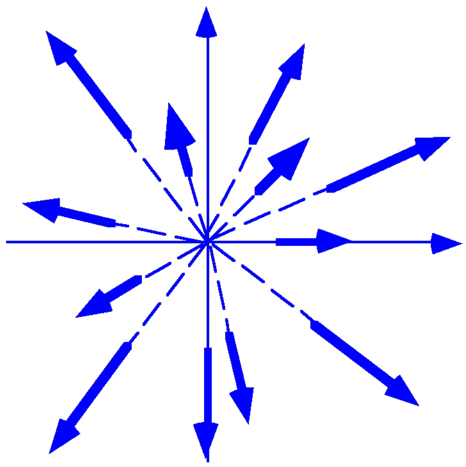
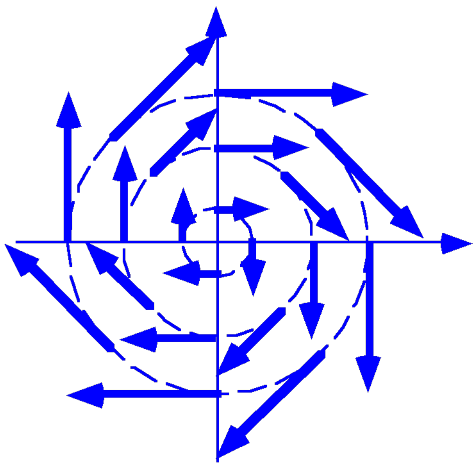
CAMPOS: OPERADOR NABLA

Representar los campos vectoriales $\vec{A} = x\hat{i} + y\hat{j}$, $\vec{B} = y\hat{i} - x\hat{j}$. Hallar la divergencia y el rotacional de cada uno de ellos y explicar el significado físico de los resultados obtenidos.

Solución: I.T.I. 00, 03, 06, I.T.T. 95, 97, 00, 01, 03, 05, 06, I.I. 94



$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 2 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$



$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = -2\hat{k}$

$\vec{A}$ es un campo irrotacional o conservativo (rotacional nulo) con una divergencia o "fuente" de campo constante en todo el espacio. $\vec{B}$ es un campo solenoidal (divergencia nula) y rotacional o de vórtice (rotacional no nulo) con un rotacional constante en todo el espacio.

Dado el campo vectorial: $\vec{A} = x^2\,\hat{i} + \operatorname{sen} y\,\hat{j} + zx\,\hat{k}$, hallar: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$, $\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)$ y $\vec{\nabla}\times\vec{A}$

Solución: I.T.I. 96, 00, 03, 06, I.T.T 95, 00, 03, 06, I.I. 94

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \boxed{3x + \cos y}$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(3x + \cos y\right) = \frac{\partial\left(3x + \cos y\right)}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\left(3x + \cos y\right)}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\left(3x + \cos y\right)}{\partial z}\hat{k} = \boxed{3\hat{i} - \operatorname{sen} y\,\hat{j}}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k} = \boxed{-z\,\hat{j}}$$

Dado el campo vectorial: $\vec{A} = 2x^2z\,\hat{i} - xy^2z\,\hat{j} + 3yz^2\,\hat{k}$, hallar: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$, $\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)$ y $\vec{\nabla}\times\vec{A}$

Solución: I.T.T. 96, 02, 05

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \boxed{4xz - 2xyz + 6yz}$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(4xz - 2xyz + 6yz\right) = \frac{\partial(\ldots)}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial(\ldots)}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial(\ldots)}{\partial z}\hat{k} =$$

$$= \boxed{2z(2-y)\,\hat{i} + 2z(3-x)\,\hat{j} + (4x - 2xy + 6y)\,\hat{k}}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \boxed{\left(3z^2 + xy^2\right)\hat{i} + 2x^2\,\hat{j} - y^2z\,\hat{k}}$$

Dado el campo vectorial: $\vec{A} = z\,\mathrm{sen}\,z\,\hat{i} + z\cos z\,\hat{j} + \sqrt{x^2 + y^2}\,\hat{k}$, hallar: $\vec{\nabla}A$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$, $\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}A\right)$, $\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)$, $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ y $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}A\right)$

