

Ondas no lineales en fluidos incompresibles

por

Rafael Granero-Belinchón

RESUMEN. En este artículo vamos a presentar el problema del movimiento de las olas en el agua junto con algunos de los modelos asintóticos que se han obtenido como aproximaciones al problema completo. Además, damos una breve reseña de la larga historia del problema, así como una sucinta introducción a algunas preguntas más actuales.

INTRODUCCIÓN

En nuestro día a día convivimos con fluidos y con los fenómenos que se les asocian. Es un hecho normal ver flujos turbulentos al lavarnos los dientes, o inestabilidades y mezclas al prepararnos un café con leche. Al mismo tiempo, parece claro que el conocimiento de los fluidos y su dinámica tiene una gran importancia práctica, por ejemplo, en el diseño de coches que consuman menos combustible, así como en otros muchos procesos industriales y hasta en estudios asociados al SARS-COV-2 [60]. Quizá por eso el estudio de los fluidos ha tenido un papel clave en el desarrollo tanto de la Física como de las Matemáticas.

Aunque hay multitud de problemas interesantes en el estudio matemático de los fluidos [20, 34, 61, 75], en este artículo nos vamos a centrar en el movimiento de las olas en el agua. Este problema es un área de investigación clásica que cuenta con más de 200 años de historia y que, a la vez, está muy activa, con cientos de publicaciones anuales dedicadas al tema y varias revistas científicas especializadas. En este artículo pretendemos introducir el problema de las olas en el agua obviando gran parte de los tecnicismos necesarios para un estudio pormenorizado, y mencionar algunos detalles de su larga historia. Vamos también a presentar unas pocas de las numerosas maneras de describir aproximadamente algunas de las características más importantes del comportamiento de las olas. Es decir, introduciremos algunos modelos simplificados del movimiento de las olas en el agua, o, como lo expresó el pintor M. C. Escher en una carta a su hijo,

Those waves! Very soon I will try once more to draw something similar to the waves. But how can one suggest motion on a static plane? **And how can you simplify something as complicated as a wave in the open sea, making it understandable?**¹

¹¡Esas olas! Muy pronto intentaré dibujar una vez más algo similar a las olas. Pero ¿cómo se puede sugerir movimiento en un plano estático? **¿Y cómo puedes simplificar algo tan complicado como una ola en mar abierto, haciéndolo comprensible?** (Todas las traducciones son del autor.)

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Figura 1: La condición de incompresibilidad tal cual la escribió Euler en 1752 y que fue publicada en [36].

1. LAS ECUACIONES DE EULER

Si bien existe una *prehistoria* del estudio de los fluidos ya con Arquímedes y más tarde con Newton o los Bernoulli, puede decirse que su tratamiento moderno empezó con Euler y D'Alembert [30] hacia la mitad del siglo XVIII.

Para poder abordar matemáticamente la dinámica de los fluidos debemos comenzar haciendo una hipótesis: *suponemos que el fluido rellena continuamente el espacio que ocupa*. En esta idealización, las partículas del fluido no ocupan volumen alguno sino que son objetos infinitesimales.

Las incógnitas, entonces, serán el campo de velocidades que, anticipando la notación de Euler, escribiremos

$$\vec{U} = (u, v, w) : \mathbb{R}^3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

la densidad $q : \mathbb{R}^3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, y la presión $p : \mathbb{R}^3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$.

Además nos vamos a restringir a los fluidos incompresibles, esto es, aquellos que, aunque se muevan, preservan su volumen. La ecuación diferencial satisfecha por estos fluidos ya fue descubierta por D'Alembert con algunas hipótesis adicionales, pero se la debemos a Euler en toda su generalidad [36].

Obviando la notación de Euler $\frac{d}{dx}$ en vez de $\frac{\partial}{\partial x}$, nos damos cuenta (ver figura 1) de que la incompresibilidad del fluido se reduce a que la divergencia del campo de velocidades se anule.

Igualmente vamos a suponer que las partículas del fluido no sufren rozamiento entre ellas, es decir, consideramos que se trata de un fluido no viscoso (o invíscido). De esta manera la única fuerza interna que actúa sobre el fluido es la presión.

Con estas hipótesis, *a priori* razonables para describir fluidos como el agua, el siguiente objetivo es encontrar las ecuaciones diferenciales que describan dos principios físicos: la conservación de la masa y la conservación del momento.

La ecuación de transporte que describe la conservación de la masa recibe el nombre de *ecuación de la continuidad* [27]. Esta ecuación, al igual que pasaba con la condición de incompresibilidad, ya aparece en los trabajos de D'Alembert pero, de nuevo, es Euler el que le da su forma definitiva (ver figura 2). Como en este artículo nos vamos a centrar en tratar de describir el movimiento de masas de agua, vamos a considerar que la densidad q es constante tanto en tiempo como en espacio. De esta manera, la ecuación de conservación de la masa se reduce a la anterior condición de incompresibilidad.

Finalmente, Euler derivó las ecuaciones que describen la conservación del momento en un fluido no viscoso (ver figura 3).

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.gw}{dz}\right) = 0,$$

Figura 2: La ecuación de la continuidad tal cual la escribió Euler en 1755 y que fue publicada en [35].

$$\begin{aligned} \text{P} \quad & \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dx}\right) = \left(\frac{du}{dt}\right) + u \left(\frac{du}{dx}\right) + v \left(\frac{du}{dy}\right) + w \left(\frac{du}{dz}\right) \\ \text{Q} \quad & \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dt}\right) + u \left(\frac{dv}{dx}\right) + v \left(\frac{dv}{dy}\right) + w \left(\frac{dv}{dz}\right) \\ \text{R} \quad & \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dt}\right) + u \left(\frac{dw}{dx}\right) + v \left(\frac{dw}{dy}\right) + w \left(\frac{dw}{dz}\right) \end{aligned}$$

Figura 3: Las ecuaciones de conservación del momento tal cual las escribió Euler en 1755 y que fueron publicadas en [35].

En notación vectorial, las ecuaciones de Euler son

$$q \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} \right) = -\nabla p, \tag{1a}$$

$$\text{div } \vec{U} = 0, \tag{1b}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} q + \nabla \cdot (q\vec{U}) = 0, \tag{1c}$$

donde

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Si ahora introducimos la hipótesis mencionada anteriormente de que el fluido es homogéneo (con densidad constante $q = 1$), las ecuaciones (1) se reducen a

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\nabla p, \tag{2a}$$

$$\text{div } \vec{U} = 0. \tag{2b}$$

La derivación que hace el propio Euler es bastante fácil de leer pese a la distancia en el tiempo, por lo que animamos al lector interesado a hacerlo, y es que, tal cual dijo Laplace,

*Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous.*²

²Leed a Euler, leed a Euler, es el maestro de todos nosotros.

Nosotros sin embargo vamos a motivar las ecuaciones usando principios variacionales tal cual lo hizo Lagrange [51, página 522] (ver también [74]). Para ello hemos de introducir unas nuevas coordenadas $\vec{\eta}$ llamadas *lagrangianas* (aunque probablemente se deban también a Euler). Estas coordenadas lagrangianas satisfacen la ecuación

$$\frac{\partial \vec{\eta}}{\partial t} = \vec{U}(\vec{\eta}(a, t), t), \quad \vec{\eta}(a, 0) = a.$$

Esta función $\vec{\eta}$ sigue la trayectoria de la partícula del fluido que a tiempo $t = 0$ estaba en la posición $a \in \mathbb{R}^3$.

Es un cálculo convencerse de que, entonces, la condición de incompresibilidad se traduce en

$$\det \nabla_a \vec{\eta}(a) = 1,$$

donde $\nabla_a \vec{\eta}$ es la matriz jacobiana de la función $\vec{\eta}(a)$ y el subíndice a solo enfatiza las variables en las que se deriva.

