VECTORES: MOMENTOS

El vector $\vec{A}$ = (6, –3, 4) está aplicado en el punto P_A (3, –6, 2). Determinar el momento de dicho vector respecto del origen O y respecto del punto Q (2, 3, 1).

Solución: I.T.I. 99, I.T.T. 01

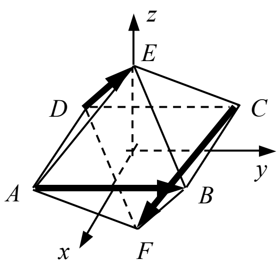
$$\boxed{\vec{M}_O = \overrightarrow{OP_A} \times \vec{A} = (-18, 0, 27)} \qquad \boxed{\vec{M}_Q = \overrightarrow{QP_A} \times \vec{A} = (-33, 2, 51)}$$

El vector $\vec{a}$ = (3, –4, 5) está aplicado en el punto A (2, 3, 1). Hallar: a) el momento de dicho vector respecto del origen O, b)) el momento de dicho vector respecto del punto B (1, 1, 1).

Solución: I.T.I. 01, 03, 06, I.T.T. 03, 06

$$\boxed{\vec{M}_O = \overrightarrow{OA} \times \vec{a} = (19, -7, -17)} \qquad \boxed{\vec{M}_B = \overrightarrow{BA} \times \vec{a} = (10, -5, -10)}$$

En el octaedro regular $ABCDEF$ de la figura, de arista $2L$, se hallan los vectores, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CF}$ y $\overrightarrow{DE}$. Determinar la resultante del sistema y el momento de la misma respecto del origen. ¿Cual sería el momento del sistema respecto del punto $(2L, 0, 0)$?



Solución: I.T.I. 92, 95, I.T.T. 95, 05, I.I. 94

Las coordenadas de los diferentes puntos son:

$A\,(L, -L, 0)$, $B\,(L, L, 0)$, $C\,(-L, L, 0)$, $D\,(-L, -L, 0)$, $E\,(0, 0, \sqrt{2}\,L)$, $F\,(0, 0, -\sqrt{2}\,L)$

con lo que los vectores del enunciado serán:

$\overrightarrow{AB} = (0, 2L, 0)$, $\overrightarrow{CF} = (L, -L, -\sqrt{2}L)$ y $\overrightarrow{DE} = (L, L, \sqrt{2}L)$.

La resultante del sistema de vectores será: $\vec{R} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{DE} = \boxed{(2L, 2L, 0)}$

El momento del sistema respecto del origen O será:

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{DE} = \boxed{\left(-2\sqrt{2}L^2, 0, 2L^2\right)}$$

Si el punto respecto al cual calculamos momentos es Q, cuyas coordenadas nos dan, tendremos:

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{QA} \times \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{QC} \times \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{QD} \times \overrightarrow{DE} = \boxed{\left(-2\sqrt{2}L^2, 0, -2L^2\right)}$$

Otra forma de calcular este resultado sería relacionándolo con el resultado anterior, $\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OA}$, y lo mismo para los otros vectores con lo cual:

$$\vec{M}_Q = \overrightarrow{QA} \times \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{QC} \times \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{QD} \times \overrightarrow{DE} =$$

$$= \left(\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OA}\right) \times \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OC}\right) \times \overrightarrow{CF} + \left(\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OD}\right) \times \overrightarrow{DE} =$$

$$= \underbrace{\overrightarrow{QO} \times \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{DE}\right)}_{\overrightarrow{QO} \times \vec{R}} + \underbrace{\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{DE}}_{\vec{M}_O}$$

En el caso en que la resultante $\vec{R}$ del sistema hubiese sido nula el momento resultante de todo el sistema de vectores no habría dependido del punto respecto al cual se hubiese calculado.

Los vectores de la figura tienen módulos que guardan la relación $\left|V_2\right| = 2\left|V_1\right| = 2\left|V_3\right|$. Calcular. a) la resultante del sistema, b) momento del sistema respecto del origen.

Solución: I.T.I. 94

Los vectores $\vec{A} = (3, 4, -2)$, $\vec{B} = (1, 1, 1)$ y $\vec{C} = (2,0, -1)$ están aplicados en los puntos (1, 0, 1), (2, 1, 1) y (0, 1, 1) respectivamente. a) ¿Cuál es la resultante del conjunto de vectores? b) ¿Cuál es el momento resultante de todo el sistema calculado respecto del origen de coordenadas? c) ¿Y si lo calculamos respecto al punto (1, 1, 1)?