Solución: I.T.I. 97, 03, 06, I.T.T. 97, 00, 03, 06

$$A = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$$

$$\vec{\nabla}A = \frac{\partial A}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial A}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial A}{\partial z}\hat{k} = \boxed{\frac{x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \hat{r}}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \boxed{0} \qquad \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) = \vec{\nabla}(0) = \boxed{0}$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}A\right) = \vec{\nabla}\left(\frac{x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \boxed{\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2}{r}}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=$$

$$=\boxed{\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\cos z+z\,\mathrm{sen}\,z\right)\hat{i}+\left(\mathrm{sen}\,z+z\cos z-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\hat{j}}$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}A\right)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{vmatrix}=\boxed{0}$$

Siendo $\vec{A}=2yz\,\hat{i}-x^2y\,\hat{j}+xz^2\,\hat{k}$ y $\Phi=2x^2yz^3$, hallar: $\vec{\nabla}\Phi$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$, $\vec{\nabla}\times\vec{A}$, $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\Phi\right)$, y $\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)$

Solución: **I.T.I. 98, I.T.T. 99, 01, 04**

$$\vec{\nabla}\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{k}=\boxed{4xyz^3\,\hat{i}+2x^2z^3\,\hat{j}+6x^2yz^2\,\hat{k}}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\boxed{-x^2+2xz}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=$$

$$=\boxed{\left(2y-z^2\right)\hat{j}-\left(2xy+2z\right)\hat{k}}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\Phi\right)=\vec{\nabla}\left(4xyz^3\,\hat{i}+2x^2z^3\,\hat{j}+6x^2yz^2\,\hat{k}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(4xyz^3\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(2x^2z^3\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(6x^2yz^2\right)=\boxed{4yz^3+12x^2yz}$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\left(-x^2+2xz\right)=\boxed{(-2x+2z)\hat{i}+2x\hat{k}}$$

Dado el campo escalar $\Phi\left(x,y,z\right)=x^2yz+3x^2$ calcular su gradiente, la divergencia del gradiente y el rotacional del gradiente.

Solución: I.T.I. 04, I.T.T. 05

$$\vec{\nabla}\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{k}=\boxed{\left(2xyz+6x\right)\hat{i}+x^2z\,\hat{j}+x^2y\,\hat{k}}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\Phi\right)=\vec{\nabla}\left[\left(2xyz+6x\right)\hat{i}+x^2z\,\hat{j}+x^2y\,\hat{k}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left(2xyz+6x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2z\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2y\right)=$$

$$=\boxed{2yz+6}$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\Phi\right)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xyz+6x & x^2z & x^2y\end{vmatrix}=\ldots=\boxed{0}$$

(Se puede demostrar que cuando se calcula el rotacional del gradiente de un campo escalar el resultado siempre es nulo)

Si $\Phi=x^2y+3yz+5$ determinar $\vec{\nabla}\Phi$, $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\Phi\right)$ y $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\Phi\right)$. ¿Cuál sería su derivada direccional en el punto (1, 1, 0) según la dirección determinada por el vector unitario (0.6, 0.8, 0)?

Solución: I.T.I. 99, 02, 05, I.T.T. 02, 04

$$\vec{\nabla}\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{k}=\boxed{2xy\,\hat{i}+\left(x^2+3z\right)\hat{j}+3y\,\hat{k}}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\Phi\right)=\vec{\nabla}\left[2xy\,\hat{\imath}+\left(x^2+3z\right)\hat{\jmath}+3y\,\hat{k}\right]=\frac{\partial}{\partial x}(2xy)+\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+3z\right)+\frac{\partial}{\partial z}(3y)=\boxed{2y}$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\Phi\right)=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xy & x^2+3z & 3y\end{vmatrix}=\boxed{0}$$

La derivada direccional en el punto que nos dan y según el vector unitario $\hat{u}$ del enunciado será igual al producto escalar del gradiente en dicho punto por dicho vector unitario:

$$\frac{d\Phi}{dl}=\vec{\nabla}\Phi\Big|_{(1,1,0)}\cdot\hat{u}=\boxed{2}$$

Dado el campo vectorial: $\vec{A}=xy\hat{\imath}-z^2\,\hat{\jmath}+xyz\,\hat{k}$ calcular la divergencia del vector y su rotacional, así como el gradiente de la divergencia.

