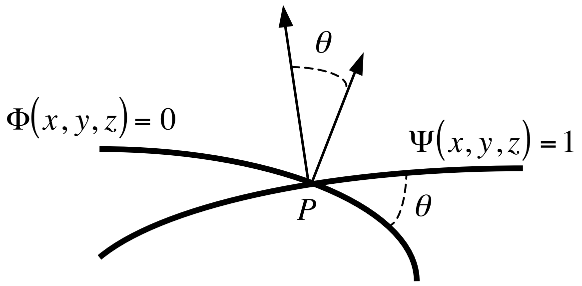
Hallar el ángulo que forman las superficies $xy^2z = 3x + z^2$ y $3x^2 - y^2 + 2z = 1$ en el punto (1,–2,1).

Solución: I.T.I. 06, I.T.T. 95, 03, 06, I.I. 94

En primer lugar deberíamos verificar que el punto (1,–2,1) pertenece realmente a dichas superficies. Si sustituimos x por 1, y por –2 y z por 1 en las ecuaciones de las superficies vemos que se verifican.

Las superficies cuyas ecuaciones nos dan se pueden interpretar como superficies en las cuales los campos escalares $\Phi(x,y,z) = xy^2z - 3x - z^2$, $\Psi(x,y,z) = 3x^2 - y^2 + 2z$ toman respectivamente los valores 0 y 1 en cada uno de sus puntos. Desde este punto de vista se trataría de superficies equiescalares de cada campo.

Si calculamos el gradiente de dichos campos escalares en el punto (1,–2,1) nos dará dos vectores perpendiculares respectivamente a las superficies equiescalares que nos dan en el enunciado del problema. El ángulo que forman las direcciones de estos dos vectores es el mismo que forman entre sí las dos superficies. En realidad hay dos ángulos: θ y 180° – θ.



Corte de las superficies equiescalares con sus dos vectores gradiente en el punto de intersección *P*.

$$\vec{V}_1 = \left[\vec{\nabla}\Phi(x,y,z)\right]_{(1,-2,1)} = \left[\left(y^2z - 3\right)\hat{\imath} + 2xyz\,\hat{\jmath} + \left(xy^2 - 2z\right)\hat{k}\right]_{(1,-2,1)} = \hat{\imath} - 4\,\hat{\jmath} + 2\hat{k}$$

$$\vec{V}_2 = \left[\vec{\nabla}\Psi(x,y,z)\right]_{(1,-2,1)} = \left[6x\,\hat{\imath} - 2y\,\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right]_{(1,-2,1)} = 6\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath} + 2\hat{k}$$

El ángulo formado por estos dos vectores será:

$$\cos\theta = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{V_1\, V_2} = \frac{-6}{\sqrt{21}\sqrt{56}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \theta = \boxed{100.08^{\circ}} \\ 180^{\circ} - \theta = \boxed{79.92^{\circ}} \end{cases}$$

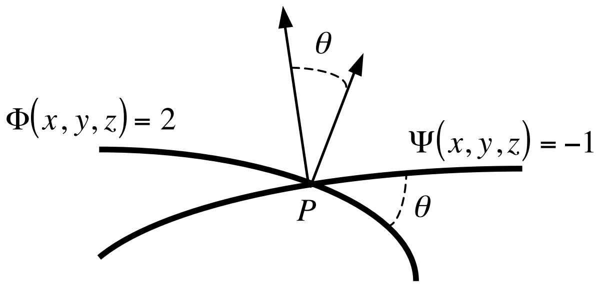
Hallar el ángulo que forman las superficies $x^3 - 2yz + z^2 = 2$ y $xyz - y^2x + x^2z = -1$ en el punto (1,0,–1).

Solución: **I.T.T. 97, 01**

En primer lugar deberíamos verificar que el punto (1,0,–1) pertenece realmente a dichas superficies. Si sustituimos x por 1, y por 0 y z por –1 en las ecuaciones de las superficies vemos que se verifican.

Las superficies cuyas ecuaciones nos dan se pueden interpretar como superficies en las cuales los campos escalares $\Phi(x,y,z) = x^3 - 2yz + z^2$, $\Psi(x,y,z) = xyz - y^2x + x^2z$ toman respectivamente los valores 2 y –1 en cada uno de sus puntos. Desde este punto de vista se trataría de superficies equiescalares de cada campo.

Si calculamos el gradiente de dichos campos escalares en el punto (1,0,–1) nos dará dos vectores perpendiculares respectivamente a las superficies equiescalares que nos dan en el enunciado del problema. El ángulo que forman las direcciones de estos dos vectores es el mismo que forman entre sí las dos superficies. En realidad hay dos ángulos: θ y 180° – θ.



Corte de las superficies equiescalares con sus dos vectores gradiente en el punto de intersección *P*.

$$\vec{V}_1 = \left[\vec{\nabla}\Phi(x,y,z)\right]_{(1,0,-1)} = \left[3x^2\,\hat{i} - 2z\,\hat{j} + (-2y + 2z)\,\hat{k}\right]_{(1,0,-1)} = 3\hat{i} + 2\,\hat{j} - 2\,\hat{k}$$

$$\vec{V}_2 = \left[\vec{\nabla}\Psi(x,y,z)\right]_{(1,0,-1)} = \left[\left(yz - y^2 + 2xz\right)\hat{i} + \left(xz - 2yx\right)\hat{j} + \left(xy + x^2\right)\hat{k}\right]_{(1,0,-1)} = -2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

El ángulo formado por estos dos vectores será:

$$\cos\theta = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{V_1\,V_2} = -\sqrt{\frac{50}{51}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \theta = \boxed{171.95^{\circ}} \\ 180^{\circ} - \theta = \boxed{8.05^{\circ}} \end{cases}$$