VECTORES: DERIVADAS E INTEGRALES

Siendo $\vec{R}$ el vector de componentes $(1, \text{sen}(t), \cos(t))$, calcular:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} \qquad \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \qquad \frac{dR}{dt} \qquad \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| \qquad \int \vec{R}dt$$

Solución: I.T.I. 93, I.T.T. 05

Derivando componente a componente: $\boxed{\dfrac{d\vec{R}}{dt} = (0, \cos(t), -\text{sen}(t))}$ (1)

Derivando de nuevo: $\boxed{\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2} = (0, -\text{sen}(t), -\cos(t))}$

Calculando el módulo de $\vec{R}$: $R = \left|\vec{R}\right| = \sqrt{2}$

Derivando esta expresión: $\boxed{\dfrac{dR}{dt} = 0}$

Calculando el módulo de (1): $\boxed{\left|\dfrac{d\vec{R}}{dt}\right| = 1}$

Integrando $\vec{R}$ componente a componente: $\boxed{\int \vec{R}dt = (t, -\cos(t), \text{sen}(t)) + \vec{C}}$

Donde $\vec{C}$ es un vector constante.

Siendo $\vec{R}$ el vector de componentes $\left(e^{-t}, 2\cos(3t), 2\,\text{sen}(3t)\right)$, calcular:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} \qquad \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \qquad \frac{dR}{dt} \qquad \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| \qquad \left|\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right| \qquad \int \vec{R}\,dt$$

Solución: **I.T.I. 95**

Derivando componente a componente:

$$\boxed{\frac{d\vec{R}}{dt} = \left(-e^{-t}, -6\,\text{sen}(3t), 6\cos(3t)\right)} \quad (1)$$

Derivando de nuevo:

$$\boxed{\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \left(e^{-t}, -18\cos(3t), -18\,\text{sen}(3t)\right)} \quad (2)$$

Calculando el módulo de (1):

$$\boxed{\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = \sqrt{e^{-2t} + 36}} \quad (3)$$

Calculando el módulo de (2):

$$\boxed{\left|\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right| = \sqrt{e^{-2t} + 324}} \quad (4)$$

Calculando el módulo de $\vec{R}$: $R = \left|\vec{R}\right| = \sqrt{e^{-2t} + 4}$

Derivando esta expresión:

$$\boxed{\frac{dR}{dt} = \frac{-e^{-2t}}{\sqrt{e^{-2t} + 4}}} \quad (5)$$

Vemos que no es lo mismo derivar y luego calcular el módulo, resultado (3), que calcular primero el módulo y luego derivar, resultado (5).

Integrando $\vec{R}$ componente a componente:

$$\boxed{\int \vec{R}\,dt = \left(-e^{-t}, \frac{2}{3}\text{sen}(3t), -\frac{2}{3}\cos(3t)\right) + \vec{C}}$$

Donde $\vec{C}$ es un vector constante.

Siendo $\vec{R}$ el vector de componentes $(\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, calcular:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} \qquad \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \qquad \frac{dR}{dt} \qquad \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| \qquad \left|\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right| \qquad \int \vec{R}dt$$

Solución: **I.T.I. 92, I.T.T. 95, I.I. 94**

Derivando componente a componente: $\boxed{\frac{d\vec{R}}{dt} = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 1)}$ (1)

Derivando de nuevo: $\boxed{\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = (-\operatorname{sen} t, -\cos t, 0)}$ (2)

Calculando el módulo de (1): $\boxed{\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = \sqrt{2}}$ (3)

Calculando el módulo de (2): $\boxed{\left|\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right| = 1}$ (4)

Calculando el módulo de $\vec{R}$: $R = \left|\vec{R}\right| = \sqrt{1+t^2}$

Derivando esta expresión: $\boxed{\frac{dR}{dt} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}$ (5)

Vemos que no es lo mismo derivar y luego calcular el módulo, resultado (3), que calcular primero el módulo y luego derivar, resultado (5).

Integrando $\vec{R}$ componente a componente: $\boxed{\int \vec{R}dt = \left(-\cos t, \operatorname{sen} t, \frac{t^2}{2}\right) + \vec{C}}$ (6)

Donde $\vec{C}$ es un vector constante.