De la misma manera, las ecuaciones de Euler (2) se reducen a

$$\frac{\partial^2 \vec{\eta}(a, t)}{\partial t^2} = -\nabla p(\vec{\eta}(a, t), t) = -A^T \nabla_a \pi(a, t),$$

donde

$$\pi = p \circ \vec{\eta} \quad \text{y} \quad A = (\nabla_a \vec{\eta})^{-1}.$$

Se define entonces el funcional de *acción*

$$\mathcal{A}(\vec{\eta}) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{\eta}}{\partial s}(a, s) \right)^2 da ds,$$

donde el lagrangiano en este caso se reduce a la energía cinética total del sistema. Así, por el *Principio de Mínima Acción*, las soluciones de las ecuaciones de Euler se pueden hallar como mínimos del funcional de acción siempre que dichos mínimos estén sujetos a la restricción de que el fluido sea incompresible. Para encontrar el mínimo en este problema de optimización condicionado debemos usar el método de los multiplicadores de Lagrange. Es decir, tenemos que encontrar el mínimo del funcional de acción modificado

$$\tilde{\mathcal{A}}(\vec{\eta}, \pi) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{\eta}}{\partial s}(a, s) \right)^2 + \pi(\det \nabla_a \vec{\eta} - 1) \right) da ds,$$

donde la presión en coordenadas lagrangianas π aparece claramente como un multiplicador de Lagrange. Ahora basta con calcular (si bien es un cálculo bastante pesado) las derivadas de este funcional $\tilde{\mathcal{A}}$ e igualarlas a 0 para hallar que los mínimos del funcional satisfacen las ecuaciones de Euler en su formulación lagrangiana.

2. EL PROBLEMA DE LAS OLAS EN EL AGUA

FORMULACIÓN

Queremos ahora describir el problema de las olas en la superficie del mar. Para ello suponemos que el agua del mar es no viscosa, incompresible y homogénea (para

una discusión sobre los límites de validez de estas hipótesis recomendamos la lectura de [54]). Además nos restringimos al caso de flujos dosdimensionales donde solo nos interesa la variable que mide la *altura de la ola*, y , y la variable que mide la *lejanía a la playa*, x (ver figura 4). Concretamente, consideramos que la superficie del mar puede describirse como

$$\Gamma(t) = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, y = h(x, t)\},$$

y que el agua ocupa la región

$$\Omega(t) = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, -D < y < h(x, t)\},$$

donde $D > 0$ es un parámetro positivo fijo (quizá infinito).

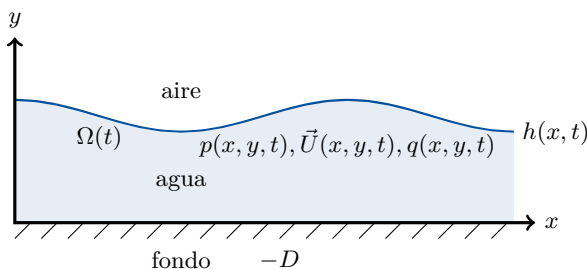


Figura 4: Esquema de cómo se propaga la ola dada por el grafo de la función h .

En la sección anterior hemos supuesto que el fluido que queríamos describir era no viscoso, incompresible, homogéneo y además llenaba todo el espacio \mathbb{R}^3 . La restricción al caso de un flujo dosdimensional donde el fluido llena el plano \mathbb{R}^2 es sencilla. Obtener las ecuaciones para el caso de las olas del mar no lo es tanto. La principal dificultad es que el dominio que ocupa el fluido también es parte de las incógnitas del problema y debe ser hallado al mismo tiempo que el flujo de velocidades y el campo de presión. Se trata de lo que se llama un *problema de frontera libre* (terminología, por cierto, que ya se intuye en los trabajos de Euler [36], donde usa *extremam superficiem liberam*).

Volvamos al caso de las olas de la superficie del mar. Consideramos ahora el caso de una masa de agua donde se propaga una ola. No vamos a considerar el caso de fuertes vientos que puedan introducir energía en el sistema, sino que nos centramos en el caso de agua que se encuentra esencialmente en reposo hasta que llega la ola, momento en el que se agita para acabar de nuevo casi en reposo cuando la ola se marcha. Al haber supuesto que la ola se propaga de manera dosdimensional, podemos identificar el rotacional del campo de velocidades (bidimensional) con un escalar:

$$\text{rot } \vec{U} = \omega.$$

Además, es un ejercicio de cálculo observar que, para flujos dosdimensionales, dicha cantidad, llamada *vorticidad*, se transporta. Concretamente, la vorticidad en dos dimensiones verifica

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega + \vec{U} \cdot \nabla\omega = 0,$$

por lo que, si es inicialmente cero, será idénticamente cero para todo tiempo posterior. Como nosotros estamos estudiando el caso anteriormente descrito de masas de agua en reposo hasta que llega la ola y que vuelven al equilibrio cuando la ola la abandona, podemos considerar que la vorticidad satisface

$$\omega(x, y, t) \equiv 0.$$

Esto que acabamos de argumentar de manera moderna es un teorema que debemos a Lagrange [29].

Como ahora el dominio ocupado por el agua tiene fronteras (la ola $\Gamma(t)$ y el fondo), debemos aportar condiciones de borde en ellas. La primera condición de borde en la superficie del mar (la frontera libre) viene dada por la continuidad de la presión y, suponiendo que el aire es tan poco denso que la presión que ejerce es cero (o lo que es lo mismo, que reemplazamos el aire por el vacío), se tiene que

$$p(x, h(x, t), t) = 0.$$

Si consideramos que el fondo es impermeable obtenemos fácilmente que

$$\vec{U} \cdot (0, -1) = 0 \quad \text{en } \{(x, y), y = -D\}.$$

El hecho de que tenemos una frontera libre hace que necesitemos una condición de borde adicional en $\Gamma(t)$. Dicha condición de borde debe decirnos algo de cómo se mueve la frontera libre. Para encontrar esta nueva condición de borde observamos que podemos describir la frontera libre $\Gamma(t)$ como el conjunto de nivel 0 de la función

$$C(x, y, t) = h(x, t) - y.$$

Como la ola se transporta por el fluido se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t}C + \vec{U} \cdot \nabla C = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}h + u \frac{\partial}{\partial x}h - v = 0.$$

Recapitulando, el problema de las olas en el agua en dos dimensiones cuando consideramos la gravedad se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U} = -\nabla p - G(0, 1) \quad \text{en } (x, y) \in \Omega(t), \quad (3a)$$

$$\operatorname{div} \vec{U} = \operatorname{rot} \vec{U} = 0 \quad \text{en } (x, y) \in \Omega(t), \quad (3b)$$

$$p = 0 \quad \text{en } (x, y) \in \Gamma(t), \quad (3c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}h - \vec{U} \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial x}h, 1 \right) = 0 \quad \text{en } (x, y) \in \Gamma(t), \quad (3d)$$

$$\vec{U} \cdot (0, -1) = 0 \quad \text{en } \{(x, y), y = -D\}, \quad (3e)$$

donde $G = 9.8 \text{ m/s}^2$ es la aceleración usual de la gravedad.

Pero, dado que el dominio $\Omega(t)$ es simplemente conexo, la condición de irrotacionalidad anterior nos permite asegurar que la velocidad es el gradiente de un potencial de velocidades

$$\vec{U} = \nabla\phi.$$

Esta simplificación hace que podamos integrar las ecuaciones de Euler para descubrir la Ley de Bernoulli

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 = -p - Gy \quad \text{en } (x, y) \in \Omega(t),$$

y, si evaluamos la ecuación anterior en $\Gamma(t)$, llegamos a la siguiente formulación del sistema de las olas en el agua como

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{en } (x, y) \in \Omega(t), \tag{4a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + Gh = 0 \quad \text{en } (x, y) \in \Gamma(t), \tag{4b}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}h - \nabla\phi \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial x}h, 1\right) = 0 \quad \text{en } (x, y) \in \Gamma(t), \tag{4c}$$

$$\nabla\phi \cdot (0, -1) = 0 \quad \text{en } \{(x, y), y = -D\}. \tag{4d}$$

Aunque la formulación usando métodos variacionales, es decir, donde las soluciones se hallan como mínimos de determinado funcional, de las ecuaciones de Euler se conoce desde Lagrange, para enunciar el problema de las olas en el agua con métodos variacionales (es decir, con soluciones dadas como el mínimo de un funcional de acción) hubo que esperar hasta que Luke encontrase, en la década de los 60 del siglo XX [59], el siguiente funcional de acción

$$\mathcal{A} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{-D}^{h(x,s)} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x}\phi \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y}\phi \right)^2 + \frac{\partial}{\partial t}\phi + Gy \right) dy dx ds$$

cuya derivada da las ecuaciones (4).

