GEOMETRÍA BÁSICA

TEMA VI - TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

---

1. TRANSFORMACIONES

Una *transformación* es una aplicación biyectiva del plano en si mismo. Si F es una transformación, a cada punto P del plano le corresponde un único punto Q = f(P), y viceversa, para cada punto R existe un único punto S tal que f(S) = R.

La *transformación identidad* es la transformación *i* que aplica cada punto en si mismo, es decir, *i*(P) = P para todo P.

Dada una transformación f, existe la *transformación inversa* f^{-1}, tal que si f(P) = Q entonces f^{-1} (Q) = P.

Estudiaremos en primer lugar las isometrías o movimientos, que son las transformaciones que conservan las distancias.

2. MOVIMIENTOS

Un *movimiento* o *isometría* m en el plano α es una aplicación de α en sí mismo que conserva las distancias, esto es, los segmentos PQ y m(P)m(Q) son congruentes.

Una *colineación* es una transformación que transforma rectas en rectas. En otras palabras, si f es una colineación y r es una recta, el conjunto de puntos f(r) = {f(P) : P ∈ r} es una recta.

Proposición: Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia de centro O. Si P y Q son dos puntos distintos de $\mathcal{C}$ entonces O está en la mediatriz de $\overline{PQ}$.

Dem: O equidista de P y Q. Por un ejercicio del tema IV, O está en la mediatriz. □

Proposición: Sean $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ tres circunferencias distintas, con centros A, B y C, respectivamente. Si P y Q son dos puntos distintos que están en $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$, entonces A, B y C son colineales.

Dem: Por la proposición anterior, A, B y C están en la mediatriz de $\overline{PQ}$. □

Proposición: Dos circunferencias distintas no pueden tener tres puntos en común.

Sean $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ tres circunferencias distintas, con centros A, B y C, respectivamente. Si P y Q son dos puntos distintos que están en $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$, entonces A, B y C son colineales.

Dem: Sea $\mathcal{C}_1$ una circunferencia de centro A y radio r_1 y sea $\mathcal{C}_2$ una circunferencia de centro B y radio r_2. Supongamos que P, Q y R son tres puntos comunes de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. Entonces A y B están en la mediatriz m de $\overline{PQ}$, en la mediatriz r de $\overline{QR}$ y en la mediatriz s de $\overline{PR}$. Por lo tanto, m = r = s; veamos que esto es imposible.
Si P, Q y R no son colineales, forman un triángulo que tiene tres mediatrices distintas.

Si P, Q y R son colineales y Q está entre P y R, entonces $\overline{PR} = \overline{PQ} + \overline{QR} > \overline{PQ}$, de modo que el punto medio de $\overline{PR}$ es distinto del punto medio de $\overline{PQ}$ y sus mediatrices son distintas. Los otros casos son similares. □

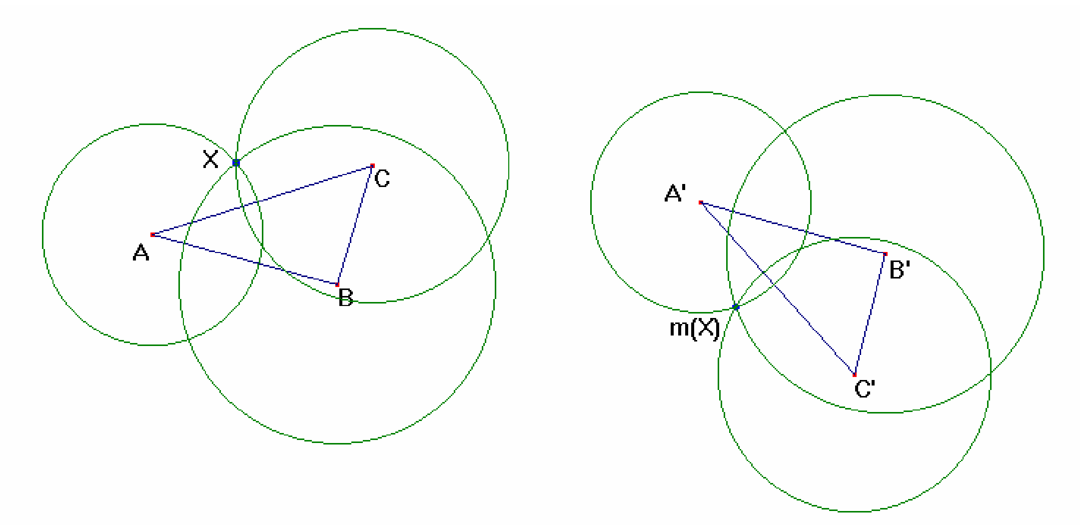
Proposición: Un movimiento m queda determinado por la imagen de tres puntos no alineados.

Dem: Sean A, B y C tres puntos no alineados y sean A' = m(A), B' = m(B), C' = m(C). Como A, B y C son los vértices de un triángulo y m conserva las distancias, entonces A', B' y C' son los vértices de un triángulo congruente al ΔABC.

Queremos demostrar que si se conocen las imágenes A', B' y C', se puede obtener la imagen de cualquier otro punto X.

Sea r_1 la distancia de A a X; r_2, la de B a X; y r_3 la de C a X. Construimos las circunferencias $\mathcal{C}_1$ de centro A y radio r_1, $\mathcal{C}'_1$ de centro A' y radio r_1, $\mathcal{C}_2$ de centro B y radio r_2, $\mathcal{C}'_2$ de centro B' y radio r_2, $\mathcal{C}_3$ de centro C y radio r_3, y $\mathcal{C}'_3$ de centro C' y radio r_3.