Siendo $\vec{R}$ el vector de componentes $\left(\frac{1}{t}, t^2, e^{-t}\right)$, calcular:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} \qquad \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \qquad \frac{dR}{dt} \qquad \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| \qquad \left|\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right| \qquad \int \vec{R}dt$$

Solución: **I.T.I. 96, 00, 03, 06, I.T.T. 96, 00, 03, 06**

Derivando componente a componente: $\boxed{\frac{d\vec{R}}{dt} = \left(\frac{-1}{t^2}, 2t, -e^{-t}\right)}$ (1)

Derivando de nuevo: $\boxed{\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \left(\frac{2}{t^3}, 2, e^{-t}\right)}$ (2)

Calculando el módulo de (1): $\boxed{\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{-1}{t^2}\right)^2 + (2t)^2 + \left(-e^{-t}\right)^2}}$ (3)

Calculando el módulo de (2): $\boxed{\left|\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right| = \sqrt{\left(\frac{2}{t^3}\right)^2 + (2)^2 + \left(e^{-t}\right)^2}}$ (4)

Calculando el módulo de $\vec{R}$: $R = \left|\vec{R}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(t^2\right)^2 + \left(e^{-t}\right)^2}$

Derivando esta expresión: $\boxed{\frac{dR}{dt} = \frac{\frac{-1}{t^3} + 2t^3 - e^{-2t}}{\sqrt{\frac{1}{t^2} + t^4 + e^{-2t}}}}$ (5)

Vemos que no es lo mismo derivar y luego calcular el módulo, resultado (3), que calcular primero el módulo y luego derivar, resultado (5).

Integrando $\vec{R}$ componente a componente: $\boxed{\int \vec{R}dt = \left(\ln t, \frac{t^3}{3}, -e^{-t}\right) + \vec{C}}$ (6)

Donde $\vec{C}$ es un vector constante.

Siendo $\vec{R}$ el vector de componentes $\left(\operatorname{sen}(2t), \cos(2t), \frac{1}{t}\right)$, calcular:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} \qquad \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \qquad \frac{dR}{dt} \qquad \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| \qquad \left|\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right| \qquad \int \vec{R}\,dt$$

Solución: **I.T.I. 97, I.T.T. 97, 01**

Derivando componente a componente: $$\boxed{\frac{d\vec{R}}{dt} = \left(2\cos(2t), -2\operatorname{sen}(2t)\ , \frac{-1}{t^2}\right)} \qquad (1)$$

Derivando de nuevo: $$\boxed{\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \left(-4\operatorname{sen}(2t), -4\cos(2t)\ , \frac{2}{t^3}\right)} \qquad (2)$$

Calculando el módulo de (1): $$\boxed{\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = \sqrt{4 + \frac{1}{t^4}}} \qquad (3)$$

Calculando el módulo de (2): $$\boxed{\left|\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right| = \sqrt{16 + \frac{4}{t^6}}} \qquad (4)$$

Calculando el módulo de $\vec{R}$: $R = \left|\vec{R}\right| = \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}$

Derivando esta expresión: $$\boxed{\frac{dR}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{t^6 + t^4}}} \qquad (5)$$

Vemos que no es lo mismo derivar y luego calcular el módulo, resultado (3), que calcular primero el módulo y luego derivar, resultado (5).

Integrando $\vec{R}$ componente a componente: $$\boxed{\int \vec{R}\,dt = \left(-\frac{1}{2}\cos(2t), \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t), \ln(t)\right) + \vec{C}} \qquad (6)$$

Donde $\vec{C}$ es un vector constante.

Siendo $\vec{R}$ el vector de componentes $(3t, \operatorname{sen}(t), \cos(t))$, calcular:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} \qquad \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \qquad \frac{dR}{dt} \qquad \frac{d^2R}{dt^2} \qquad \int \vec{R}\,dt$$

Solución: **I.T.I. 94, 01, I.T.T. 02**

Derivando componente a componente: $\boxed{\dfrac{d\vec{R}}{dt} = (3, \cos(t), -\operatorname{sen}(t))}$

Derivando de nuevo: $\boxed{\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2} = (0, -\operatorname{sen}(t), -\cos(t))}$

Calculando el módulo de $\vec{R}$: $R = \left|\vec{R}\right| = \sqrt{1+9t^2}$

Derivando esta expresión: $\boxed{\dfrac{dR}{dt} = \dfrac{9t}{\sqrt{1+9t^2}}}$

Derivando de nuevo: $\boxed{\dfrac{d^2R}{dt^2} = \dfrac{9}{\left(1+9t^2\right)^{3/2}}}$

Integrando $\vec{R}$ componente a componente: $\boxed{\int \vec{R}\,dt = \left(\dfrac{3}{2}t^2, -\cos(t), \operatorname{sen}(t)\right) + \vec{C}}$

Donde $\vec{C}$ es un vector constante.