Solución: **I.T.I. 01, I.T.T. 02**

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\boxed{y+xy}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\imath}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}=$$

$$=\boxed{(xz+2z)\hat{\imath}-yz\,\hat{\jmath}-x\,\hat{k}}$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)=\vec{\nabla}(y+xy)=\frac{\partial(y+xy)}{\partial x}\hat{\imath}+\frac{\partial(y+xy)}{\partial y}\hat{\jmath}+\frac{\partial(y+xy)}{\partial z}\hat{k}=\boxed{y\hat{\imath}+(1+x)\hat{\jmath}}$$

Dada la función escalar $U=xye^z$ hallar la divergencia del gradiente del campo.

Solución: **I.T.I. 01, I.T.T. 02**

$$\vec{\nabla}U=\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath}+\frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath}+\frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}=ye^z\,\hat{\imath}+xe^z\,\hat{\jmath}+xye^z\,\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}U\right)=\vec{\nabla}\left(ye^{z}\,\hat{i}+xe^{z}\,\hat{j}+xye^{z}\,\hat{k}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(ye^{z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(xe^{z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(xye^{z}\right)=\boxed{xye^{z}}$$

Dado el campo escalar $\phi(x,y,z)=2xz-3x^2+xy$ hallar su derivada direccional en el punto (1,0,–3) según la dirección determinada por el vector unitario $\hat{u}=(-0.6,0,0.8)$

Solución: **I.T.I. 01, 03, 04, 06, I.T.T. 01, 03, 05, 06**

La derivada direccional en la dirección y sentido de un vector unitario es la proyección del gradiente en esa dirección y sentido, es decir su producto escalar por dicho vector unitario:

$$\left[\vec{\nabla}\phi(x,y,z)\right]_{(1,0,-3)}\cdot\hat{u}=\left[(2z-6x+y)\hat{i}+x\,\hat{j}+2x\,\hat{k}\right]_{(1,0,-3)}\cdot\hat{u}=\left(-12\,\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}\right)\cdot\hat{u}=\boxed{8.8}$$

Calcular el rotacional de $\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ donde $\vec{r}=x\,\hat{i}+y\,\hat{j}+z\,\hat{k}$ es el vector de posición.

Solución: **I.T.I. 98, 99, 04, 05, I.T.T. 99, 01, 04**

Expresando todo en función de las coordenadas x, y, y z:

$$\frac{\vec{r}}{r^3}=\frac{x\hat{i}+y\,\hat{j}+z\hat{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{r^3}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} & \dfrac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} & \dfrac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\end{vmatrix}=\ldots=\boxed{0}$$

Demostrar que el rotacional del gradiente de un campo escalar siempre es nulo: $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\Phi\right)=0$ y que la divergencia del rotacional de un campo vectorial siempre es nula: $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=0$ independientemente de cuales sean los campos Φ y $\vec{A}$.

Solución: **I.T.T. 97, 00, 02**

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\Phi\right)=\vec{\nabla}\times\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{\imath}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{\jmath}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{k}\right)=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} & \frac{\partial\Phi}{\partial y} & \frac{\partial\Phi}{\partial z}\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y}\right)\hat{\imath}+\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}\right)\hat{\jmath}+\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}\right)\hat{k}=\boxed{0}$$

Suponiendo que Φ tiene segundas derivadas parciales continuas con lo que el orden de derivación no importa.

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\imath}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}\right]=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial y}\right)=\boxed{0}$$

Suponiendo que $\vec{A}$ tiene segundas derivadas parciales continuas con lo que el orden de derivación no importa.

Demostrar que $\vec{\nabla}\Phi(r)=\frac{d\Phi}{dr}\hat{r}$, donde r es la distancia radial al origen, y hallar $\Phi(r)$ para el caso particular en que $\vec{\nabla}\Phi(r)=\frac{\vec{r}}{r^5}$ y $\Phi(1)=0$.