Las circunferencias $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ tienen intersección no vacía puesto que X está en dicha intersección, y es el único punto de intersección, pues si hubiera dos puntos de intersección, los centros A, B y C de dichas circunferencias estarían alineados, en contra de lo supuesto. Argumentando de forma análoga se demuestra que $\mathcal{C}'_1$, $\mathcal{C}'_2$ y $\mathcal{C}'_3$ no se cortan en dos puntos. Como la distancia de X a A es r_1, entonces la distancia de m(X) a A' también es r_1. Analogamente, la distancia de m(X) a B' es r_2 y la distancia de m(X) a C' es r_3. Por lo tanto, m(X) es el único punto de intersección de $\mathcal{C}'_1$, $\mathcal{C}'_2$ y $\mathcal{C}'_3$.



Proposición: Se tienen las siguientes propiedades:

1. Todo movimiento es una aplicación biyectiva. La composición de dos movimientos es otro movimiento. La aplicación identidad es un movimiento. La aplicación inversa de un movimiento es un movimiento. El conjunto de movimientos con la composición de aplicaciones tiene estructura de grupo.
2. La imagen de una recta por un movimiento es una recta, es decir, todo movimiento es una colienación.
3. La imagen por un movimiento de una semirrecta de origen A es otra semirrecta de origen la imagen de A.
4. La imagen por un movimiento de un segmento AB es otro segmento de extremos las imágenes de A y B respectivamente.
5. Resultados similares a los anteriores se obtienen para circunferencias, círculos, semiplanos, ángulos, triángulos, ...

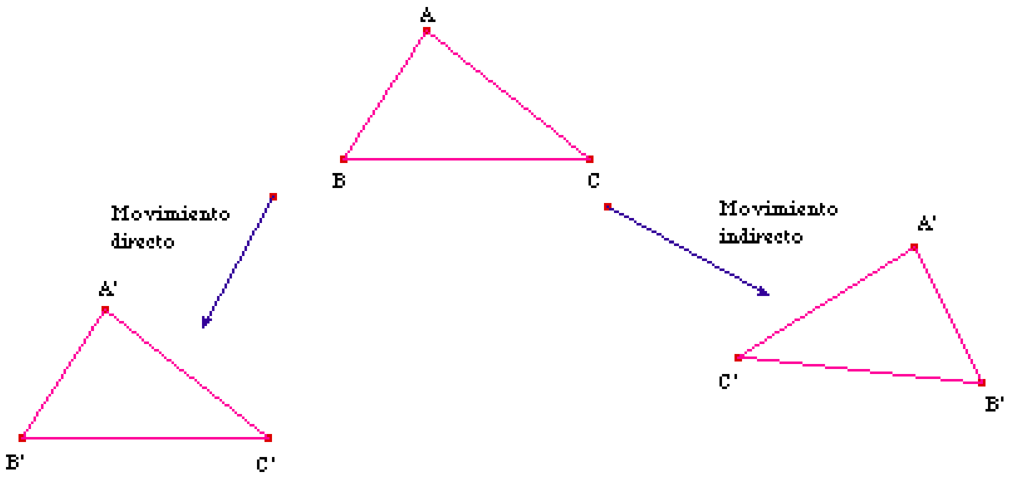
Dem: Sea m un movimiento. Como m conserva las distancias, es una aplicación inyectiva. Para ver que es sobreyectiva, tomamos tres puntos no alineados A, B y C y sus respectivas imágenes A', B' y C'. Si Y es un punto del plano que está a distancia d_1 de A', d_2 de B' y d_3 de C', sea X el punto que está a distancia d_1 de A, d_2 de B y d_3 de C. Entonces m(X) = Y.

Si m es el movimiento que aplica los puntos no alineados A, B y C, en A', B' y C', entonces la aplicación inversa m^{-1} es el movimiento que aplica A', B' y C' en A, B y C.

Sea r una recta y sean P, Q dos puntos de r. Sea R otro punto de la recta y supongamos que R está entre P y Q. Entonces $\overline{PQ} = \overline{PR} + \overline{RQ}$, de donde se deduce que $\overline{m(P)m(Q)} = \overline{m(P)m(R)} + \overline{m(R)m(Q)}$. Luego, m(P), m(Q) y m(R) están alineados y m(R) está entre m(P) y m(Q). Por lo tanto, un movimiento es una colineación que preserva la relación "estar entre". De esto se obtienen las afirmaciones 2, 3 y 4. □

Movimientos directos y movimientos indirectos

Sea m un movimiento que transforma los puntos no alineados A, B y C, en A', B' y C'. Supongamos que ΔABC está orientado de manera que cuando nos desplazamos sobre AB en el sentido que va de A hacia B, el vértice C queda en el semiplano de la izquierda (o que el recorrido A-B-C sobre la circunferencia circunscrita se realiza en sentido contrario de las agujas del reloj). Estas definiciones de *orientación* solo valen tener una idea intuitiva, pero son imprecisos ya que se apoyan en convenciones como derecha e izquierda, o el sentido de las agujas del reloj, que no han sido definidos matemáticamente. Una definición más apropiada de orientación excede el objetivo de estas notas. Diremos que m es un *movimiento directo* si ΔA'B'C' está orientado de la misma manera que ΔABC y diremos que m es un *movimiento indirecto* si ΔA'B'C' tiene la orientación opuesta. El conjunto de los movimientos directos, con la composición, tiene estructura de grupo. En el trabajo para el alumno veremos los conceptos de movimiento par y movimiento impar, que están relacionados con los de movimiento directo e indirecto.



3. TRASLACIONES, GIROS Y SIMETRIAS

Vectores

Dados dos puntos P y Q existen dos orientaciones posibles del segmento $\overline{PQ}$, de P hacia Q o de Q hacia P. En el primer caso se obtiene el *vector* $\overrightarrow{PQ}$ y en el segundo el vector $\overrightarrow{QP}$. En otras palabras, en $\overrightarrow{PQ}$ ordenamos los puntos del segmento de forma que P es el primero y Q es el último.