Siendo $\vec{A}$ un vector de módulo constante y dirección variable con t, demostrar que dicho vector y su derivada respecto de t son perpendiculares siempre que el módulo de la derivada sea distinto de cero.

Solución: I.T.I. 92, 93, 95, 96, 97, 00, 03, 06, I.T.T. 95, 96, 97, 00, 03, 06, I.I. 94

Si A es constante: $\dfrac{dA}{dt} = 0$

Por otro lado: $A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$, luego: $\dfrac{d\left(\vec{A} \cdot \vec{A}\right)}{dt} = 0$

Desarrollando el producto escalar: $\dfrac{d\left(\vec{A} \cdot \vec{A}\right)}{dt} = \dfrac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \dfrac{d\vec{A}}{dt} = 2\vec{A} \cdot \dfrac{d\vec{A}}{dt}$

Por lo tanto si el módulo de la derivada no es nulo $\dfrac{d\vec{A}}{dt} \neq 0$, la única solución posible es que el vector y su derivada sean perpendiculares:

$$\boxed{\vec{A} \perp \frac{d\vec{A}}{dt}}$$

Si $\vec{v}$ es un vector función de un parámetro t demostrar que: si $\vec{v}$ es constante en módulo, entonces $\vec{v} \cdot \dfrac{d\vec{v}}{dt} = 0$, si $\vec{v}$ es constante en dirección $\vec{v} \times \dfrac{d\vec{v}}{dt} = 0$.

Solución: I.T.I. 04, I.T.T. 04

Si v es constante: $\dfrac{dv}{dt} = 0$

Por otro lado: $v = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$, luego: $\dfrac{d\left(\vec{v} \cdot \vec{v}\right)}{dt} = 0$

Desarrollando el producto escalar: $\dfrac{d\vec{v} \cdot \vec{v}}{dt} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \dfrac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v} \cdot \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

Por lo tanto si el módulo de la derivada no es nulo $\dfrac{d\vec{v}}{dt} \neq 0$, la única solución posible es que el vector y su derivada sean perpendiculares:

$$\boxed{\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0}$$

El vector $\vec{v}$ se puede escribir en función de su módulo v y de un vector unitario $\hat{v}$ en su misma dirección y sentido: $\vec{v} = v\,\hat{v}$. Si la dirección es constante ello implica que el vector unitario $\hat{v}$ es constante con lo que:

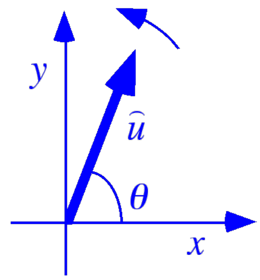
$$\vec{v} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(v\,\hat{v}\right) \times \frac{d\left(v\,\hat{v}\right)}{dt} = \left(v\,\hat{v}\right) \times \left(\frac{dv}{dt}\hat{v}\right) = v\frac{dv}{dt}\left(\hat{v} \times \hat{v}\right) = 0$$

Obtener la derivada de un vector unitario que gira en el plano *XY* con una velocidad angular constante ω. Comprobar que ambos son perpendiculares.

Solución: **I.T.I. 98, 01, I.T.T. 99, 01, 05**

Si cogemos el origen de tiempos (t = 0) en el momento en que el vector unitario era el vector $\hat{i}$ ($\theta = 0$), el ángulo que forma dicho vector unitario con el eje *X* vendrá dado por la siguiente ecuación: $\theta = \omega\, t$:

$$\left.\begin{aligned} \hat{u} &= \left(\cos[\omega\, t], \operatorname{sen}[\omega\, t], 0\right) \\ \frac{d\hat{u}}{dt} &= \omega\left(-\operatorname{sen}[\omega\, t], \cos[\omega\, t], 0\right) \end{aligned}\right\} \quad \hat{u}\cdot\frac{d\hat{u}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{u} \perp \frac{d\hat{u}}{dt}$$



Sea el vector $\vec{a} = A\left(\cos[\omega t]\hat{i} + \text{sen}[\omega t]\hat{j}\right)$ donde A y ω son constantes. Determinar: a) su módulo y la derivada de éste respecto de t, b) $\frac{d\vec{a}}{dt}$ y $\left|\frac{d\vec{a}}{dt}\right|$, c) demostrar que $\vec{a}$ y $\frac{d\vec{a}}{dt}$ son perpendiculares.

