GEOMETRÍA BÁSICA

TEMA VII - ÁREA DE FIGURAS PLANAS

---

1. INTRODUCCIÓN

Recordemos que a principios de curso comentamos que el germen de los primeros resultados de carácter geométrico estaban relacionados con la actividad práctica del hombre, y más concretamente con el problema de determinación de la medida de una figura plana. Vamos a tratar de abordar precisamente este aspecto de la medida.

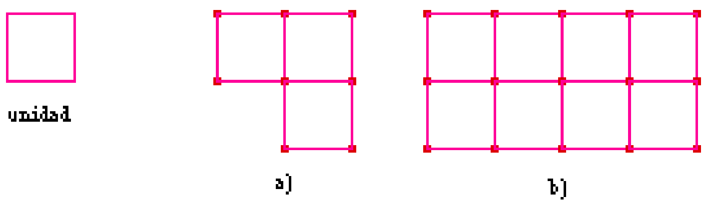
La idea básica de toda medición de una magnitud M es fijar una unidad de medida y tratar de expresar la cantidad de magnitud a medir en función de dicha unidad. Además existen una serie de condiciones que se desprenden de forma intuitiva y que hemos de tener en cuenta.

Así, en el caso de medir superficies adoptamos los siguientes convenios:

1. El área de una figura plana es un número mayor o igual que cero.
2. Fijamos como unidad de medida de superficie un cuadrado, al que llamamos cuadrado unidad y al que asignamos como medida o área el valor 1.
3. Si dos cuadrados o dos triángulos son congruentes, sus áreas coinciden.
4. Si de un polígono conocemos una descomposición en polígonos, el área del polígono inicial es suma de los áreas de los polígonos que aparecen en la descomposición.

Como consecuencia, si una figura está completamente contenida en otra, entonces el área de la primera es menor o igual que el área de la segunda.

Veamos cómo llegar a los primeros resultados relativos a áreas. Supongamos que el cuadrado de la figura es el cuadrado unidad, cuyo lado es la unidad de longitud considerada. Con esa unidad de medida para el área, podemos decir que el área de la figura a) es 3 y el de la figura b) es 8.



En el caso más general en el que la base o la altura de un rectángulo no es un número entero de veces el lado del cuadrado unidad, tradicionalmente se actúa de la forma siguiente.

- Dividimos cada lado del cuadrado unidad en n partes iguales, obteniendo así una descomposición del cuadrado unidad en n^2 cuadrados congruentes entre sí y por tanto de igual área, que como en su totalidad recubren una superficie de área 1, tendrán por área $1/ n^2$ (si tenemos en cuenta las condiciones impuestas con anterioridad). Obsérvese que la longitud del lado de cada cuadrado es $1/n$.
- Transportamos el segmento de longitud $1/n$ a lo largo de la base y de la altura del rectángulo. Si la base tiene longitud b y la altura longitud a, existirán números naturales k y m tales que

$$k \cdot 1/n \le a < (k+1) \cdot 1/n \qquad (1)$$

$$m \cdot 1/n \le b < (m+1) \cdot 1/n \qquad (2)$$

Si multiplicamos miembro a miembro esas desigualdades de números positivos se obtiene que

$$k \cdot m \cdot 1/n^2 \le a \cdot b < (k+1) \cdot (m+1) \cdot 1/n^2 \qquad (3)$$

Como el rectángulo dado contiene el rectángulo de base $m \cdot 1/n$ y altura $k \cdot 1/n$ y está contenido en el rectángulo de base $(m+1) \cdot 1/n$ y altura $(k+1) \cdot 1/n$, entonces el área A del rectángulo también verifica

$$k \cdot m \cdot 1/n^2 \leq A < (k+1) \cdot (m+1) \cdot 1/n^2 \qquad (4)$$

Entonces

$$|A - a \cdot b| \leq (k+1) \cdot (m+1) \cdot 1/n^2 - k \cdot m \cdot 1/n^2 = (k+m+1)/n^2 \leq (a \cdot n + b \cdot n + 1)/n^2$$

y este cociente se puede hacer tan pequeño como se quiera, si se toma n suficientemente grande.