Solución: I.T.I. 06, I.T.T. 95, 03, 06, I.I. 94

Si el campo escalar sólo depende de la distancia radial r (lo que significa que tiene simetría esférica), al derivar respecto de cualquier coordenada x, y, o z, deberemos utilizar la regla de la cadena: primero derivaremos respecto de r y luego derivaremos r respecto a la coordenada en cuestión:

$$\frac{\partial\Phi(r)}{\partial x}=\frac{d\Phi(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{d\Phi(r)}{dr}\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x}=\frac{d\Phi(r)}{dr}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{d\Phi(r)}{dr}\frac{x}{r}$$

Igualmente: $\frac{\partial\Phi(r)}{\partial y}=\ldots=\frac{d\Phi(r)}{dr}\frac{y}{r}$, $\frac{\partial\Phi(r)}{\partial z}=\ldots=\frac{d\Phi(r)}{dr}\frac{z}{r}$

Calculando el gradiente del campo escalar:

$$\vec{\nabla}\Phi(r) = \frac{\partial\Phi(r)}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\Phi(r)}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\Phi(r)}{\partial z}\hat{k} = \frac{d\Phi(r)}{dr}\left(\frac{x}{r}\hat{i} + \frac{y}{r}\hat{j} + \frac{z}{r}\hat{k}\right) = \frac{d\Phi(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{d\Phi(r)}{dr}\hat{r}$$

Como se ha demostrado, el resultado es equivalente a derivar el campo escalar respecto de la variable radial r y multiplicar por el vector unitario radial.

En el caso particular que nos proponen:

¡Error!Marcador no definido.

$$\boxed{\Phi = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{r^3}\right)}$$

Demostrar que si un campo escalar tiene simetría esférica el operador $\vec{\nabla}$ actuando sobre dicho campo es equivalente al operador $\left(\frac{d}{dr}\right)\hat{r}$ donde $\vec{r}$ es el vector de posición del punto tomando como origen el centro de simetría. Aplicarlo a $\Phi(r) = r^n$

Solución: **I.T.T. 96, 00, 04, 05**

Si el campo escalar tiene simetría esférica eso significa que sólo depende de la distancia radial r, es decir se puede escribir de la forma $\Phi(r)$.

Derivando utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial\Phi(r)}{\partial x} = \frac{d\Phi(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{d\Phi(r)}{dr}\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x} = \frac{d\Phi(r)}{dr}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{d\Phi(r)}{dr}\frac{x}{r}$$

Igualmente: $\frac{\partial\Phi(r)}{\partial y} = \ldots = \frac{d\Phi(r)}{dr}\frac{y}{r}$, $\frac{\partial\Phi(r)}{\partial z} = \ldots = \frac{d\Phi(r)}{dr}\frac{z}{r}$

Calculando el gradiente del campo escalar:

$$\vec{\nabla}\Phi(r) = \frac{\partial\Phi(r)}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\Phi(r)}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\Phi(r)}{\partial z}\hat{k} = \frac{d\Phi(r)}{dr}\left(\frac{x}{r}\hat{i} + \frac{y}{r}\hat{j} + \frac{z}{r}\hat{k}\right) = \frac{d\Phi(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{d\Phi(r)}{dr}\hat{r}$$

Como se ha demostrado, el resultado es equivalente a derivar el campo escalar respecto de la variable radial r y multiplicar por el vector unitario radial.

Aplicando esta demostración al campo escalar $\Phi(r) = r^n$

$$\vec{\nabla}\Phi(r) = \frac{d\Phi(r)}{dr}\hat{r} = \frac{d\left(r^n\right)}{dr}\hat{r} = \boxed{n\, r^{n-1}\,\hat{r}}$$

Demostrar que $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi = \Delta\Phi$, y demostrar que $\Phi(r) = \dfrac{1}{r}$ es una solución de la ecuación de Laplace $\Delta\Phi = 0$

Solución: I.T.T. 96

Operando:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\Phi\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{k}\right) = \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi = \Delta\Phi$$

Con lo cual vemos que calcular la divergencia del gradiente de un campo escalar es equivalente a aplicarle el operador laplaciana Δ.

Para la segunda parte del problema derivamos $\Phi(r) = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} = -\frac{x}{r^3} \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \ldots = \frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}$$

igualmente: $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \ldots = \dfrac{3y^2}{r^5} - \dfrac{1}{r^3} \qquad \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \ldots = \dfrac{3z^2}{r^5} - \dfrac{1}{r^3}$

con lo cual:

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} = \frac{3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}{r^5} - \frac{3}{r^3} = \frac{3r^2}{r^5} - \frac{3}{r^3} = \boxed{0}$$