Solución: **I.T.I. 99, 02, 05, I.T.T. 02**

a) $a = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = A\sqrt{\left(\cos[\omega t]\right)^2 + \left(\text{sen}[\omega t]\right)^2} = \boxed{A}$ $\qquad \frac{da}{dt} = \boxed{0}$

b) $\frac{d\vec{a}}{dt} = \boxed{\omega A\left(-\text{sen}[\omega t]\hat{i} + \cos[\omega t]\hat{j}\right)}$ $\qquad \left|\frac{d\vec{a}}{dt}\right| = \omega A\sqrt{\left(-\text{sen}[\omega t]\right)^2 + \left(\cos[\omega t]\right)^2} = \boxed{\omega A}$

c) $\vec{a}\cdot\frac{d\vec{a}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}\perp\frac{d\vec{a}}{dt}}$

Dados los vectores $\vec{A} = t^2\,\hat{i} + 2t^3\,\hat{j} - \left(4t^2 - 3t + 8\right)\hat{k}$, $\vec{B} = \left(2t + 6\right)\hat{i} - 3t2\,\hat{j} + 2\,\hat{k}$, calcular: $\frac{d\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)}{dt}$, y $\frac{d\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)}{dt}$

Solución: **I.T.I. 98, I.T.T. 02**

$$\left.\begin{aligned} \vec{A}\cdot\vec{B} &= (2t+6)t^2 - 6t^5 - 2\left(4t^2 - 3t + 8\right) = \\ &= -6t^5 + 2t^3 - 2t^2 + 6t - 16 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)}{dt} = \boxed{-30t^4 + 6t^2 - 4t + 6}$$

¡Error!Marcador no definido.

$$\boxed{\left[-48t^3 + 39t^2 - 48t\right]\hat{i} + \left[-24t^2 - 40t + 2\right]\hat{j} + \left[-28t^3 - 36t^2\right]\hat{k}}$$

Dados los vectores $\vec{a} = (2t, \operatorname{sen} t, 0)$, $\vec{B} = (0, 2\cos t, t^2)$, calcular:
$\dfrac{d(\vec{a}+\vec{b})}{dt}$, $\dfrac{d(\vec{a}\cdot\vec{b})}{dt}$ y $\dfrac{d(\vec{a}\times\vec{b})}{dt}$

Solución: **I.T.I. 04, I.T.T. 04**

$$\vec{a}+\vec{b} = (2t, \operatorname{sen} t + 2\cos t, t^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{d(\vec{a}+\vec{b})}{dt} = \boxed{(2, \cos t - 2\operatorname{sen} t, 2t)}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\operatorname{sen} t \cos t = \operatorname{sen}(2t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d(\vec{a}\cdot\vec{b})}{dt} = \boxed{2\cos(2t)}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (t^2 \operatorname{sen} t, -2t^3, 4t\cos t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d(\vec{a}\times\vec{b})}{dt} = \boxed{\left[2t\operatorname{sen} t + t^2\cos t\right]\hat{i} - 6t^2\,\hat{j} + \left[4\cos t - 4t\operatorname{sen} t\right]\hat{k}}$$

Dados los vectores $\vec{a} = (t^2, t, 1)$ y $\vec{b} = (1, t, t+1)$ calcular:
a) $\int(\vec{a}+\vec{b})\,dt$, b) $\int(\vec{a}\cdot\vec{b})\,dt$, c) $\int(\vec{a}\times\vec{b})\,dt$

Solución: **I.T.I. 99, 04, 05, I.T.T. 99, 02, 04**

a) $$\vec{a}+\vec{b} = (t^2+1, 2t, t+2) \quad \Rightarrow \quad \int(\vec{a}+\vec{b})\,dt = \int(t^2+1, 2t, t+2)\,dt = \boxed{\left(\frac{t^3}{3}+t, t^2, \frac{t^2}{2}+2t\right)}$$

b) $$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2t^2 + \mathrm{t} + 1 \quad \Rightarrow \quad \int(\vec{a}\cdot\vec{b})\,dt = \int(2t^2 + \mathrm{t} + 1)\,dt = \boxed{\frac{2t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t}$$

c) $$\vec{a}\times\vec{b} = (t^2, 1 - t^3 - t^2, t^3 - t) \quad \Rightarrow \quad \int(\vec{a}\times\vec{b})\,dt = \int(t^2, 1 - t^3 - t^2, t^3 - t)\,dt =$$

$$= \boxed{\left(\frac{t^3}{3}, t - \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3}, \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2}\right)}$$