Llamaremos *módulo* del vector $\overrightarrow{PQ}$ a la longitud del segmento $\overline{PQ}$, y *dirección* del vector $\overrightarrow{PQ}$ a la dirección de la recta que lo contiene (dos rectas tienen igual dirección si son paralelas o iguales). El *sentido* del vector $\overrightarrow{PQ}$ es la orientación que lo define, y dados dos vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ con igual dirección se dice que tienen igual sentido si se da alguno de los dos casos siguientes.

- Las rectas PQ y RS son distintas y Q y S están en el mismo semiplano de los dos que determina la recta PR.
- Las rectas PQ y RS son iguales y los dos tienen el mismo sentido que un vector $\overrightarrow{TV}$ de la misma dirección que ambos y que no esté sobre la misma recta.

Dos vectores diremos que son *equipolentes* si tienen igual dirección, módulo y sentido.

Traslaciones

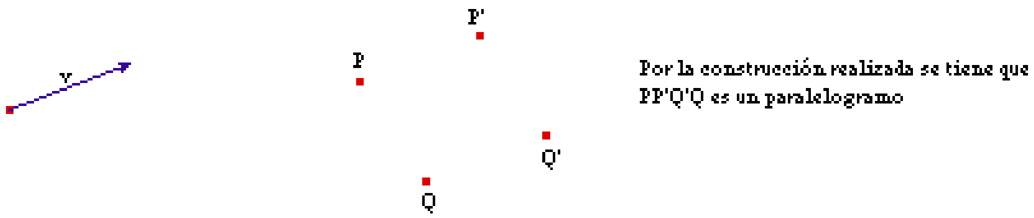
Dado un vector $v = \overrightarrow{PQ}$ del plano, llamamos *traslación* de vector v a la transformación τ_v del plano en si mismo definida por $\tau_v(X) = X'$ tal que el vector $\overrightarrow{XX'}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son equipolentes.

Observar que dos vectores equipolentes definen la misma traslación.

Proposición: t_v es un movimiento directo, y τ_v o τ_w es una traslación.

Dem.: se deja como ejercicio.

Además de las propiedades relativas a movimientos, para las traslaciones se tiene que la imagen de una recta es otra de la misma dirección. Una recta y su imagen por una traslación coinciden cuando el vector de la traslación y dicha recta definen igual dirección.



La demostración de la proposición anterior está basada en la situación de la figura y otras similares.

Giros

Sea O un punto fijo del plano y sea α un número real tal que $0 \leq \alpha \leq 360$. Se llama *giro* (o *rotación*) de centro O y amplitud $+\alpha$ a la aplicación del plano en si mismo que a cada punto $X \neq O$ le asocia el punto X' determinado por las condiciones siguientes: los segmentos $\overline{OX}$ y $\overline{OX'}$ son congruentes, el ángulo $X\hat{O}X'$ es de amplitud α, y la orientación definida en el plano cuando vamos de OX a OX' es positiva (contraria a la de las agujas del reloj). El punto O lo deja fijo. Tal aplicación la denotaremos por $g_{O,+\alpha}$. La aplicación denotada por $g_{O,-\alpha}$ sólo difiere de la anterior en la orientación que para ir de OX a OX' se introduce en el plano, que en este caso es negativa (la de las agujas del reloj).

Proposición: Cualquier giro es un movimiento directo.

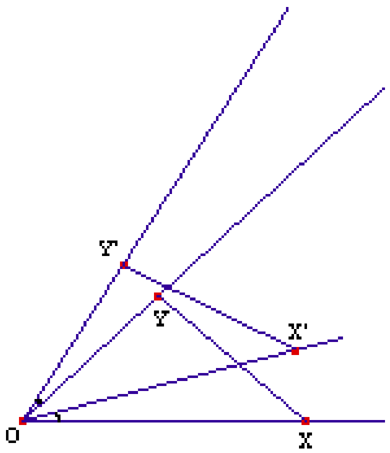
Dem.: Considero $g_{O,+\alpha}$. Si X es otro punto $X \neq O$ y $X' = g_{O,+\alpha}(X)$ entonces $\overline{OX} = \overline{OX'}$.

Sean $X \neq Y$ dos puntos del plano, $X \neq O$, $Y \neq O$, $X' = g_{O,+\alpha}(X)$, $Y' = g_{O,+\alpha}(Y)$. Entonces $\overline{OX} = \overline{OX'}$, $\overline{OY} = \overline{OY'}$ y $X\hat{O}X' = Y\hat{O}Y'$. Consideramos tres casos:

1) Si las semirrectas O_Y y $O_{Y'}$ no están entre los lados de $X\hat{O}X'$, entonces

$$Y'\hat{O}X' = Y'\hat{O}X + X\hat{O}X' = Y'\hat{O}X + Y\hat{O}Y' = Y\hat{O}X.$$

Luego $\Delta OXY = \Delta OX'Y'$ de donde $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$.



Los triángulos OXY y OX'Y' son congruentes

2) Si alguna de las semirrectas O_Y, $O_{Y'}$ está entre los lados de $X\hat{O}X'$, entonces

$$Y\hat{O}Y' = Y\hat{O}X + X\hat{O}Y', \quad X\hat{O}X' = X\hat{O}Y' + Y'\hat{O}X'.$$

Como $X\hat{O}X' = Y\hat{O}Y'$, resulta $Y\hat{O}X = Y'\hat{O}X'$ y nuevamente $\Delta OXY = \Delta OX'Y'$. Luego $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$.

3) Si O, X, Y están alineados, supongamos que X está entre O e Y. Entonces $\overline{OY} = \overline{OX} + \overline{XY}$ y $\overline{OY'} = \overline{OX'} + \overline{X'Y'}$

de donde se deduce que $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$.