Por lo tanto

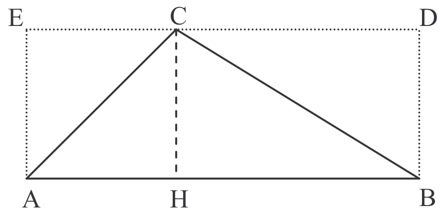
$$A = a \cdot b$$

2. ÁREA DE POLÍGONOS

Área del triángulo

Dado un triángulo ΔABC sea H el pie de la altura correspondiente al vértice C. Supongamos que H está entre A y B.

Si construimos el rectángulo ABDE de base $\overline{AB}$ tal que C está en $\overline{ED}$, se puede demostrar que $\Delta AHC = \Delta CEA$, $\Delta BHC = \Delta CDB$ y $\overline{AE} = \overline{HC}$. Como el área del rectángulo, que es la suma de los cuatro triángulos, es igual a $\overline{AB}\,\overline{AE} = \overline{AB}\,\overline{HC}$, entonces el área del triángulo debe ser

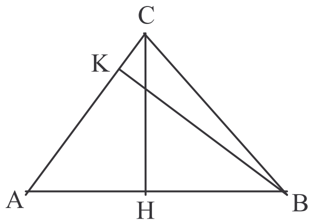


$$Ar(\Delta ABC) = ½\,\overline{AB}\,\overline{HC}.$$

Se deja como ejercicio realizar un análisis similar en los casos en que H no está entre A y B, y comprobar que siempre el área del triángulo es un medio de la base por la altura correspondiente.

Veamos que si escogemos como base otro lado, el resultado es el mismo. Si $\overline{HC}$ es la altura correspondiente al lado $\overline{AB}$ y $\overline{KB}$ es la altura correspondiente al lado $\overline{AC}$, los triángulos rectángulos ΔHAC y ΔKAB son semejantes, pues tienen en común el ángulo A. Luego

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{HC}}{\overline{KB}}, \text{ de donde } \overline{AC}\,\overline{KB} = \overline{AB}\,\overline{HC}.$$



Hemos supuesto que ΔABC es acutángulo. Se deja como ejercicio estudiar los otros casos.

Área de otros polígonos

Definiremos el área de un polígono cualquiera dividiéndolo en triángulos, de modo que el área del polígono sea la suma de las áreas de los triángulos en los que se ha dividido. Llamamos *triangulación* de un polígono a una partición del polígono en triángulos, tal que dos de estos triángulos no tienen puntos comunes, solo tienen un vértice común o tienen un lado común.

Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los polígonos del plano y $\mathbf{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos. Se define la función área $Ar: \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{R}^+$ como

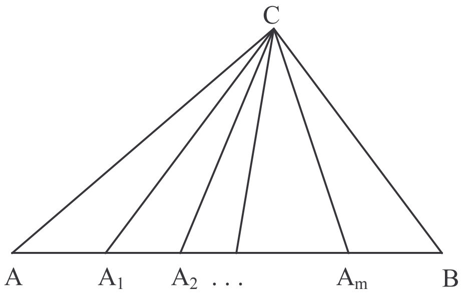
$$Ar(T) = \overline{AB}\,\overline{HC}/2 \text{ si T es un triángulo de base } \overline{AB} \text{ y altura } \overline{HC}.$$

$$Ar(P) = \text{suma áreas triángulos de una triangulación de P, donde P es un polígono cualquiera.}$$

Es necesario probar que la definición anterior está bien dada, demostrando que el área de una figura no depende de la triangulación elegida.

El área de un triángulo no depende de la triangulación: Veamos que el área de un triángulo ΔABC coincide con la fórmula anterior si la calculamos mediante una triangulación.