De hecho, es en esta época cuando Zakharov [84] (ver también Craig y Sulem [24]), definiendo la traza del potencial del velocidades $\psi(x, t) = \phi(x, h(x, t), t)$, observa que el problema de las olas en el agua admite una formulación hamiltoniana

$$\frac{\partial}{\partial t}h = \delta_\psi \mathcal{E}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\psi = -\delta_h \mathcal{E},$$

donde \mathcal{E} es la energía total del sistema. Las fórmulas anteriores también indican que el problema de las olas en el agua se puede formular en términos de dos ecuaciones hiperbólicas no lineales y no locales donde la no localidad aparece al tener que resolver un problema elíptico bidimensional para hallar ϕ .

$$g \frac{d\varphi}{dz} - \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0,$$

Figura 5: Ecuación lineal de las olas en el agua tal cual la escribió Poisson en [65].

EL PROBLEMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

En 1813, la Academia de Ciencias francesa propuso una competición matemática sobre la evolución de las olas en el agua. La importancia de dicho premio se puede intuir del hecho de que el comité que decidiría el ganador estaba formado por Legendre, Poinsot, Laplace, Biot y Poisson, que se contaban entre los más reputados matemáticos franceses de la época. Más concretamente, la competición proponía el problema de existencia y unicidad de las olas en el agua. Este problema, tal cual se cree que fue formulado por Laplace en 1776 y el comité de la Academia de Ciencias francesa en 1813 [25, 37, 29], es, entonces,

Une masse fluide pesante, primitivement en repos, et d'une profondeur indéfinie, a été mise en mouvement par le fait d'une cause donnée. On demande, au bout d'un temps déterminé, la forme de la surface extérieure du fluide, et la vitesse de chacune des molécules situées à cette même surface.³

En términos modernos el problema es, dados datos iniciales para la ola y la velocidad del volumen de fluido, encontrar la posición de la ola y la velocidad en todos los puntos ocupados por el fluido en un cierto tiempo T posterior.

Si bien no se menciona explícitamente, las olas se suponían *muy pequeñas* y el problema se trataba en el régimen lineal. Con esta hipótesis adicional, tanto Cauchy [15] como Poisson [65] hicieron grandes avances en el problema del movimiento de las olas en aguas con profundidad indefinida. En ambas memorias encontramos el problema lineal de las olas en agua (ver figura 5) formulado como una única ecuación de evolución para el potencial. Esta ecuación la resuelven usando transformadas de Fourier (con las que Poisson ya estaba familiarizado pero que Cauchy tuvo que redescubrir). El lector interesado en más detalles de ambos trabajos puede leer el artículo [29].

Durante gran parte del siglo XIX los trabajos de Poisson y Cauchy no fueron todo lo populares que uno esperaría. De hecho, Stokes llegó a afirmar que

The mathematical treatment of such cases is extremely difficult; and, after all, motions of this kind are not those which it is most interesting to investigate.⁴

³Una pesada masa de fluido, inicialmente en reposo, y de una profundidad indefinida, ha sido puesta en movimiento por una causa dada. Preguntamos, después de un tiempo fijo, la forma de la superficie externa del fluido y la velocidad de cada una de las moléculas ubicadas en esa superficie.

⁴El tratamiento matemático de tales casos es extremadamente difícil; y, después de todo, los movimientos de este tipo no son los más interesantes de investigar.

Hubo que esperar hasta la década de los 70 del siglo pasado para tener una teoría no lineal de existencia y unicidad incluso para intervalos cortos de tiempo. De hecho, Shinbrot [70] (ver también [50]) estudia el caso de datos iniciales analíticos, mientras que Nalimov [62] es capaz de considerar el caso más general de olas con un número finito de derivadas débiles imponiendo una restricción en el tamaño de las mismas (ver también [80] y [23]). El problema de existencia y unicidad sin restricciones en el tamaño y para olas con un número finito de derivadas fue resuelto por Wu en 1997 ¡casi entrando en este siglo! [76, 77]. Ya en los 2000 se encuentran diferentes pruebas del mismo resultado con múltiples nuevos métodos (ver, por ejemplo, [2, 1, 18, 46, 53]), lo que abre la puerta a estudiar el problema de la formación de singularidades o la existencia global de soluciones ([14, 13, 22, 38, 48, 78, 47]).

En el caso de olas en el agua donde no se supone la irrotacionalidad del fluido, la teoría de existencia y unicidad de soluciones es aun más reciente. Primero Christodoulou y Lindblad [16] (ver también [69]), *considerando la existencia de soluciones para el problema de Euler tridimensional con frontera libre sin la hipótesis de irrotacionalidad*, encontraron estimaciones para dichas soluciones. Si bien para la mayoría de las ecuaciones en derivadas parciales el encontrar las estimaciones permite construir las soluciones, dando lugar a una teoría de existencia, para las ecuaciones de Euler no fue así. Este sistema tiene una estructura muy sutil que hay que explotar para conseguir las estimaciones. Sin embargo, la mayoría de los procesos de aproximación destruyen esta estructura e impiden dar el paso de las estimaciones sobre las soluciones a la propia existencia de solución. Unos pocos años después Lindblad consiguió cerrar la teoría de existencia en el caso rotacional [57] (ver también [21]).

3. EL CASO DE AGUAS SOMERAS

El hecho de que la teoría de existencia y unicidad sea tan reciente ya da una idea de la dificultad del problema que encaramos. Parece entonces razonable estudiar *modelos aproximados* del problema (3). Se espera así encontrar problemas más sencillos pero cuyas soluciones *estén cerca* de las soluciones del problema completo y describan, por lo tanto, algunas características de las olas en el agua. Motivados por las preguntas que aparecen sobre flujos cercanos a la costa, o en ríos y canales, nos preguntamos si el hecho de que la profundidad sea pequeña en comparación con otras cantidades en el sistema (como la longitud de onda de la ola) puede ayudarnos a simplificar el problema conservando al tiempo la parte principal de la dinámica.

Esta pregunta es también clásica. De hecho, ya se la hizo Laplace en 1776 para el caso de olas tan pequeñas que estuviesen en el régimen lineal. Más concretamente, el régimen *de aguas someras* ha sido central en la investigación del movimiento de las olas en el agua desde el siglo XIX. Esto es en parte debido a la observación de los llamados solitones u olas solitarias por Russell. Aunque la historia del descubrimiento y la posterior investigación de olas solitarias es apasionante, nosotros nos vamos a limitar a recomendar encarecidamente al lector interesado la consulta de [75, 25, 26] y a citar la fábula que se explica en [29]:

Érase una vez, un animoso caballo que tiraba de un bote a lo largo de un

tranquilo canal del norte de Escocia. De repente, un perro feroz saltó de los arbustos. El caballo se asustó y salió corriendo, arrastrando el bote tras él. Para sorpresa del caballo, el bote casi no ofrecía resistencia a tan alta velocidad. Un perspicaz ingeniero naval, que por casualidad presenció la escena, investigó el asunto realizando numerosos experimentos y confirmó el descubrimiento del caballo. Sin imponer barreras a su pensamiento, el ingeniero se aventuró a proponer una explicación mecánica de esta paradoja basada en la existencia de una maravillosa ola solitaria que llevaba el bote con ella. Un reconocido matemático, que destacaba en el docto cálculo del movimiento del agua, se burló de este intento de explicación del aficionado. No había nada en las ecuaciones del ingeniero que justificase tal razonamiento, y sí mucho para rechazarlo. Sin embargo, quienes viajaban por el canal escocés disfrutaron durante algunos años de la explotación comercial de la paradoja. Medio siglo después, el anciano matemático reanudó sus cálculos. Gracias a su larga experiencia, veía ahora nuevos significados en sus viejos símbolos. De este mejor análisis surgieron, como por arte de magia, la ola solitaria y la posibilidad de que la resistencia del barco desapareciese. En conclusión, se regocijó el sabio, las matemáticas podían ser tan eficaces como un caballo al galope.

Esta fábula es una simplificación imaginaria de una historia real en la que el ingeniero John Scott Russell y los matemáticos (en sentido amplio) George Biddell Airy, George Gabriel Stokes, Joseph Boussinesq y Lord Kelvin fueron los actores principales (además del animoso caballo). Su objetivo es señalar una transformación importante en la caja de herramientas del físico-matemático del siglo XIX, gracias a la cual las soluciones con interés práctico de ecuaciones conocidas desde hace mucho tiempo se hicieron mucho más fácilmente accesibles.