Por lo tanto, $g_{O,+\alpha}$ es un movimiento.

Además, de los casos 2) y 3) se deduce que es un movimiento directo. □

Propiedades

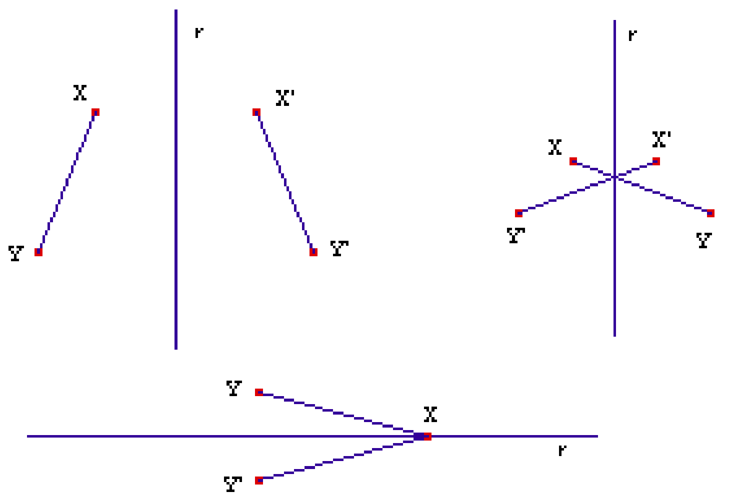
1) La composición de dos giros de centro O es otro giro de centro O.
2) Un giro de amplitud no nula deja fijo un único punto, el centro O. Se puede demostrar que si un movimiento deja un único punto fijo, entonces es un giro.

Simetrías axiales o reflexiones

Sea r una recta del plano, se llama *simetría axial* o *reflexión* de eje r a la aplicación del plano en si mismo que deja fijo todo punto de r, y a todo punto X que no está en r le asigna un punto X' tal que r es la mediatriz del segmento $\overline{XX'}$. Tal aplicación la denotaremos por σ_r.

Proposición: Una simetría axial es un movimiento indirecto.

Dem: Dado un segmento s y su imagen s' por la simetría, debemos ver que s y s' son congruentes. La demostración completa debería analizar todos los casos posibles. Algunos aparecen en la figura siguiente.



El hecho de que el movimiento anterior es indirecto lo vamos a admitir. □

En una simetría axial los únicos puntos fijos son los del eje r.

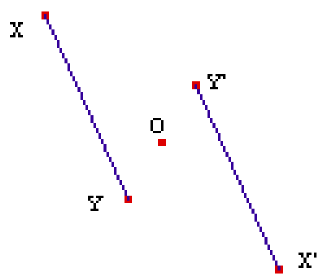
¿Qué resulta de componer una simetría axial consigo misma?, ¿y de componer dos simetrías de ejes paralelos?, ¿y de componer dos simetrías de ejes secantes?

Dada una figura plana F, se dice que la recta r es un *eje de simetría* de F si $\sigma_r(F) = F$.
Un triángulo isósceles tiene un eje de simetría, un triángulo equilátero tiene tres ejes de simetría y un cuadrado tiene cuatro ejes de simetría. ¿Cuántos ejes de simetría tiene un polígono regular?, ¿y una circunferencia?

Simetrías centrales

El movimiento que vamos a definir a continuación es, como podrá apreciarse un caso particular de giro.

Dado un punto del plano O, se llama *simetría central* de centro O a la aplicación del plano en si mismo que deja O fijo y a cualquier otro punto $X \neq O$ le asocia el punto X' tal que O es punto medio del segmento $\overline{XX'}$. La denotamos por σ_O.



La figura anterior puede ayudar a la hora de probar que toda recta que pasa por O se transforma por σ_O en ella misma; toda recta que no pasa por O se transforma por σ_O en una paralela a ella, de tal forma que el centro de simetría equidista de ambas rectas.

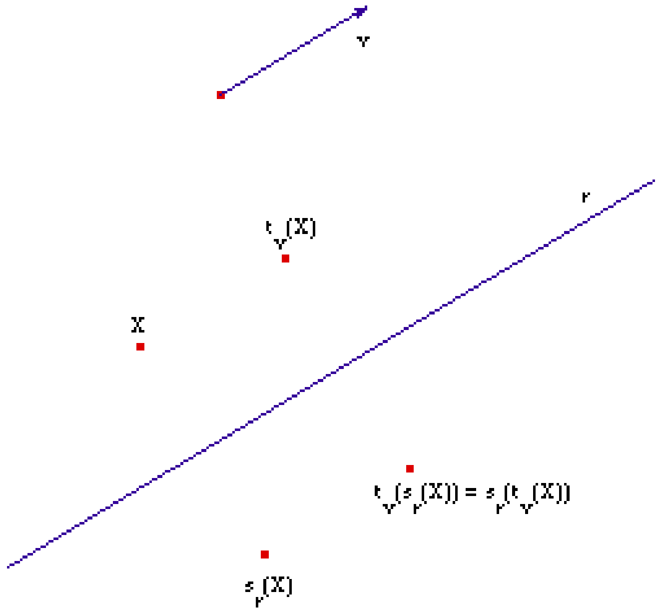
¿Qué resulta de componer una simetría central consigo misma?, ¿y de componer dos de distinto centro?

Dada una figura plana F, el punto O se dice *centro de simetría* de F si $\sigma_O(F) = F$.

Una circunferencia tiene su centro como centro de simetría. Cualquier polígono regular con un número par de lados tiene centro de simetría en el centro del polígono.

Simetrías deslizantes

Sea r una recta y v = $\overrightarrow{AB}$ un vector con igual dirección que r. Se llama *simetría deslizante* de eje r y vector v a la composición de τ_v y σ_r. El orden en que se realice la composición es independiente porque $\tau_v \circ \sigma_r = \sigma_r \circ \tau_v$ como es fácil comprobar.