Consideramos primero el caso particular en el que todos los triángulos de la triangulación tienen vértice C. Si h es la altura de ΔABC correspondiente al vértice C, el área de ΔABC obtenida mediante la suma de las áreas de los triángulos ΔAA_1C, ΔA_1A_2C, ..., $\Delta A_{m-1}A_mC$, ΔA_mBC resulta:

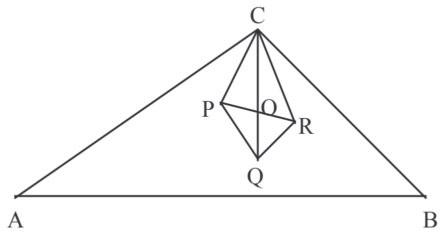


$$\frac{\overline{AA_1}\,h}{2}+\frac{\overline{A_1A_2}\,h}{2}+\ldots+\frac{\overline{A_{m-1}A_m}\,h}{2}+\frac{\overline{A_mB}\,h}{2}$$

$$=\frac{(\overline{AA_1}+\overline{A_1A_2}+\ldots+\overline{A_{m-1}A_m}+\overline{A_mB})\,h}{2}=\frac{\overline{AB}\,h}{2}\ .$$

Dada una triangulación arbitraria de ΔABC se ve que

a) El área de cualquier triángulo de la triangulación se puede expresar en función de áreas de triángulos que tienen vértice en C y el lado opuesto es lado de un triángulo de la triangulación. Estudiemos, por ejemplo, el triángulo ΔPQR de la figura:



$$Ar(\Delta PQR) = Ar(\Delta PQO) + Ar(\Delta QRO),$$
$$Ar(\Delta CPQ) = Ar(\Delta CPO) + Ar(\Delta PQO),$$
$$Ar(\Delta CRQ) = Ar(\Delta CRO) + Ar(\Delta QRO),$$
$$Ar(\Delta CPR) = Ar(\Delta CPO) + Ar(\Delta CRO).$$

Entonces

$$Ar(\Delta PQR) = Ar(\Delta CPQ) + Ar(\Delta CRQ) - Ar(\Delta CPR).$$

b) La suma de las áreas de todos los triángulos de la triangulación se puede escribir como una suma de áreas de triángulos de la forma ΔCXY donde XY es lado de un triángulo de la triangulación. Si el segmento XY está en el interior de ΔABC, el área de ΔCXY aparecerá en la suma dos veces, pues es lado de dos triángulos de la partición. Pero en un caso aparecerá sumado y en el otro restado, de modo que estos sumandos se cancelarán. Por lo tanto la suma se reducirá a una suma de áreas de triángulos con XY contenido en AB.

El área de un polígono no depende de la triangulación: Supongamos que un polígono está triangulado de dos formas diferentes. En la primera triangulación se hallan los triángulos $T_1, T_2, \ldots, T_n$ y en la segunda los triángulos $T'_1, T'_2, \ldots, T'_k$. Hemos de probar que la suma de las áreas de los primeros y la suma de las áreas de los segundos coinciden. Para ello se actúa de la forma siguiente:

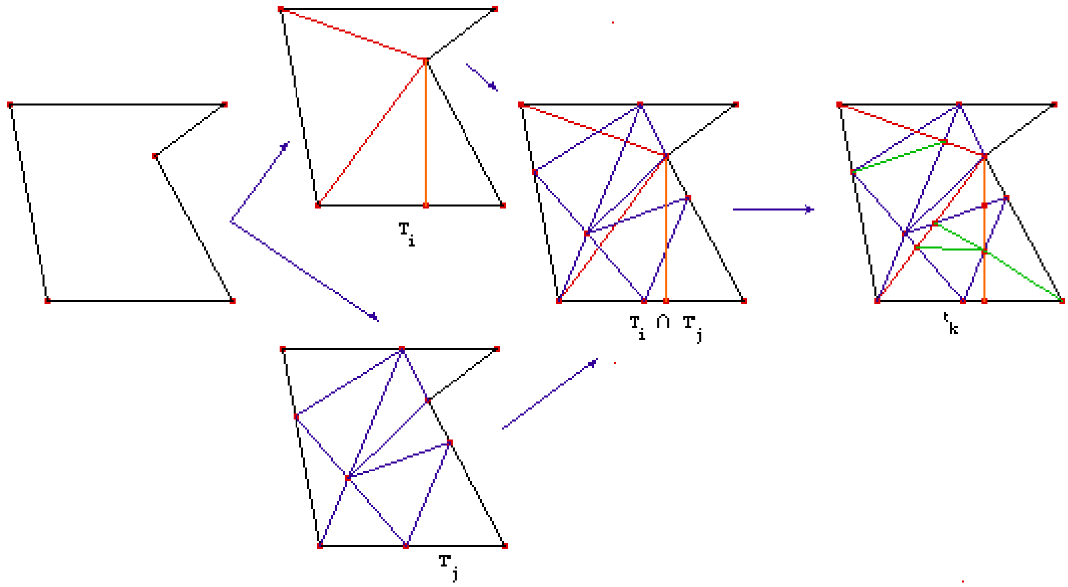
a) Se consideran las intersecciones $T_i \cap T'_j$, que serán el conjunto vacío, un triángulo, un cuadrilátero o un pentágono.

b) Aquellas de las intersecciones anteriores que no sean triángulos se triangulan y las otras se dejan como están. Considerando todos los triángulos obtenidos, conseguimos una nueva triangulación

$$t_1, t_2, \ldots, t_m$$

del polígono inicial.

c) El área de cada T_i se expresa en función de áreas de algunos t_j. y lo mismo sucede con cada T'_i. Esto nos lleva al objetivo deseado.



3. ÁREA DEL CÍRCULO

Consideramos en el círculo los polígonos regulares inscriptos P_n de 2^n lados con $n \geq 2$. También consideramos el cuadrado circunscrito al círculo. En estas condiciones tenemos:

- El área del polígono P_n es $Ar(P_n) = a_n = 2^n \cdot l_n \cdot h_n / 2$ donde 2^n indica el número de triángulos (congruentes) en que se divide el polígono, con vértices dos vértices consecutivos de P_n y el centro del círculo. Por l_n denotamos la longitud del lado de P_n, y por h_n la altura de cada uno de los triángulos señalados.
- Como P_n está contenido en P_{n+1}, $a_n \leq a_{n+1} \leq a$, donde a denota el área del cuadrado circunscrito al círculo.
- Entonces la sucesión $\{a_n\}$ es creciente y está acotada, luego tiene límite. Dicho límite es el área del círculo.
- Calculemos dicho límite:

  El producto $2^n \cdot l_n$ es el perímetro p_n de P_n.

  La sucesión $\{a_n\}$ es producto de las sucesiones $\{p_n\}$ y $\{h_n/2\}$.

  Estas dos últimas sucesiones tienen límite:

  $\lim p_n$ = longitud de la circunferencia frontera del círculo = $2\pi r$, donde r es el radio de la circunferencia (y del círculo);

  $\lim h_n = r$, pues la sucesión $\{h_n\}$ es creciente y acotada por r, que coincide con la menor de las cotas superiores de $\{h_n\}$.

Por tanto,

$$Ar(\text{círculo}) = \lim a_n = 2\pi r \cdot r/2 = \pi r^2.$$

4. CUERPOS EN EL ESPACIO. ÁREAS LATERALES Y TOTALES DE FIGURAS EN EL ESPACIO

Recordemos la definición de polígono convexo de vértices $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Observemos que los puntos del polígono que están sobre alguno de los lados tienen una característica diferenciadora frente al resto de puntos del polígono.
Si un punto A está en algún lado del polígono, al considerar cualquier círculo de centro A hay puntos del círculo que pertenecen al polígono y otros que no. En este caso se dice que A es un punto frontera del polígono.
Si el punto A del polígono no está sobre ningún lado, siempre es posible considerar un círculo de centro A de forma que todos sus puntos sean puntos del polígono. En este caso se dice que a es un punto interior del polígono.