MODELOS ASINTÓTICOS PARA AGUAS SOMERAS

Una de las primeras cosas que debemos hacer de cara a estudiar los diferentes regímenes posibles en la dinámica de las olas en el mar es usar variables y parámetros adimensionales. Así, si definimos

$$\epsilon = \frac{H}{D} \quad \text{y} \quad \delta = \left(\frac{D}{L}\right)^2,$$

donde D es la profundidad de la masa de agua y H y L son la altura y la longitud de ondas característica de las olas que se propagan en la superficie, el problema (4) puede escribirse en variables adimensionales de la siguiente manera:

$$\delta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi = 0 \quad \text{en } \{(x, y), -1 < y < \epsilon h\}, \quad (5a)$$

$$\delta \frac{\partial}{\partial t} \phi + \frac{\epsilon \delta}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi\right)^2 + \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \phi\right)^2 + \delta h = 0 \quad \text{en } \{(x, y), y = \epsilon h\}, \quad (5b)$$

$$\delta \frac{\partial}{\partial t} h - \nabla \phi \cdot \left(-\epsilon \delta \frac{\partial}{\partial x} h, 1 \right) = 0 \quad \text{en } \{(x, y), y = \epsilon h\}, \tag{5c}$$

$$\nabla \phi \cdot (0, -1) = 0 \quad \text{en } \{(x, y), y = -1\}. \tag{5d}$$

Si ahora suponemos que el potencial tiene un desarrollo en forma de serie de potencias de la forma

$$\phi(x, y, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j \phi^{(j)}(x, y, t),$$

despreciando los términos de orden $O(\delta^2)$, de (5) llegamos al sistema de Saint Venant [6]

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \epsilon u \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial x} h = 0, \tag{6a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} h + \frac{\partial}{\partial x} ((\epsilon h + 1)u) = 0, \tag{6b}$$

donde $h(x, t)$ y $u(x, t)$ denotan la posición de la ola y la velocidad en la dirección horizontal. Estas ecuaciones son más sencillas en varios aspectos: tienen un número más reducido de ecuaciones, tienen menos variables independientes (la y no aparece) y además son locales (no hay que resolver una ecuación elíptica para hallar el potencial).

Las ecuaciones de Saint Venant son uno de los modelos asintóticos para el desplazamiento de olas en el agua que antes se descubrieron. Si bien es un modelo muy sencillo, muestra ya un hecho muy importante como es que las olas en el agua *no* se dispersan sensiblemente si la profundidad es pequeña.

Otros modelos más complejos que reflejan la dispersión aun en el caso de olas en medios poco profundos fueron hallados poco después por el que (junto con Stokes) quizá sea la mente más influyente en el estudio de las olas en el siglo XIX, el matemático francés Joseph Boussinesq [11]. Más concretamente, en 1872 Boussinesq escribe

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \epsilon u \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial x} h = \frac{1}{2} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} u, \tag{7a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} h + \frac{\partial}{\partial x} ((\epsilon h + 1)u) = \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u. \tag{7b}$$

Si bien (6) es un sistema de leyes de conservación, (7) ya es un sistema considerablemente más desafiante al incorporar efectos de dispersión gracias a los términos a la derecha. Utilizando ideas más o menos cercanas se han derivado una gran cantidad de modelos asintóticos para el caso de aguas someras. Algunos de estos modelos son muy aplicados en Ingeniería de Costas (ver [8, 9, 17, 45, 68]).

Un fenómeno muy llamativo es que, aunque sabemos que el problema completo tiene solución única (ver la sección anterior), para muchos de estos modelos asintóticos o bien no se sabe la respuesta a esta pregunta o bien se sabe que no tienen solución. Eso es porque, al *aproximar* (4), se desdibuja la estructura tan sutil de las ecuaciones de Euler y se trastoca la no linealidad.

SINGULARIDADES EN MODELOS DE AGUAS SOMERAS

Tratándose de modelos para el caso de aguas poco profundas, parece natural considerar el problema de la costa para modelos con dispersión no lineal como son las llamadas ecuaciones de Green-Naghdi [56]. En este problema, la ola alcanza la topografía del fondo en el punto $X(t)$ de manera tal que

$$\partial_x h(x, t) \Big|_{x=X(t)} > 0.$$

Este punto $X(t)$ es en principio desconocido, por lo que enfrentamos un problema de frontera libre dentro de un problema de frontera libre.

Por otro lado, en un problema relacionado también se ha considerado el efecto de fronteras rígidas en la dinámica de los fluidos [12]. Concretamente, estos autores se concentraron en el contacto de la ola con la pared impermeable llegando a mostrar que ciertas soluciones autosimilares de las ecuaciones de Saint-Venant pueden desarrollar singularidades en tiempo finito, es decir, las soluciones comienzan siendo n veces derivables y después de un tiempo finito las mismas soluciones solo tienen $m < n$ derivadas. Estas singularidades matemáticas son el reflejo del hecho físico de que el fluido tratará de llenar los huecos vacíos. De otra manera, la ola no puede separarse del fondo sin que haya una singularidad.

Recientemente se ha conseguido demostrar [5] la existencia de singularidades para un cierto caso del problema de la costa, con una prueba que se aplica de manera similar para datos iniciales (no necesariamente autosimilares) de las ecuaciones de Saint-Venant. De hecho, la demostración en este último caso es muy sencilla:

1. Se prueba la existencia de soluciones en el caso de olas que tocan el fondo. Debido a lo degenerado de esta situación, y a la consiguiente pérdida de derivadas, para hacerlo debemos considerar datos iniciales analíticos y tales que $h(0, 0) = -1$.
2. Se demuestra que si $h(x, 0) + 1$ es par y $u(x, 0)$ es impar, entonces esta simetría se preserva para la solución.
3. Finalmente se consideran las cantidades

$$\alpha_i(t) = \left(\partial_x^i h(x, t) + 1 \right) \Big|_{x=0}, \quad \beta_i(t) = \partial_x^i u(x, t) \Big|_{x=0}.$$

Por la simetría se tiene que

$$\beta_0(t) = \beta_2(t) = \alpha_1(t) = \alpha_3(t) = 0.$$

Calculando las ecuaciones para α_0 , α_2 , y β_1 llegamos a

$$\begin{aligned} \alpha_0'(t) &= -\alpha_0(t)\beta_1(t), \\ \alpha_2'(t) &= -3\beta_1(t)\alpha_2(t), \\ \beta_1'(t) &= -\beta_1^2(t) - \alpha_2(t). \end{aligned}$$

De estas ecuaciones se obtiene que $\alpha_0(t) = 0$ y $\alpha_2(t) \geq 0$, y por lo tanto

$$\beta_1'(t) \leq -\beta_1^2(t),$$

de donde se concluye la singularidad con un sencillo argumento de EDOs.

Para ver que la singularidad no es debida al término de Burgers $u \frac{\partial}{\partial x} u$ basta con considerar el sistema

$$\begin{aligned} \alpha_2'(t) &= -3\beta_1(t)\alpha_2(t), \\ \beta_1'(t) &= -\alpha_2(t), \end{aligned}$$

y repetir la idea anterior para encontrar que también presenta singularidades en tiempo finito.

Otra posible fuente de comportamientos singulares y no físicos viene del hecho de que, al menos, matemáticamente, la función h podría tener valores por debajo de $-D$. De esta manera se tendría que la ola cruza el fondo marino, lo que es imposible. En esta dirección, Bona y Chen [8] consiguieron evidencia numérica de que existían modelos de olas que se propagan en aguas someras tales que las soluciones caían por debajo del valor de la profundidad, perdían por lo tanto todo valor como aproximación de la ola real, y acababan teniendo singularidades en tiempo finito. Recientemente se ha podido probar rigurosamente la existencia de soluciones que efectivamente pierden su significado físico al caer por debajo del umbral dado por la profundidad [5].

4. EL CASO DE AGUAS PROFUNDAS

Si bien el caso de las aguas someras es posiblemente el más importante en Ingeniería de Costas, el problema en el caso de profundidad infinita ha recibido una enorme atención por parte de muchos matemáticos.

Suponiendo ahora que ponemos nuestra atención en el problema de olas que se propagan en medios tan profundos en comparación con el resto de dimensiones del problema que podemos tomar $D = \infty$, llegamos a

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{en } \{(x, y), y < \varepsilon h\} \times [0, T], \quad (8a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi + \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\phi|^2 + h = 0 \quad \text{en } \{(x, y), y = \varepsilon h\}, \quad (8b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}h - \nabla\phi \cdot \left(-\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}h, 1\right) = 0 \quad \text{en } \{(x, y), y = \varepsilon h\}, \quad (8c)$$

donde el número adimensional

$$\varepsilon = \frac{H}{L}$$

mide la *pendiente* de la ola. Las olas en este régimen se comportan de manera diferente a las olas en el caso de las aguas someras, y esto se refleja en las mismas ecuaciones y sus parámetros adimensionales.