Cuando el punto X no está sobre r, tanto la figura $X\tau_v(X)\sigma_r(\tau_v(X))\sigma_r(X)$ como la figura $X\sigma_r(X)\tau_v(\sigma_r(X))\tau_v(X)$ son rectángulos. Como tienen tres vértices en común, el cuarto ha de coincidir: $\tau_v(\sigma_r(X)) = \sigma_r(\tau_v(X))$. Si X está en r, ambas aplicaciones lo transforman en X' tal que $\overrightarrow{XX'}$ y $\overrightarrow{AB}$ son vectores equipolentes.

Observaciones

1. El punto medio del segmento cuyos extremos son un punto y su transformado por la simetría deslizante es un punto de la recta r.
2. En una simetría deslizante no hay puntos fijos.
3. La simetría deslizante es un movimiento indirecto.

¿Cómo conocer de qué tipo de movimiento se trata?

No entraremos a demostrar el resultado que se recoge en la siguiente proposición, pero haremos uso de él siempre que sea necesario.

Proposición: Todo movimiento directo es un giro o una traslación, y todo movimiento indirecto es una simetría axial o una simetría deslizante.

Dada una figura F y su transformada F' por un movimiento, para determinar qué movimiento transforma una en otra podemos seguir los siguientes pasos:

1.- Marcar en F tres puntos no alineados A, B, C y en F' sus transformados A', B', C'. Si el sentido de recorrido determinado por la secuencia ABC es el mismo que el determinado por la secuencia A'B'C', entonces el movimiento es directo, en caso contrario es indirecto.

2.- Si el movimiento es directo, es un giro o una traslación.

2.1. Si los vectores $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ y $\overrightarrow{CC'}$ son equipolentes, se trata de una traslación de vector cualquiera de esos vectores.

2.2. Si los vectores $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ y $\overrightarrow{CC'}$ no son equipolentes entonces se trata de un giro. El centro de giro O vendrá determinado por la intersección de las mediatrices de los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$, y el ángulo de giro será el $A\hat{O}A'$ orientado en sentido contrario a las agujas del reloj.

3. Si el movimiento es inverso será simetría axial o deslizante, y en cualquiera de los casos el eje se determinará como la recta r que une los puntos medios de los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$. Si A" es el transformado de A por la simetría axial de eje r y A" = A', entonces el movimiento es dicha simetría axial. En caso contrario, es una simetría deslizante de eje r y vector $\overrightarrow{A''A'}$.

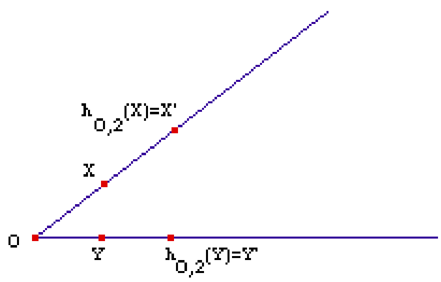
4. HOMOTECIA E INVERSION

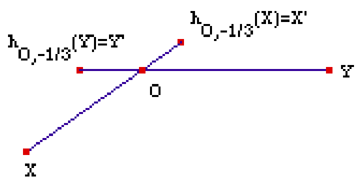
En el apartado anterior hemos tratado transformaciones en el plano que conservan las distancias. En el apartado que ahora comenzamos nos vamos a dedicar al estudio de dos tipos de transformaciones planas que en general no gozan de la propiedad antes señalada. Se trata de homotecias e inversiones. Entre ellas hay una diferencia esencial: las primeras son colineaciones, las segundas no.

Homotecia

Digamos que las homotecias son las transformaciones que, aun cuando no conserven las distancias, sí conservan las formas, porque respetan las proporciones. Así, por una homotecia una figura se transformará en otra figura semejante a la anterior.

Sea O un punto del plano, y λ un número real no nulo. Se llama *homotecia* de centro O y razón λ a la aplicación del plano en si mismo que deja fijo el punto O y a cualquier otro punto X distinto de O le asigna un punto X' de la recta OX, tal que $\overline{OX'} = |\lambda|\ \overline{OX}$ y X' está en la semirrecta O_X si λ es positivo y en la semirrecta complementaria a O_X si λ es negativo. Tal aplicación la denotaremos por $h_{O,\lambda}$.





Consecuencias

$h_{O,1}$ es la aplicación identidad. Dicha homotecia junto con $h_{O,-1}$ son las únicas que conservan las distancias.

La composición de dos homotecias con igual centro es otra homotecia del mismo centro y razón el producto de las razones.

Si $\lambda \neq 1$, el único punto fijo de $h_{O,\lambda}$ es O.

Todas las rectas que pasan por el centro de la homotecia son invariantes por la misma (pero no de puntos fijos). Cualquier otra recta se transforma en una paralela a ella.

Las homotecias conservan ángulos y proporciones.

Inversión

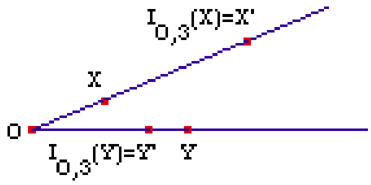
Sea O un punto del plano y λ un número real no nulo. Se llama *inversión* de centro o polo O y razón o potencia λ a la aplicación del plano sin el punto O, en si mismo, tal que a cualquier punto X le asigna un punto X' definido por las siguientes condiciones:

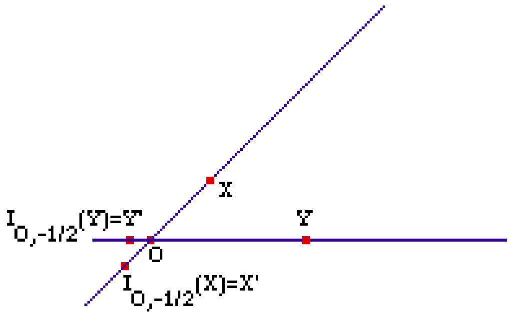
i) X' pertenece a la recta OX .

ii) $\overline{OX'}\cdot\overline{OX} = |\lambda|$

iii) X' está en la semirrecta O_X si λ es positivo y en la semirrecta complementaria a O_X si λ es negativo.