Un criterio similar se establece para distinguir un punto frontera de uno interior en un polígono cualquiera, en un círculo, o cualquier otra figura plana.
El conjunto de puntos frontera se denomina frontera de la figura, y el conjunto de puntos interiores interior de la figura.
¿Quiénes son los puntos frontera y puntos interiores de una circunferencia?.
Una figura plana se dice cerrada si es la unión de su interior y su frontera. ¿Es cerrada la circunferencia? ¿El círculo? ¿Un polígono convexo?

Dado un punto O del espacio y un número real ρ, el conjunto de puntos de puntos del espacio que distan de O una cantidad igual o menor que ρ, recibe el nombre de *esfera* de centro O y radio ρ.
Cuando trabajamos en el espacio con una figura no plana, si A es un punto de dicha figura se dirá frontera si al considerar cualquier esfera de centro A, dicha esfera contiene puntos que están en la figura y otros que no lo están. Si dado un punto A de la figura es posible encontrar una esfera de centro A con todos su puntos contenidos en la figura, se dice que A es un punto interior. Una figura en el espacio se dice *figura cerrada* o *cuerpo* si es unión de sus puntos interiores y sus puntos frontera.
Un cuerpo cuya frontera consta de un número finito de polígonos se llama *poliedro*. Los polígonos que limitan el poliedros se denominan *caras* del poliedro. El poliedro se llama *convexo* si se encuentra a un lado del plano determinado por cada una de sus caras.
La suma de las áreas de los polígonos que constituyen la frontera del poliedro se denomina *área del poliedro*. Para algunos poliedros especiales se distingue entre área lateral y área total. Las hojas de ejercicios dan alguna información en este sentido.

GEOMETRÍA BÁSICA

EJERCICIOS TEMA VII: ÁREA DE FIGURAS PLANAS

1. Sea ABCD un paralelogramo y N y M son puntos medios de los segmentos AD y CD respectivamente. Probar que:

i) $\acute{a}rea(ABN) = \acute{a}rea(BMC)$ ii) $\dfrac{area(ABN)}{area(ABCD)} = \dfrac{1}{4}$

2. Denotemos por S_i i = 1, 2, ..., 6 las áreas de los seis triángulos que se obtienen al trazar en un triángulo ABC sus tres medianas. Si S es el área de ABC, demuestra que $S_i = S/6$ para todo i.

3. Demostrar que la suma de las áreas de las lúnulas construidas sobre un triángulo rectángulo, como se ve en la figura, es igual al área de dicho triángulo.

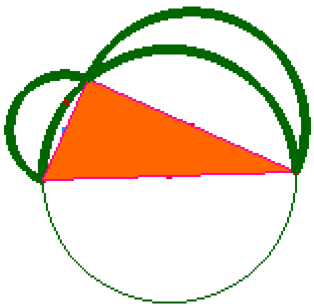


Figura 1

4. i) Calcula las dimensiones de un rectángulo de 32 m. de perímetro y 63 m^2 de superficie.

ii) Calcula el área de un rectángulo de 160 cm. de perímetro y cuya base es tres veces mayor que la altura.

iii) El área de un triángulo es 125 cm^2. La semisuma de un lado y su altura respectiva es 27,5 cm. Halla el valor de dicho lado y de dicha altura.

iv) Demuestra que si dos triángulos son semejantes con razón de semejanza a, la razón entre sus áreas es a^2. Generaliza este resultado a polígonos convexos semejantes.

v) Sea ABC un triángulo y s un segmento que se utiliza como unidad de longitud. Determina en el segmento AC un punto A' de manera que al trazar la paralela por A' a AB el triángulo de partida quede dividido en dos figuras de igual área.

vi) En un trapecio isósceles de bases 10 m. y 4 m. se prolongan los lados no paralelos formando con la base mayor un triángulo. Calcular el área de éste último.

vii) La altura relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es de 4,8 m. y su área es 24 m^2. Halla la longitud de los catetos.