MODELOS ASINTÓTICOS PARA AGUAS PROFUNDAS

La pregunta que afrontamos ahora es ¿cómo podemos encontrar modelos asintóticos para el caso de pequeña pendiente?

Para resolverla vamos a usar las llamadas *series de Stokes* (ver [26] para más detalles históricos sobre las razones de este nombre), es decir, la hipótesis de que podemos desarrollar las incógnitas del problema en forma de serie del parámetro ε :

$$\phi(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \phi^{(n)}(x, y, t), \quad \psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \psi^{(n)}(x, t), \quad h(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n h^{(n)}(x, t).$$

La ventaja de los desarrollos de Stokes es que descomponen un problema *no lineal* como es (8) en una cascada de infinitas ecuaciones *lineales* donde la ecuación para los términos k -ésimos depende de los términos anteriores $j = 0, 1, \dots, k-1$. De esta manera, cada elemento de la serie se puede resolver *explícitamente* [4].

Así se llega, entre otros, al modelo

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} h = -\Lambda h - \varepsilon \Lambda \left(\left| H \frac{\partial}{\partial t} h \right|^2 \right) + \varepsilon \left(\Lambda(h\Lambda h) + \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial}{\partial x} h \right) \right),$$

donde H es la transformada de Hilbert, que se define como valor principal de una integral

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} V.P. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy,$$

y $\Lambda = \sqrt{-\Delta}$ es el operador de Zygmund definido como

$$\Lambda f(x) = H \frac{\partial}{\partial x} f(x) = \frac{1}{\pi} V.P. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x) - f(y)}{(x-y)^2} dy.$$

Vamos a fijarnos por un momento en el régimen lineal. Entonces, el modelo asintótico anterior nos lleva a

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} h = -\Lambda h,$$

que es una ecuación de tipo ondas no local. Si miramos el problema lineal en las ecuaciones de Saint Venant que modelizan olas propagándose en medios poco profundos, obtenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} h,$$

que es la ecuación de ondas y, por lo tanto, local. Vemos entonces la gran diferencia que hay entre las ecuaciones que gobiernan la dinámica lineal en ambos regímenes. Este cambio local para casos de aguas someras y no local para aguas profundas es un fenómeno que también ocurre en el caso de olas que se propagan en medios porosos (ver [40]).

LAS SERIES DE STOKES Y SU CONVERGENCIA

Las series de Stokes fueron un avance en el estudio de las olas en el agua, pero no estuvieron exentas de polémica. De hecho, este desarrollo en serie fue objeto de gran controversia hasta bien entrado el siglo XX. Es más, en el libro clásico de Lamb [52] podemos leer (ver también [29])

La cuestión de la convergencia, tanto de la serie que forman los coeficientes de los sucesivos cosenos cuando se continua con la aproximación como de la serie de cosenos resultante, fue planteada por Burnside, quien incluso expresó dudas sobre la posibilidad de que existan olas de tipo rigurosamente permanente. Esto llevó a Rayleigh a emprender una investigación exhaustiva que mostró que la condición de uniformidad de la presión en la superficie podía ser satisfecha con mucha precisión para valores de a suficientemente pequeños. Dedujo que la existencia de tipos permanentes hasta la ola más alta de Mitchell era en la práctica, si no de manera demostrable, cierta. La existencia ha sido definitivamente establecida por una investigación del Prof. Levi Civita, lo que puso fin a una controversia histórica.

Vamos a ver cómo el problema de convergencia de la serie de Stokes es importante para tratar asuntos como la existencia de soluciones de un determinado problema no lineal. Y es que, si las series de Stokes son útiles para cuestiones aplicadas, como es hallar modelos asintóticos de olas en determinado régimen de parámetros, no lo son menos para cuestiones de índole más teórica. De nuevo la idea es explotar el hecho de que descomponen una ecuación no lineal en una cascada de problemas lineales que pueden ser resueltos explícitamente. Por lo tanto, el problema de existencia de soluciones se reduce al problema de sumabilidad de una determinada serie de funciones encontradas como solución de problemas lineales. Esta idea data al menos de Oseen [64], quien la usó para probar la existencia de solución global para las ecuaciones de Navier-Stokes con ciertos datos iniciales y ha sido usada por diversos autores en otros problemas parabólicos. En este tipo de problemas con decaimiento parabólico, la convergencia de la serie de Stokes se consigue usando las propiedades de difusión del operador lineal asociado. Sin embargo, para problemas hiperbólicos donde puede haber incluso pérdida de derivadas, como es el caso del modelo asintótico anterior, la convergencia de la expansión de Stokes hay que conseguirla con métodos nuevos [4]. En esta situación la idea principal es definir unos espacios de funciones tales que se pueda probar que las normas crecen de manera proporcional a los *números de Catalan* $\{\mathcal{C}_k\}_{k=0}^{\infty}$ definidos como

$$\mathcal{C}_k = \sum_{j=0}^{k-1} \mathcal{C}_j \mathcal{C}_{k-1-j}, \quad \mathcal{C}_0 = 1.$$

De esta manera, en una combinación de análisis y combinatoria, las cotas para los números de Catalan sirven para sumar la serie en el espacio de funciones que habíamos elegido, al menos para tiempos suficientemente pequeños.

5. EL CASO DE OLAS CON VISCOSIDAD

Aunque en la mayoría de las aplicaciones en Ingeniería de Costas la hipótesis de que el agua no es viscosa, es decir, que sus partículas no sufren rozamiento, lleva a resultados muy precisos, hay otros escenarios físicos donde la viscosidad necesita ser

tenida en cuenta. No sorprende entonces que el estudio de olas con viscosidad date, al menos, del siglo XIX con los trabajos de Lamb [52], Boussinesq [10], Basset [7] o Tait [72]. Es más, en la literatura se encuentran experimentos donde la viscosidad necesita ser considerada pero el fluido es *casi* irrotacional, por ejemplo [79],

A partir de esta comparación, la teoría parece bastante satisfactoria al predecir las fases de onda durante el enfoque hacia dentro y la posterior reflexión dentro de una distancia radial de hasta $r = 20$, mientras que las amplitudes máximas observadas en los experimentos son ligeramente más pequeñas que las predichas por la teoría. Esta discrepancia puede atribuirse al haber despreciado los efectos viscosos en la teoría y a la aproximación de que la onda inicial generada en el tanque no tenía forma cilíndrica y se alejaba ligeramente en el experimento de un perfil perfecto de onda solitaria.

o también [83],

Una comparación de datos de laboratorio/solución numérica del número de crestas y canales y de sus fases (o ubicaciones relativas dentro de un período) muestra solo una diferencia insignificante. Como es de esperar, las amplitudes de cresta a valle difieren un poco más porque son más sensibles a las fuerzas disipativas. Para cuantificar algunos de los detalles, recomendamos un estudio que incluya la disipación.

Este hecho resulta llamativo a primera vista porque el hecho de que haya viscosidad en el fluido hace que aparezcan fuerzas de rozamiento que crean vorticidad, es decir, que impiden que el fluido sea irrotacional. De hecho, además del rozamiento entre partículas en el volumen de agua considerado, la viscosidad crea capas límite de alta vorticidad tanto cerca del fondo como cerca de la superficie de la masa de agua. Sin embargo, es un resultado clásico que, bajo ciertas hipótesis, la anchura de estas capas límite es muy pequeña, tanto que en una cierta aproximación puede considerarse despreciable. De hecho, en [52] podemos leer

Debido al carácter oscilatorio del movimiento, el signo de la vorticidad que se difunde hacia adentro desde la superficie se invierte continuamente, de modo que más allá de un estrato de grosor comparable a $2\pi/\beta$ no se nota su efecto, al igual que las fluctuaciones de temperatura en la superficie terrestre dejan de tener influencia a una profundidad de unos pocos metros.