Solución: I.T.I. 93, I.T.T. 04

a) La resultante del sistema será la suma de todos los vectores: $\boxed{\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (6, 5, -2)}$

b) El momento resultante de todo el sistema será la suma de los momentos de todos los vectores. Si el punto respecto al cual calculamos momentos es el origen O, y los vectores están aplicados en los puntos P_A, P_B y P_C, tendremos:

$$\boxed{\vec{M}_O = \overrightarrow{OP_A} \times \vec{A} + \overrightarrow{OP_B} \times \vec{B} + \overrightarrow{OP_C} \times \vec{C} = (-5, 6, 3)}$$

c) Si el punto respecto al cual calculamos momentos es Q, cuyas coordenadas nos dan, tendremos:

$$\boxed{\vec{M}_Q = \overrightarrow{QP_A} \times \vec{A} + \overrightarrow{QP_B} \times \vec{B} + \overrightarrow{QP_C} \times \vec{C} = (2, -2, 4)}$$

Otra forma de calcular este resultado sería relacionándolo con el resultado anterior, $\overrightarrow{QP_A} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP_A}$, y lo mismo para los otros vectores con lo cual:

$$\begin{aligned} \vec{M}_Q &= \overrightarrow{QP_A} \times \vec{A} + \overrightarrow{QP_B} \times \vec{B} + \overrightarrow{QP_C} \times \vec{C} = \\ &= \left(\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP_A}\right) \times \vec{A} + \left(\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP_B}\right) \times \vec{B} + \left(\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP_C}\right) \times \vec{C} = \\ &= \underbrace{\overrightarrow{QO} \times \left(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\right)}_{\overrightarrow{QO} \times \vec{R}} + \underbrace{\overrightarrow{OP_A} \times \vec{A} + \overrightarrow{OP_B} \times \vec{B} + \overrightarrow{OP_C} \times \vec{C}}_{\vec{M}_O} \end{aligned}$$

En el caso en que la resultante $\vec{R}$ del sistema hubiese sido nula el momento resultante de todo el sistema de vectores no habría dependido del punto respecto al cual se hubiese calculado.

Los vectores $\vec{A} = (-3, 2, -1)$, $\vec{B} = (1, -3, 5)$ y $\vec{C} = (2, 1, -4)$ están aplicados en los puntos (2, 1, 2), (–1, 0, 1) y (1, 2, 0) respectivamente. a) ¿Cuál es la resultante del conjunto de vectores? b) ¿Cuál es el momento resultante de todo el sistema calculado respecto del origen de coordenadas? c) ¿Y si lo calculamos respecto al punto (3, –2, –1)?

Solución: I.T.I. 96, 00, 03, 05, 06, I.T.T. 96, 00, 03, 06

a) La resultante del sistema será la suma de todos los vectores: $\boxed{\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0}$

Jose Javier Sandonís Ruiz 5/10/04 17:24
Con formato: Numeración y viñetas

b) El momento resultante de todo el sistema será la suma de los momentos de todos los vectores. Si el punto respecto al cual calculamos momentos es el origen O, y los vectores están aplicados en los puntos P_A, P_B y P_C, tendremos:

Jose Javier Sandonís Ruiz 5/10/04 17:24
Con formato: Numeración y viñetas

$$\boxed{\vec{M}_O = \overrightarrow{OP_A} \times \vec{A} + \overrightarrow{OP_B} \times \vec{B} + \overrightarrow{OP_C} \times \vec{C} = (-10, 6, 7)}$$

c) Si el punto respecto al cual calculamos momentos es Q, cuyas coordenadas nos dan, tendremos:

Jose Javier Sandonís Ruiz 5/10/04 17:24
Con formato: Numeración y viñetas

$$\boxed{\vec{M}_Q = \overrightarrow{QP_A} \times \vec{A} + \overrightarrow{QP_B} \times \vec{B} + \overrightarrow{QP_C} \times \vec{C} = (-10, 6, 7)}$$