5. Construye un rombo del que se conoce el perímetro y el área.

6. Construye un rectángulo ABCD cuyo perímetro es 64 cm., y se sabe que es semejante a otro rectángulo dado cuyo área es 15 cm^2. y la razón de semejanza del primero sobre el segundo es 4.

7. Demuestra que si una diagonal divide un cuadrilátero convexo en dos triángulos de igual área, dicha diagonal corta en el punto medio a la otra diagonal.

8. Halla el área de un triángulo rectángulo, sabiendo que un cateto mide 3 cm. y su proyección sobre la hipotenusa 1.8 cm.

9. Dos fabricantes de mazapán usan para su comercialización cajas iguales y de base circular. La distribución del mazapán en la caja es distinta para cada fabricante y responde a la figura 2 siguiente (la zona sombreada es mazapán). ¿Quién pone más mazapán de los dos?

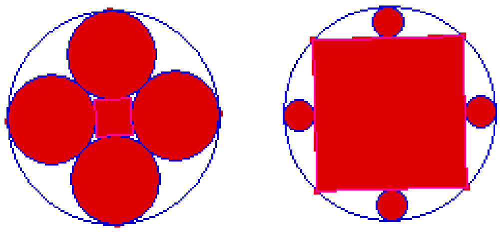


Figura 2

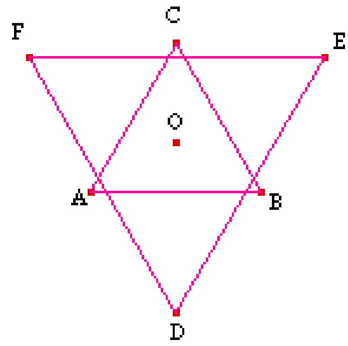


Figura 3

10. Sea ABC un triángulo equilátero donde λ es la longitud de sus lados, y O es su baricentro. En la figura 3 se tiene que:

- D está en la recta CO, E sobre la recta AO y F sobre la OB.
- Los segmentos OD, OE y OF tienen longitud λ.

1. Demuestra que el triángulo DEF es equilátero. ¿Son ABC y DEF semejantes?.
2. ¿Es O baricentro del triángulo DEF?. Si M es el punto medio del segmento EF, ¿qué longitud tiene el segmento OM?.
3. Calcula la longitud del lado del triángulo DEF, y demuestra que el área de dicho triángulo es el triple del área del triángulo ABC.

11. La figura de puntos que aparece a continuación ilustra lo que se conoce como trama cuadrada. En ella se toma como unidad de longitud la distancia entre dos puntos consecutivos de una misma fila o columna, y como unidad de superficie, la de un cuadrado de lado la unidad.

En este ejercicio lo que se trata es de construir distintos polígonos con vértices en puntos de la trama con las características que se fijen en cada apartado.

Al final tratamos de enunciar un resultado que pone en relación el área de un polígono construido sobre la trama con la cantidad de puntos frontera y el número de puntos interiores del mismo. este último resultado es conocido como teorema de Pick.

a) Dibuja polígonos de área dos sobre una trama cuadrada.

b) Calcula el área de cada uno de los triángulos distintos construidos sobre una trama 3×3. Puedes proceder por descomposición y/o complementación de polígonos.

c) Dibuja en una trama cuadrada figuras de área 3, de área 4, y de área superior a 4. Calcula también su perímetro.

d) Sobre una trama cuadrada dibuja figuras sin puntos en el interior, con un punto en el interior, con dos puntos en el interior, ..., y construye una tabla indicando el número de puntos frontera, número de puntos interiores y área de cada figura.

e) Con los resultados obtenidos en el apartado anterior intenta deducir una fórmula para el área de dichas figuras en función del número de puntos frontera y del número de puntos interiores de las mismas.