Esto ha llevado a multitud de investigadores a intentar capturar efectos viscosos en el fluido mientras mantienen de alguna manera la hipótesis de irrotacionalidad en el interior de la masa de agua que, para simplificar el problema, supondremos que tiene profundidad infinita ($D = \infty$). Para tratar con este problema, Dias, Dyachenko y Zakharov [31] propusieron como un modelo de olas con viscosidad el siguiente

sistema:

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{en } \{(x, y), y < \varepsilon h\} \times [0, T], \quad (9a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi + \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\phi|^2 + h = -\alpha\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi \quad \text{en } \{(x, y), y = \varepsilon h\}, \quad (9b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}h - \nabla\phi \cdot \left(-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}h, 1\right) = \alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}h \quad \text{en } \{(x, y), y = \varepsilon h\}, \quad (9c)$$

donde α es un número adimensional relacionado con las fuerzas disipativas. Este modelo tiene diversas hipótesis pero, como hemos señalado, su idea principal es mantener la condición de irrotacionalidad al mismo tiempo que se introducen efectos viscosos. Además, aunque (9) parece una regularización parabólica del sistema hiperbólico (8), lo cierto es que el hecho de que la frontera esté libre hace que realmente sea un problema de difusión cruzada. De hecho, el *problema reducido*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\xi &= \alpha\Lambda\xi\frac{\partial^2}{\partial x^2}h - h + \alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi, \\ \frac{\partial}{\partial t}h &= -\frac{\partial}{\partial x}h\frac{\partial}{\partial x}\xi + \Lambda\xi + \alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}h, \end{aligned}$$

es una simplificación que conserva algunas características similares a (9) y que por lo tanto nos puede servir para ganar intuición.

Si bien el problema (9) tiene ya algo más de una década, el único resultado matemático sobre la existencia de soluciones es [63]. En ese trabajo los autores consideran el caso donde hay tensión superficial y prueban la existencia global de solución para datos iniciales suficientemente pequeños y la convergencia de la serie de Stokes

$$(h, \xi) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \left(h^{(n)}, \xi^{(n)}\right).$$

Recientemente, usando nuevas técnicas, se ha obtenido la existencia tanto local como global de soluciones clásicas para (9) también en el caso más singular donde no hay efectos de tensión superficial [42].

MODELOS ASINTÓTICOS PARA OLAS CON VISCOSIDAD

Además del estudio del problema de las olas con viscosidad, Longuet-Higgins [58] propuso un programa para derivar modelos asintóticos:

Sin embargo, para ciertas aplicaciones, la amortiguación viscosa de las olas es importante, y sería muy conveniente tener ecuaciones y condiciones en la frontera de simplicidad comparable a la de las olas no amortiguadas.

Así, la pregunta es ¿podemos encontrar modelos asintóticos que describan adecuadamente el movimiento de olas con viscosidad?

Ha habido varios grupos de investigadores que han encarado esta pregunta con anterioridad. Por ejemplo, Kakleas y Nicholls [49] derivaron un sistema de dos ecuaciones como modelo de las olas en el agua (ver también [3]). Otros trabajos en esta misma dirección son [32, 33].

Otra posible respuesta a esta pregunta se halla en [41] (ver también [43]) donde se deriva, entre otros, el siguiente modelo:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}h - 2\alpha\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}h + \Lambda h + \alpha^2\frac{\partial^4}{\partial x^4}h = -\varepsilon\Lambda\left(\left|H\frac{\partial}{\partial t}h\right|^2\right) + \varepsilon\left(\Lambda(h\Lambda h) + \frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial}{\partial x}h\right)\right) + \varepsilon\alpha\mathcal{Q}\left(h, \frac{\partial^3}{\partial x^3}h, \frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}h\right).$$

Este modelo contiene efectos disipativos gracias al término

$$\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}h,$$

por lo que puede describir el movimiento de olas con viscosidad siempre que tengan pendiente ε suficientemente pequeña.

6. OLAS INTERNAS, LA INESTABILIDAD DE RAYLEIGH-TAYLOR Y LA MEZCLA DE FLUIDOS

En todo lo anterior siempre hemos supuesto que había un único fluido. Si bien este problema se ha demostrado suficientemente difícil durante los últimos 200 años, también parece claro que es una caricatura de la realidad, así que no queremos acabar este texto sin tratar, aunque sea de manera muy breve, el caso de dos fluidos.

En nuestra vida diaria es muy normal observar cómo interactúan dos fluidos (por ejemplo, leche y café). Es más, cualquiera que se haya hecho un café, por matutino que este sea, sabe que cuando se añade la leche al café ambos fluidos se mezclan de manera turbulenta y casi instantánea en un movimiento que, a simple vista, podemos catalogar de *complicado*.

Esta inestabilidad presente cuando hay dos fluidos interactuando de manera que el más pesado esté sobre el más ligero se llama *inestabilidad de Rayleigh-Taylor* (en honor de Lord Rayleigh [71] y Taylor [73]). La inestabilidad de Rayleigh-Taylor aparece en multitud de fenómenos de la naturaleza, pero es difícil registrarla debido a su transición rápida al régimen turbulento donde ambos fluidos se mezclan. Como consecuencia de la ubicuidad de esta inestabilidad, su estudio es de gran interés para físicos, ingenieros y también matemáticos.

El punto de partida en la investigación de la inestabilidad de Rayleigh-Taylor son las ecuaciones de Euler para dos fluidos. Este sistema de leyes de conservación es muy inestable, de hecho, es un problema *mal propuesto en el sentido de Hadamard*, en ausencia de efectos de tensión superficial en la ola interna entre los fluidos. Este sistema también es muy difícil de simular a las escalas necesarias en la inestabilidad



Figura 6: Inestabilidad de Rayleigh-Taylor entre agua y tinta negra.

de Rayleigh-Taylor y el mezclado. Por esto, el desarrollo de buenos modelos de este fenómeno es muy importante.

Por supuesto, de manera similar a la secciones anteriores, el primer paso en esta dirección es considerar olas internas que vengan dadas como grafos de funciones. De hecho, uno podría repetir los argumentos de [4] para obtener la ecuación

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}h = A\Lambda h + A\varepsilon\Lambda \left(\left| H \frac{\partial}{\partial t} h \right|^2 \right) + A^2\varepsilon \left(\Lambda(h\Lambda h) + \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial}{\partial x} h \right) \right),$$

donde

$$A = \frac{\rho^+ - \rho^-}{\rho^+ + \rho^-}$$

es el número de Atwood que refleja la diferencia de densidades de ambos fluidos y H y Λ son los operadores definidos anteriormente. Siguiendo una aproximación diferente podemos hallar el modelo [44]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}h = A\Lambda h - A \frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial}{\partial t} h \frac{\partial}{\partial t} h \right).$$

Aunque estos modelos ya recuperan resultados conocidos en la literatura física, como los de [39], y mejoran modelos previos, como los de [67], son insatisfactorios en el sentido de que no pueden reflejar el hecho de que la ola interna va a girar y a abandonar su carácter de grafo. Para describir el fenómeno de las olas que giran se deben introducir modelos que consideren como olas internas curvas más generales. De hecho, partiendo de la integral de Birkhoff-Rott y usando argumentos inspirados de alguna manera en la *Local Induction Approximation* de Da Rios [28], se puede conseguir [44] el modelo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}z &= \Lambda \left(\frac{A}{|\bar{\partial}z|^2} H \left(\frac{\partial}{\partial t} z \cdot (\bar{\partial}z)^\perp H \left(\frac{\partial}{\partial t} z \cdot (\bar{\partial}z)^\perp \right) \right) + Az_2 \right) \frac{(\bar{\partial}z)^\perp}{|\bar{\partial}z|^2} \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} z \cdot (\bar{\partial}z)^\perp \left(\frac{(\bar{\partial} \frac{\partial}{\partial t} z)^\perp}{|\bar{\partial}z|^2} - \frac{(\bar{\partial}z)^\perp 2(\bar{\partial}z \cdot \bar{\partial} \frac{\partial}{\partial t} z)}{|\bar{\partial}z|^4} \right), \end{aligned} \tag{10}$$

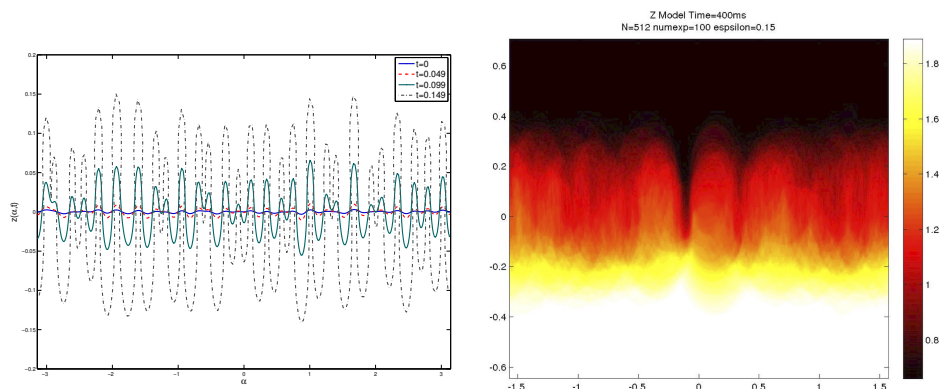


Figura 7: Izquierda: distintos tiempos de una solución de (10). Derecha: simulación de la mezcla de dos fluidos usando un *método de Monte Carlo* y el modelo (10).

donde $\bar{\partial}$ denota la derivada en el parámetro de la curva.