Tal aplicación la denotaremos por $I_{O,\lambda}$.





Consecuencias

Si X' es la imagen de X por una inversión, X es la imagen de X' por dicha inversión. Por tanto la composición de una inversión consigo misma es la aplicación identidad.

Si $\lambda > 0$, entonces los puntos fijos por $I_{O,\lambda}$ son los de la circunferencia de centro O y radio λ.

Si X' e Y' son las imágenes de X e Y por $I_{O,\lambda}$ y O, X, Y no están alineados, entonces los ángulos $O\hat{X}Y$ y $O\hat{Y'}X'$ son congruentes.

Si X' e Y' son las imágenes de X e Y por $I_{O,\lambda}$ y O, X, Y no están alineados, entonces Y' pertenece a la circunferencia determinada por X, X' e Y. Si O es un punto exterior a una circunferencia ***C*** y la potencia de O respecto de ***C*** es λ, entonces la imagen de ***C*** por $I_{O,\lambda}$ es la propia ***C***.

Las rectas que pasan por el polo de inversión son invariantes.

Teorema: La imagen por $I_{O,\lambda}$ de una recta r que no pasa por O, es una circunferencia ***C*** que pasa por O, sin el punto O y cuya tangente en O es paralela a r.

Dem.: Sea P la proyección de O sobre r, y P' la imagen de P por la inversión. Sea X un punto de r distinto de P, y X' su imagen. Como el ángulo $O\hat{P}X$ es recto, también lo es, según una de las consecuencias anteriores, el ángulo $O\hat{X'}P'$. Luego X' está sobre la circunferencia ***C*** de diámetro OP'. Así pues, cuando X recorre r, X' recorrerá ***C*** (excluido O). Como la tangente a ***C*** en O es perpendicular al diámetro OP' y OP' es perpendicular a r, dicha tangente y r son paralelas. □

La demostración del resultado anterior sugiere un método de construcción de ***C***.

TRABAJO PARA EL ALUMNO

SIMETRÍAS Y FRISOS

GRUPOS

Definición: Sea G un conjunto con una operación $\star$ que asocia a cada par a, b de elementos de G otro elemento $a \star b$ de G. Se dice que G es un *grupo* si se cumplen las siguientes propiedades:

Elemento identidad: Existe i en G tal que $a \star i = i \star a = a$, para todo a de G. Un tal i se lama identidad de G.

Elemento inverso: Para cada a en G existe b en G tal que $a \star b = b \star a = i$. Se dice que b es el inverso de a y se escribe $b = a^{-1}$.

Propiedad asociativa: $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$, para todo a, b y c en G.

Un grupo se dice *abeliano* o *conmutativo* si además la operación es conmutativa, es decir, $a \star b = b \star a$, para todo a, b en G.

Ejemplos

1. El conjunto **Z** de los números enteros con la operación suma + es un grupo abeliano. El elemento identidad es el 0. El inverso de un entero a es $-a$. La suma de enteros es asociativa y conmutativa
2. El conjunto de las matrices reales $n \times n$ inversibles, con la operación producto de matrices es un grupo llamado grupo lineal GL(n, **R**). No es un grupo abeliano.

Definición: Un subconjunto H de un grupo G es un subgrupo de G si

(1) para todo a, b en H se cumple que $a \star b$ está en H,

(2) la identidad i está en H,

(3) para todo a en H, a^{-1} está en H.

Un subgrupo es un grupo.

Ejemplos

1. Los números pares forman un subgrupo de **Z** con la suma.
2. Las matrices reales $n \times n$ de determinante 1 forman un subgrupo de GL(n, **R**).

Definición: Si un grupo G tiene n elementos se dice que es *finito de orden n*.

Si para un elemento a de un grupo G existe un número natural k, que es el más pequeño tal que $a^k = \underbrace{a \star a \star \ldots\ldots \star a}_{k \text{ veces}} = i$, se dice que a tiene *orden* k.

GRUPOS DE TRANSFORMACIONES

Dadas dos transformaciones f, g, la *composición* $g \circ f$ es la transformación $g \circ f\,(P) = g(f(P))$ para todo punto P del plano.

El conjunto $\mathcal{T}$ de todas las transformaciones del plano forman un grupo con la operación de composición. El elemento identidad es la transformación identidad:

$$f \circ i = i \circ f = f, \text{ para toda transformación } f.$$

El inverso de una transformación f es la transformación inversa f^{-1}:

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i.$$

La composición de transformaciones es asociativa:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f, \text{ para todo } f, g, h \text{ en } \mathcal{T}.$$

La composición de transformaciones no es conmutativa en general, es decir, en muchos casos $g \circ f \neq f \circ g$.

[Dar un ejemplo]

[Determinar lo que ocurre cuando se componen:

a) Dos traslaciones
b) Dos giros
c) Dos reflexiones
d) Dos reflexiones deslizantes
e) Una traslación y un giro
f) Un giro y una traslación
g) Un traslación y una reflexión
h) Una reflexión y una traslación
i) Un giro y una reflexión
j) Una reflexión y un giro

En cada caso estudiar todas las posibilidades.]

[¿Cuál es la transformación inversa de una traslación? ¿de un giro? ¿de una reflexión? ¿de una simetría deslizante?]

Ejemplo: Una rotación de 60º con centro en un punto P es una transformación de orden 6.