12. La figura 4 muestra un puzzle conocido como Tangram. El Tangram, famoso juego chino que permite confeccionar cantidad de imágenes curiosas, es un material hoy día muy utilizado para tratar, en ciertos niveles, algunos aspectos relacionados con la medida de superficie. Confecciona en cartón un tangram con el fin de ayudarte a resolver este ejercicio.

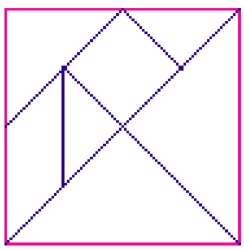


Figura 4

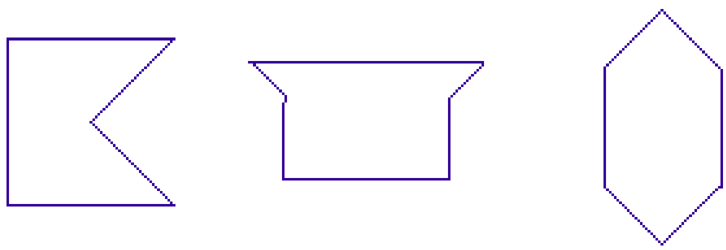


Figura 5

a) Con las siete piezas de un tangram forma un cuadrado. un triángulo, un paralelogramo, un trapecio y un rectángulo.

b) Tomando como unidad de longitud el lado del cuadrado del tangram halla el perímetro de las figuras construidas en el apartado anterior.
c) Considerando como unidad de medida el cuadrado del tangram, mide la superficie de las demás piezas. Construye las figuras que aparecen en 5 (para las que no son necesarias obligatoriamente todas las piezas del tangram), anota cómo lo has hecho y halla el área de cada una de ellas.
d) Forma figuras que tengan el mismo perímetro y distinto área.

13. Demuestra que si dos polígonos convexos son semejantes con razón α, la razón entre sus áreas es α^2.

14. En la introducción al tema sobre la obtención de áreas de superficies planas vimos cómo deducir el área de un rectángulo, de un paralelogramo y de un triángulo, Esto nos permitió definir área de cualquier polígono por triangulación. Deduce ahora las fórmulas conocidas para el cálculo del área de

- un rombo: "diagonal mayor por diagonal menor partido por dos".
- un trapecio: "semisuma de las bases por la altura".

15. Un cristalero tiene que realizar una vidriera circular como muestra la figura 6, empleando cristal rojo (R) y verde (V). ¿Qué cantidad de superficie de cristal de cada tipo necesita, sabiendo que el radio de la circunferencia es de 80 cm.

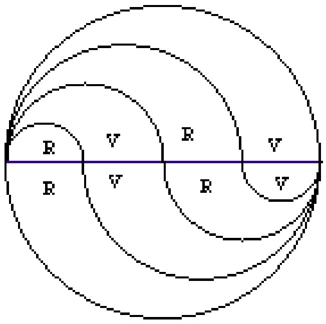
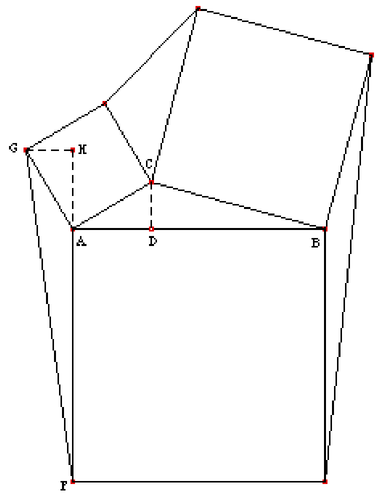


Figura 4

16. Sea ABCD un rombo con ángulo B obtuso. Desde B se trazan las perpendiculares a AD y BC, que cortan a dichos segmentos en E y F respectivamente.
a) Demuestra que los segmentos BE y BF son congruentes.
b) Prueba que los triángulos isósceles BDA y EFB son semejantes.
c) ¿En qué resultado puedes apoyarte para afirmar que BD. BG = BE^2?
d) Si la longitud de BE es *a* y la de EF es *b*, teniendo en cuenta resultados obtenidos en apartados anteriores, determina el área del rombo ABCD en función de *a* y *b*.