El sistema (10) es un sistema de ecuaciones de ondas de tipo no local. Este sistema permite describir olas internas que no se puedan expresar como grafos de una función y , en particular, pueden describir el giro de dichas interfases (ver figura 7) y hasta recuperar los resultados experimentales de Read [66] y Youngs [81, 82].

7. CONCLUSIONES

Hemos intentado presentar un breve esbozo del problema clásico de las olas en el agua y su modelización en distintos regímenes. Igualmente hemos tratado de discutir un par de ideas para el estudio matemático de las ecuaciones dispersivas obtenidas como modelos. Dado que la literatura sobre la modelización de olas en distintos regímenes y su posterior estudio matemático es enorme y no para de crecer, nos gustaría acabar este texto recomendando al lector interesado la lectura de la monografía [54] o los artículos de revisión [55, 19] que contienen mucho material, tanto desde el punto de vista más aplicado de la modelización como desde la perspectiva más teórica del estudio de las ecuaciones diferenciales.

AGRADECIMIENTOS. Querría agradecer al revisor sus comentarios y sugerencias.

REFERENCIAS

- [1] T. ALAZARD, N. BURQ Y C. ZUILY, The water-wave equations: from Zakharov to Euler, *Studies in phase space analysis with applications to PDEs* (M. Cicognani, F. Colombini y D. del Santo, Eds.), 1–20, Springer, 2013.
- [2] T. ALAZARD, N. BURQ Y C. ZUILY, On the Cauchy problem for gravity water waves, *Invent. Math.* **198** (2014), no. 1, 71–163.

- [3] D. AMBROSE, J. BONA Y D. NICHOLLS, Well-posedness of a model for water waves with viscosity, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* **17** (2012), no. 4, 1113–1137.
- [4] C. H. AURTHUR, R. GRANERO-BELINCHÓN, S. SHKOLLER Y J. WILKENING, Rigorous asymptotic models of water waves, *Water Waves* **1** (2019), no. 1, 71–130.
- [5] H. BAE Y R. GRANERO-BELINCHÓN, Singularity formation for the Serre-Green-Naghdi equations and applications to abcd-Boussinesq systems, *arXiv:2001.11937*, 2020.
- [6] A. J. C. BARRÉ DE SAINT-VENANT, Théorie du mouvement non-permanent des eaux avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit, *C. R. Acad. Sci. Paris* **73** (1871), 148–154.
- [7] A. BASSET, *A treatise on hydrodynamics: with numerous examples*, volume 2, Deighton, Bell and Company, 1888.
- [8] J. BONA Y M. CHEN, Singular solutions of a Boussinesq system for water waves, *J. Math. Study* **49** (2016), no. 3, 205–220.
- [9] J. BONA, M. CHEN Y J-C. SAUT, Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media. I: Derivation and linear theory, *J. Nonlinear Sci.* **12** (2002), no. 4, 283–318.
- [10] J. BOUSSINESQ, Lois de l'extinction de la houle en haute mer, *C. R. Acad. Sci. Paris* **121** (1895), 15–19.
- [11] J. BOUSSINESQ, Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond, *J. Math. Pures Appl. (2)* **17** (1872), 55–108.
- [12] R. CAMASSA, G. FALQUI, G. ORTENZI, M. PEDRONI Y C. THOMSON, Hydrodynamic models and confinement effects by horizontal boundaries, *J. Nonlinear Sci.* **29** (2019), no. 4, 1445–1498.
- [13] A. CASTRO, D. CÓRDOBA, C. FEFFERMAN, F. GANCEDO Y J. GÓMEZ-SERRANO, Finite time singularities for the free boundary incompressible Euler equations, *Ann. of Math. (2)* **178** (2013), no. 3, 1061–1134.
- [14] A. CASTRO, D. CÓRDOBA, C. FEFFERMAN, F. GANCEDO Y M. LÓPEZ-FERNÁNDEZ, Rayleigh-Taylor breakdown for the Muskat problem with applications to water waves, *Ann. of Math. (2)* **175** (2012), no. 2, 909–948.
- [15] A. CAUCHY, Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie, *Mém. présentés par divers savans à l'Acad. Roy. Sci. Inst. France* **1** (1827), 1–123.
- [16] D. CHRISTODOULOU Y H. LINDBLAD, On the motion of the free surface of a liquid, *Comm. Pure Appl. Math.* **53** (2000), no. 12, 1536–1602.
- [17] A. CONSTANTIN Y D. LANNES, The hydrodynamical relevance of the Camassa-Holm and Degasperis-Procesi equations, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **192** (2009), no. 1, 165–186.

- [18] A. CÓRDOBA, D. CÓRDOBA Y F. GANCEDO, Interface evolution: water waves in 2-D, *Adv. Math.* **223** (2010), no. 1, 120–173.
- [19] D. CÓRDOBA Y C. FEFFERMAN, Water waves with or without surface tension, *Handbook of Mathematical Analysis in Mechanics of Viscous Fluids* (Y. Giga y A. Novotný, Eds.), 1329–1349, Springer, 2018.
- [20] D. CÓRDOBA, M. A. FONTELOS Y J. L. RODRIGO, Las matemáticas de los fluidos: torbellinos, gotas y olas, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **8** (2005), no. 3, 565–595.
- [21] D. COUTAND Y S. SHKOLLER, Well-posedness of the free-surface incompressible Euler equations with or without surface tension, *J. Amer. Math. Soc.* **20** (2007), no. 3, 829–930.
- [22] D. COUTAND Y S. SHKOLLER, On the finite-time splash and splat singularities for the 3-D free-surface Euler equations, *Comm. Math. Phys.* **325** (2014), no. 1, 143–183.
- [23] W. CRAIG, An existence theory for water waves and the Boussinesq and Korteweg-DeVries scaling limits, *Comm. Partial Differential Equations* **10** (1985), no. 8, 787–1003.
- [24] W. CRAIG Y C. SULEM, Numerical simulation of gravity waves, *J. Comput. Phys.* **108** (1993), no. 1, 73–83.
- [25] A. CRAIK, The origins of water wave theory, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **36** (2004), 1–28.
- [26] A. CRAIK, George Gabriel Stokes on water wave theory, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **37** (2005), 23–42.
- [27] A. CRAIK, Continuity and change: representing mass conservation in fluid mechanics, *Arch. Hist. Exact Sci.* **67** (2013), no. 1, 43–80.
- [28] L. DA RIOS, Sul moto d’un liquido indefinito con un filetto vorticoso di forma qualunque, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **22** (1906), no. 1, 117–135.
- [29] O. DARRIGOL, The spirited horse, the engineer, and the mathematician: water waves in nineteenth-century hydrodynamics, *Arch. Hist. Exact Sci.* **58** (2003), no. 1, 21–95.
- [30] O. DARRIGOL Y U. FRISCH, From Newton’s mechanics to Euler’s equations, *Phys. D* **237** (2008), no. 14-17, 1855–1869.
- [31] F. DIAS, A. DYACHENKO Y V. ZAKHAROV, Theory of weakly damped free-surface flows: a new formulation based on potential flow solutions, *Phys. Lett. A* **372** (2008), no. 8, 1297–1302.
- [32] D. DUTYKH, Visco-potential free-surface flows and long wave modelling, *Eur. J. Mech. B Fluids* **28** (2009), no. 3, 430–443.
- [33] D. DUTYKH Y O. GOUBET, Derivation of dissipative Boussinesq equations using the Dirichlet-to-Neumann operator approach, *Math. Comput. Simulation* **127** (2016), 80–93.
- [34] A. ENCISO Y D. PERALTA-SALAS, Nudos y enlaces en mecánica de fluidos, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **15** (2012), no. 2, 277–292.