Otra forma de calcular este resultado sería relacionándolo con el resultado anterior, $\overrightarrow{QP_A} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP_A}$, y lo mismo para los otros vectores con lo cual:

$$\vec{M}_Q = \overrightarrow{QP_A} \times \vec{A} + \overrightarrow{QP_B} \times \vec{B} + \overrightarrow{QP_C} \times \vec{C} =$$

$$= \left(\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP_A}\right) \times \vec{A} + \left(\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP_B}\right) \times \vec{B} + \left(\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP_C}\right) \times \vec{C} =$$

$$= \underbrace{\overrightarrow{QO} \times \left(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\right)}_{\overrightarrow{QO} \times \vec{R}} + \underbrace{\overrightarrow{OP_A} \times \vec{A} + \overrightarrow{OP_B} \times \vec{B} + \overrightarrow{OP_C} \times \vec{C}}_{\vec{M}_O}$$

En el caso en que la resultante $\vec{R}$ del sistema sea nula, como sucede en este problema, el momento resultante de todo el sistema de vectores no depende del punto respecto al cual se calcule.

Los vectores $\vec{A} = (-3, 2, -1)$, $\vec{B} = (1, -3, 5)$ y $\vec{C} = (2, 1, -4)$ están aplicados en los puntos a (2, 1, 2), b (–1, 0, 1) y c (1, 2, 0) respectivamente. a) ¿Cuál es la resultante del conjunto de vectores? b) ¿Cuál es el momento resultante de todo el sistema calculado respecto del origen de coordenadas? c) ¿Y si lo calculamos respecto al punto P (5, 8, –3)?

Solución: I.T.I. 01, 02, 04, I.T.T. 01

Jose Javier Sandonís Ruiz 6/10/04 09:21
Eliminado: .

a) La resultante del sistema será la suma de todos los vectores: $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$

b) El momento resultante de todo el sistema será la suma de los momentos de todos los vectores. Si el punto respecto al cual calculamos momentos es el origen O, tendremos:

$$\boxed{\vec{M}_O = \overrightarrow{Oa} \times \vec{A} + \overrightarrow{Ob} \times \vec{B} + \overrightarrow{Oc} \times \vec{C} = (-10, 6, 7)}$$

c) Si el punto respecto al cual calculamos momentos es P, cuyas coordenadas nos dan, tendremos:

$$\boxed{\vec{M}_P = \overrightarrow{Pa} \times \vec{A} + \overrightarrow{Pb} \times \vec{B} + \overrightarrow{Pc} \times \vec{C} = (-10, 6, 7)}$$

Otra forma de calcular este resultado sería relacionándolo con el resultado anterior, $\overrightarrow{Pa} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{Oa}$, y lo mismo para los otros vectores con lo cual:

$$\vec{M}_P = \overrightarrow{Pa} \times \vec{A} + \overrightarrow{Pb} \times \vec{B} + \overrightarrow{Pc} \times \vec{C} =$$

$$= \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{Oa}\right) \times \vec{A} + \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{Ob}\right) \times \vec{B} + \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{Oc}\right) \times \vec{C} =$$

$$= \underbrace{\overrightarrow{PO} \times \left(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\right)}_{\overrightarrow{PO} \times \vec{R}} + \underbrace{\overrightarrow{Oa} \times \vec{A} + \overrightarrow{Ob} \times \vec{B} + \overrightarrow{Oc} \times \vec{C}}_{\vec{M}_O}$$

En el caso en que la resultante $\vec{R}$ del sistema sea nula, como sucede en este problema, el momento resultante de todo el sistema de vectores no depende del punto respecto al cual se calcule.

Los vectores $\vec{A} = (-1, 2, 2)$, $\vec{B} = (0, -3, 1)$ y $\vec{C} = (-2, 1, -2)$ están aplicados en los puntos (1, 1, 2), (1, 2, 1) y (1, 0, 3) respectivamente. Calcular el momento resultante de todo el sistema respecto del origen de coordenadas y respecto al punto (3, –2, –1). ¿Cómo cambiarías el valor del vector $\vec{A}$ para que los dos resultados anteriores coincidiesen?