Las rotaciones de 60º, 120º, 180º, 240º y 300º con respecto a un punto P, junto con la identidad, forman un grupo de orden 6, de la forma $\{\rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5, \rho^6 = i\}$.

Definición: Un grupo G es un *grupo cíclico* con *generador* f si $G = \{i, f, f^2, f^3, \dots, f^{n-1}\}$. Se escribe $G = \langle f \rangle$.

Un *grupo cíclico infinito* con generador f es de la forma $G = \{i, f, f^2, f^3, \dots\dots\}$, es decir, todos los elementos distintos de la identidad son potencias de f y no existe ningún natural n tal que $f^n = i$.

Ejemplo: El grupo C_4 generado por la rotación de 90º con centro en un punto O, ρ, es un grupo cíclico de orden 4. Su tabla de composición es

	i	ρ	ρ^2	ρ^3
i	i	ρ	ρ^2	ρ^3
ρ	ρ	ρ^2	ρ^3	i
ρ^2	ρ^2	ρ^3	i	ρ
ρ^3	ρ^3	i	ρ	ρ^2

Ejemplo: Considerar dos rectas v y h, perpendiculares, que se cortan en un punto O. Sea V_4 formado por la identidad i, la simetría central σ_O y las simetrías axiales σ_v y σ_h. Comprobar que V_4 es un grupo. Su tabla de composición es

	i	σ_h	σ_v	σ_O
i	i	σ_h	σ_v	σ_O
σ_h	σ_h	i	σ_O	σ_v
σ_v	σ_v	σ_O	i	σ_h
σ_O	σ_O	σ_v	σ_h	i

V_4 es abeliano, pero no es cíclico.

SIMETRIAS

Definiciones: Una recta m es un *eje de simetría* de un conjunto de puntos S si $\sigma_m(S) = S$.

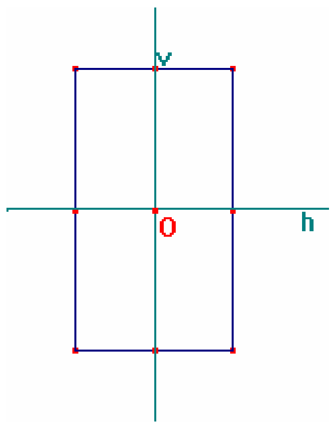
Un punto P es un *centro de simetría* de un conjunto de puntos S si $\sigma_P(S) = S$.

Una isometría f es una *simetría* de un conjunto de puntos S si f(S) = S.

Teorema: El conjunto de todas las simetrías de un conjunto de puntos S del plano es un grupo, llamado el *grupo de simetrías* de S.

Ejemplo: Un rectángulo tiene dos ejes de simetría, las rectas que unen los puntos medios de cada par de lados opuestos, y tiene un centro de simetría, el punto de corte de dichas rectas.

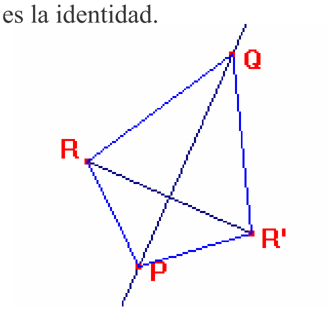
[Comprobar que el grupo de simetrías del rectángulo es V_4]



Teorema: Si una isometría fija los puntos P y Q, entonces fija todos los puntos de la recta PQ.
[Demostrarlo]

Teorema: Una isometría que fija dos (o más) puntos es una reflexión o es la identidad.

Dem.: Sea f una isometría, f(P) = P, f(Q) = Q. Entonces f fija la recta m = PQ. Supongamos que f ≠ i. Sea R un punto que no está en m y sea R' = f(R). Debe ser R' ≠ R, pues como P, Q y R no son colineales, si fuera R' = R, resultaría f = i. Como f es isometría, $\overline{PR'} = \overline{PR}$, $\overline{QR'} = \overline{QR}$. Entonces P y Q están en la mediatriz de $\overline{RR'}$. Por lo tanto, $f = \sigma_m$. □



Teorema: Una isometría que solo fija un punto es la composición de dos reflexiones.

Dem.: Supongamos que la isometría f fija únicamente el punto C. Sea P distinto de C, f(P) = P'. Sea m la mediatriz de $\overline{PP'}$. Como $\overline{CP} = \overline{CP'}$, C está en m. Entonces $\sigma_m(C) = C$ y $\sigma_m(P') = P$, de donde $\sigma_m \circ f(C) = \sigma_m(C) = C$ y $\sigma_m \circ f(P) = \sigma_m(P') = P$. Por el teorema anterior, $\sigma_m \circ f = i$, o $\sigma_m \circ f = \sigma_h$ donde h = CP. Pero $\sigma_m \circ f$ no puede ser la identidad, pues en ese caso sería $f = \sigma_m$ y fijaría más de un punto. Por lo tanto, $\sigma_m \circ f = \sigma_h$ y componiendo con σ_m resulta $f = \sigma_m \circ \sigma_h$. □

Teorema: Una isometría es la composición de tres o menos reflexiones.

Dem.: La identidad es la composición de dos reflexiones. Sea f una isometría que no es la identidad, que aplica un punto P en un punto distinto Q. Sea m la mediatriz de $\overline{PQ}$. Entonces $g = \sigma_m \circ f$ fija el punto P. Si P es el único punto fijo de g, entonces g es composición de dos reflexiones: $g = \sigma_r \circ \sigma_h$. Componiendo con σ_m resulta $f = \sigma_m \circ \sigma_r \circ \sigma_h$. Si g fija otro punto además de P, entonces g es la identidad, en cuyo caso $f = \sigma_m$, o $g = \sigma_h$, en cuyo caso $f = \sigma_m \circ \sigma_h$. □

ISOMETRÍAS PARES

La composición de dos reflexiones es una traslación o una rotación. Considerando los puntos fijos se ve que una traslación nunca es igual a una reflexión.