17. Sea ABC un triángulo cualquiera. Sobre sus lados se construyen cuadrados, tal como muestra la figura.



a) Sea CD altura de ABC y GH altura de AFG. Demuestra que los ángulos DAC y HAG son iguales, y deduce que los triángulos ACD y AGH son congruentes.
b) Demuestra que las áreas de los triángulos AFG y ABC son iguales (para ello puedes usar alguna consecuencia del apartado anterior).
c) El teorema de Cross dice que en las condiciones de la figura los triángulos que se construyen con vértices libres de los cuadrados tienen igual área que el triángulo inicial. ¿Está demostrado dicho teorema?.

18. Sean α y α' dos planos paralelos y *h* una recta secante a dichos planos. Sea *P* un polígono convexo de vértices $A_1 A_2 ... A_n$ en el plano α. Por todo punto X de *P* trazamos una paralela a *h*, que determina en α' un punto X'. Loa segmentos XX' forman un poliedro denominado *prisma*. La *frontera del prisma* consta del polígono *P* y de su igual *P*' en el plano α', así como de los paralelogramos $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$, ... Los polígonos *P* y *P*' reciben el nombre de *bases* del prisma y los paralelogramos se llaman *caras laterales* del prisma. Los segmentos A_1A_1'. A_2A_2', ... son las *aristas laterales*. El prima se denomina *recto* si las aristas laterales son perpendiculares a las bases. En caso contrario se denomina *oblicuo*.
Se llama *área lateral* de un prisma a la suma de las áreas de las caras laterales, y *área total* es el área lateral más el área de las bases.
Un prisma se denomina *paralelepípedo* si las bases son paralelogramos.
a) Realiza figuras que ilustren los conceptos de prisma, prisma recto, paralelepípedo, paralelepípedo recto y paralelepípedo recto de base rectangular (paralelepípedo rectangular).
b) Deduce que el área lateral del prisma recto es igual al producto del perímetro de la base por la altura del prisma, esto es, por la longitud de cualquiera de sus aristas laterales.
c) Usando algún texto de la bibliografía, da una definición de pirámide, base y altura de pirámide, pirámide regular y apotema de pirámide regular.
d) Deduce que el área lateral de una pirámide regular es igual al producto del semiperímetro de la base por la apotema.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE CROSS (Ejercicio nº 16)

Es inmediato que el teorema queda demostrado si probamos que uno de los triángulos construidos con vértices libres de los cuadrados tiene igual área que el triángulo inicial, pues en los otros dos casos se razonará de forma análoga.

Sea ABC el triángulo inicial, y ABEF y ACKG los cuadrados construidos sobre AB y AC respectivamente. Veámos que el triángulo AFG tiene igual área que el triángulo ABC.

Para probar que tales áreas son iguales, y partiendo de que los triángulos AFG y ABC tienen dos lados correspondientes congruentes (AF ; AB y AG ; AC), basta demostrar que las alturas CD del triángulo ABC y GH del triángulo AFG son iguales. Veamos que es así.

Los ángulos DAC y HAG son iguales puesto que cada uno de ellos sumado al ángulo GAF forman uno llano. Como DAC; HAG y los triángulos ACD y AGH son rectángulos con hipotenusas iguales, dichos triángulos son congruentes (aplicando el segundo criterio de congruencia de triángulos. En particular obtenemos que CD ; GH. Así:

área de AFG = (1/2) AF · GH = (1/2) AB · CD = área de ABC