Solución: I.T.I. 97, I.T.T. 97, 02

El momento resultante de todo el sistema será la suma de los momentos de todos los vectores. Si el punto respecto al cual calculamos momentos es el origen O, y los vectores están aplicados en los puntos P_A, P_B y P_C, tendremos:

$$\boxed{\vec{M}_O = \overrightarrow{OP_A} \times \vec{A} + \overrightarrow{OP_B} \times \vec{B} + \overrightarrow{OP_C} \times \vec{C} = (0, -9, 1)}$$

Si el punto respecto al cual calculamos momentos es Q, cuyas coordenadas nos dan, tendremos:

$$\boxed{\vec{M}_Q = \overrightarrow{QP_A} \times \vec{A} + \overrightarrow{QP_B} \times \vec{B} + \overrightarrow{QP_C} \times \vec{C} = (2, -9, 7)}$$

Otra forma de calcular este resultado sería relacionándolo con el resultado anterior, $\overrightarrow{QP_A} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP_A}$, y lo mismo para los otros vectores con lo cual:

$$\begin{aligned}
\vec{M}_Q &= \overrightarrow{QP_A} \times \vec{A} + \overrightarrow{QP_B} \times \vec{B} + \overrightarrow{QP_C} \times \vec{C} = \\
&= \left(\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP_A}\right) \times \vec{A} + \left(\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP_B}\right) \times \vec{B} + \left(\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP_C}\right) \times \vec{C} = \\
&= \underbrace{\overrightarrow{QO} \times \left(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\right)}_{\overrightarrow{QO} \times \vec{R}} + \underbrace{\overrightarrow{OP_A} \times \vec{A} + \overrightarrow{OP_B} \times \vec{B} + \overrightarrow{OP_C} \times \vec{C}}_{\vec{M}_O}
\end{aligned}$$

En el caso en que la resultante $\vec{R}$ del sistema sea nula el momento resultante de todo el sistema de vectores no depende del punto respecto al cual se calcule. Bastaría haber cogido:

$$\vec{A} = -\left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \boxed{(2, 2, 1)}$$

Dado el sistema de vectores $\vec{A}$ = (3, 3, 1), $\vec{B}$ = (3, 3, 1), $\vec{C}$ = (3, 3, 1), y sabiendo que P_A (0, 1, 3), P_B (1, 0, 1) y P_C (2, 0, –1) son puntos de sus líneas de acción respectivamente, calcular: a) la resultante, b) el momento resultante respecto del origen de coordenadas, c) el momento resultante respecto del punto Q (1, 0 , 1)

Solución: I.T.I. 98, I.T.T. 99

a) La resultante del sistema será la suma de todos los vectores:

$$\boxed{\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (4,8,6)}$$

b) El momento resultante de todo el sistema será la suma de los momentos de todos los vectores. Si deslizamos los vectores a lo largo de sus líneas de acción hasta aplicarlos en los puntos P_A , P_B y P_C , no cambia el resultado del cálculo de momentos.

Si el punto respecto al cual calculamos momentos es el origen O tendremos:

$$\boxed{\vec{M}_O = \overrightarrow{OP_A} \times \vec{A} + \overrightarrow{OP_B} \times \vec{B} + \overrightarrow{OP_C} \times \vec{C} = (-8,-7,7)}$$

c) Si el punto respecto al cual calculamos momentos es Q, cuyas coordenadas nos dan, tendremos:

$$\boxed{\vec{M}_Q = \overrightarrow{QP_A} \times \vec{A} + \overrightarrow{QP_B} \times \vec{B} + \overrightarrow{QP_C} \times \vec{C} = (0,-5,-1)}$$

Otra forma de calcular este resultado sería relacionándolo con el resultado anterior, $\overrightarrow{QP_A} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP_A}$, y lo mismo para los otros vectores con lo cual:

$$\begin{aligned}
\vec{M}_Q &= \overrightarrow{QP_A} \times \vec{A} + \overrightarrow{QP_B} \times \vec{B} + \overrightarrow{QP_C} \times \vec{C} = \\
&= \left(\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP_A}\right) \times \vec{A} + \left(\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP_B}\right) \times \vec{B} + \left(\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP_C}\right) \times \vec{C} = \\
&= \underbrace{\overrightarrow{QO} \times \left(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\right)}_{\overrightarrow{QO} \times \vec{R}} + \underbrace{\overrightarrow{OP_A} \times \vec{A} + \overrightarrow{OP_B} \times \vec{B} + \overrightarrow{OP_C} \times \vec{C}}_{\vec{M}_O}
\end{aligned}$$

En el caso en que la resultante del sistema hubiese sido nula el momento resultante de todo el sistema de vectores no habría dependido del punto respecto al cual se hubiese calculado.

Calcular el momento respecto del eje X del vector de componentes $(2, 1, 0)$, que se encuentra localizado en el punto $(1, 1, 1)$.

Solución: I.T.I. 92, I.T.T. 95, I.I. 94

Texto solución