- [35] L. EULER, Principes généraux du mouvement des fluides, *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin* **11** (1757), 274–315.
- [36] L. EULER, Principia motus fluidorum, *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* **6** (1761), 271–311.
- [37] U. FRISCH Y B. VILLONE, Cauchy's almost forgotten Lagrangian formulation of the Euler equation for 3D incompressible flow, *Eur. Phys. J. H* **39** (2014), no. 3, 325–351.
- [38] P. GERMAIN, N. MASMOUDI Y J. SHATAH, Global solutions for the gravity water waves equation in dimension 3, *Ann. of Math. (2)* **175** (2012), no. 2, 691–754.
- [39] V. N. GONCHAROV, Analytical model of nonlinear, single-mode, classical Rayleigh-Taylor instability at arbitrary Atwood numbers, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002), no. 13, 134502.
- [40] R. GRANERO-BELINCHÓN Y S. SCROBOGNA, Asymptotic models for free boundary flow in porous media, *Phys. D* **392** (2019), 1–16.
- [41] R. GRANERO-BELINCHÓN Y S. SCROBOGNA, Models for damped water waves, *SIAM J. Appl. Math.* **79** (2019), no. 6, 2530–2550.
- [42] R. GRANERO-BELINCHÓN Y S. SCROBOGNA, Well-posedness of the water-wave with viscosity problem, *arXiv:2003.11454*, 2020.
- [43] R. GRANERO-BELINCHÓN Y S. SCROBOGNA, Well-posedness of water wave model with viscous effects, *Proc. Amer. Math. Soc.* (aceptado), <https://doi.org/10.1090/proc/15219>.
- [44] R. GRANERO-BELINCHÓN Y S. SHKOLLER, A model for Rayleigh-Taylor mixing and interface turnover, *Multiscale Model. Simul.* **15** (2017), no. 1, 274–308.
- [45] A. GREEN Y P. NAGHDI, A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth, *J. Fluid Mech.* **78** (1976), no. 2, 237–246.
- [46] J. HUNTER, M. IFRIM Y D. TATARU, Two dimensional water waves in holomorphic coordinates, *Comm. Math. Phys.* **346** (2016), no. 2, 483–552
- [47] M. IFRIM Y D. TATARU, Two dimensional water waves in holomorphic coordinates II: Global solutions, *Bull. Soc. Math. France* **144** (2016), no. 2, 369–394.
- [48] A. IONESCU Y F. PUSATERI, Global solutions for the gravity water waves system in 2d. *Invent. Math.* **199** (2015), no. 3, 653–804.
- [49] M. KAKLEAS Y D. NICHOLLS, Numerical simulation of a weakly nonlinear model for water waves with viscosity, *J. Sci. Comput.* **42** (2010), no. 2, 274–290.
- [50] T. KANO Y T. NISHIDA, Sur les ondes de surface de l'eau avec une justification mathématique des équations des ondes en eau peu profonde, *J. Math. Kyoto Univ.* **19** (1979), no. 2, 335–370.
- [51] J. L. LAGRANGE *Analytical mechanics*, traducción de *Mécanique analytique, nouvelle édition* (1811), Boston Studies in the Philosophy of Science, vol. 191, Springer, 1997.
- [52] H. LAMB, *Hydrodynamics*, 6.^a ed., Cambridge University Press, 1932.

- [53] D. LANNES, Well-posedness of the water-waves equations, *J. Amer. Math. Soc.* **18** (2005), no. 3, 605–654.
- [54] D. LANNES, *The water waves problem: mathematical analysis and asymptotics*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 188, American Mathematical Soc., 2013.
- [55] D. LANNES, Modeling shallow water waves, *Nonlinearity* **33** (2020), no. 5, R1–R57.
- [56] D. LANNES Y G. MÉTIVIER, The shoreline problem for the one-dimensional shallow water and Green-Naghdi equations, *J. Éc. Polytech. Math.* **5** (2018), 455–518.
- [57] H. LINDBLAD, Well-posedness for the motion of an incompressible liquid with free surface boundary, *Ann. of Math. (2)* **162** (2005), no. 1, 109–194.
- [58] M. LONGUET-HIGGINS, Theory of weakly damped Stokes waves: a new formulation and its physical interpretation, *J. Fluid Mech.* **235** (1992), 319–324.
- [59] J. LUKE, A variational principle for a fluid with a free surface, *J. Fluid Mech.* **27** (1967), no. 2, 395–397.
- [60] R. MITTAL, R. NI Y J. H. SEO, The flow physics of covid-19, *J. Fluid Mech.* **894** (2020), F2.
- [61] X. MORA, Les equacions de Navier-Stokes: un repte al determinisme newtonià, *Butl. Soc. Catalana Mat.* **23** (2008), no. 1, 53–120.
- [62] V. I. NALIMOV, The Cauchy-Poisson problem (en ruso), *Dinamika Splošn. Sredy (Vyp. 18 Dinamika Zidkost. so Svobod. Granicami)* **254** (1974), 104–210.
- [63] M. NGOM Y D. NICHOLLS, Well-posedness and analyticity of solutions to a water wave problem with viscosity, *J. Differential Equations* **265** (2018), no. 10, 5031–5065.
- [64] C. OSEEN, Sur les formules de Freen généralisées qui se présentent dans l’hydrodynamique et sur quelquesunes de leurs applications, *Acta Math.* **34** (1911), 205–284.
- [65] S. D. POISSON, Mémoire sur la théorie des ondes, *Mém. Acad. Roy. Sci. Inst. France, Ser. 2* **1** (1816), 71–186.
- [66] K. READ, Experimental investigation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability, *Phys. D* **12** (1984), 45–58.
- [67] B. ROLLIN Y M. J. ANDREWS, On generating initial conditions for turbulence models: the case of Rayleigh-Taylor instability turbulent mixing, *J. Turbul.* **14** (2013), no. 3, 77–106.
- [68] F. SERRE, Contribution à l’étude des écoulements permanents et variables dans les canaux, *Houille Blanche*, no. 6, diciembre (1953), 830–872.
- [69] J. SHATAH Y C. ZENG, Geometry and a priori estimates for free boundary problems of the Euler’s equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **61** (2008), no. 5, 698–744.
- [70] M. SHINBROT, The initial value problem for surface waves under gravity, I: The simplest case, *Indiana Univ. Math. J.* **25** (1976), no. 3, 281–300.

- [71] J. W. STRUTT LORD RAYLEIGH, Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density, *Proc. Lond. Math. Soc.* **14** (1883), 170–177.
- [72] P. G. TAIT, Note on ripples in a viscous liquid, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **17** (1891), 110–115.
- [73] G. TAYLOR, The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. I, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **201** (1950), 192–196.
- [74] W. THOMSON (LORD KELVIN), Notes on hydrodynamics V. On the vis-viva of a liquid in motion, *Camb. Dubl. Math. J* **4** (1849), 90–94.
- [75] L. VEGA, La ola solitaria, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **4** (2001), no. 3, 528–566.
- [76] S. WU, Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 2-D, *Invent. Math.* **130** (1997), no. 1, 39–72.
- [77] S. WU, Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 3-D, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), no. 2, 445–495.
- [78] S. WU, Global wellposedness of the 3-D full water wave problem, *Invent. Math.* **184** (2011), no. 1, 125–220.
- [79] T. WU, Long waves in ocean and coastal waters, *J. Eng. Mech.* **107** (1981), no. 3, 501–522.
- [80] H. YOSIHARA, Gravity waves on the free surface of an incompressible perfect fluid of finite depth, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **18** (1982), no. 1, 49–96.
- [81] D. YOUNGS, Numerical simulation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability, *Phys. D* **12** (1984), no. 1-3, 32–44.
- [82] D. YOUNGS, Modelling turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability, *Phys. D* **37** (1989), no. 1-3, 270–287.
- [83] N. J. ZABUSKY Y C. J. GALVIN, Shallow-water waves, the Korteweg-DeVries equation and solitons, *J. Fluid Mech.* **47** (1971), no. 4, 811–824.
- [84] V. ZAKHAROV, Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **9** (1968), no. 2, 190–194.

RAFAEL GRANERO-BELINCHÓN, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, ESTADÍSTICA Y COMPUTACIÓN,
UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Correo electrónico: rafael.granero@unican.es

Página web: <https://personales.unican.es/graneror/>