Definición: Una isometría que es composición de un número par de reflexiones se llama *isometría par* y una isometría que es composición de un número impar de reflexiones se llama *isometría impar*.

Esta definición no tiene sentido si no se demuestra que una isometría no puede ser par e impar al mismo tiempo.

[¿Qué relación existe entre las isometrías pares y las isometrías directas? ¿y las indirectas?]

Teorema: Si a, b, c son tres rectas paralelas, entonces $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$ es una reflexión por una recta paralela a las anteriores.
[Demostrarlo]

Teorema: Si a, b, c son tres rectas que pasan por un punto C, entonces $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$ es una reflexión por una recta que pasa por C.
[Demostrarlo]

Lema: Dado un punto P y dos rectas a y b, existen una recta c que pasa por P y una recta d, tales que $\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_d \circ \sigma_c$.

Dem.: Si a ∥ b sea c la recta paralela a a que pasa por P. Entonces a, b y c son paralelas y $\sigma_b \circ \sigma_a \circ \sigma_c = \sigma_d$ para alguna recta d.
Si a y b se cortan en un punto C, sea c la recta que pasa por P y C. Como las tres rectas pasan por C, existe una recta d tal que $\sigma_b \circ \sigma_a \circ \sigma_c = \sigma_d$. □

Teorema: La composición de cuatro reflexiones es composición de dos reflexiones.

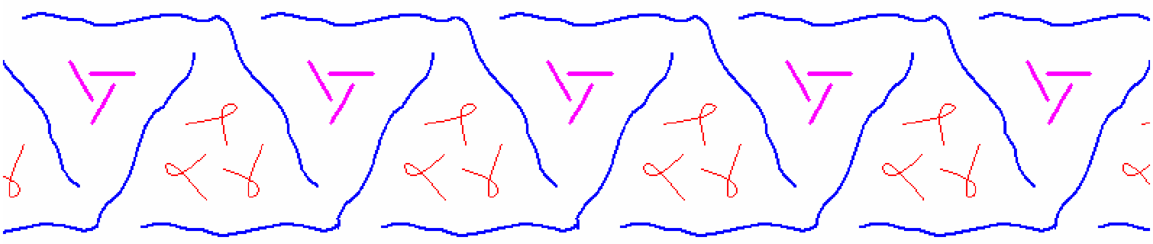
Dem.: Consideremos $\sigma_s \circ \sigma_r \circ \sigma_q \circ \sigma_p$. Sea P un punto en la recta p. Por el lema anterior existen rectas u y v tales que $\sigma_r \circ \sigma_q = \sigma_v \circ \sigma_u$ y P está en u. Usando otra vez el lema, existen rectas t y m tales que $\sigma_s \circ \sigma_v = \sigma_m \circ \sigma_t$ y P está en t. Como p, u y t pasan por P, existe una recta l tal que $\sigma_t \circ \sigma_u \circ \sigma_p = \sigma_l$. Por lo tanto

$$\sigma_s \circ \sigma_r \circ \sigma_q \circ \sigma_p = \sigma_s \circ \sigma_v \circ \sigma_u \circ \sigma_p = \sigma_m \circ \sigma_t \circ \sigma_u \circ \sigma_p = \sigma_m \circ \sigma_l. \ \square$$

Aplicando repetidamente este teorema, cualquier composición de un cierto número n de reflexiones puede reducirse a una composición de dos reflexiones, si n es par, o cuando n es impar, a una reflexión o a la composición de tres reflexiones. Además, la composición de dos reflexiones es una traslación o un giro, de modo que nunca puede ser igual a una reflexión, ni tampoco a la composición de tres reflexiones.

Teorema: Una isometría par es composición de dos reflexiones. Una isometría impar es una reflexión o la composición de tres reflexiones. Ninguna isometría es simultáneamente par e impar.

Teorema: Las isometrías pares forman un grupo.
[Demostrarlo]



FRISOS

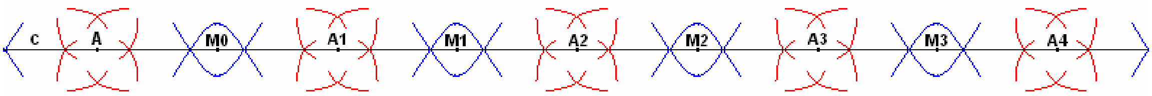
Teorema: (1) Si P es un centro de simetría de S y f es una simetría de S, entonces f(P) es un centro de simetría de S.
(2) Si m es un eje de simetría de S y f es una simetría de S, entonces f(m) es un eje de simetría de S.

Definición: Sea c una recta. Un grupo de isometrías que deja fija la recta c y cuyas traslaciones forman un grupo cíclico infinito se llama *grupo de friso* con *centro* c.

LOS SIETE GRUPOS DE FRISOS

Vamos a determinar todos los grupos de friso $\mathcal{F}$ posibles. Comenzamos por escoger un punto A en la recta c de la siguiente manera. Si $\mathcal{F}$ contiene simetrías centrales, A se elige como el centro de una simetría central; si $\mathcal{F}$ no tiene simetrías centrales pero tiene reflexiones por rectas perpendiculares a c, A se coge como la intersección de una de esas rectas con c; si no, se coge cualquier punto A de c.

Sea τ el generador del grupo de traslaciones de $\mathcal{F}$. Sea $A_i = \tau^i(A)$. En particular, $A_0 = A$. Sea M_0 el punto medio de A_0 y A_1 , y sea $M_i = \tau^i(M_0)$. Entonces M_i es el punto medio de A_i y A_{i+1}, y también es el punto medio de A_0 y A_{2i+1}.



I. El caso más sencillo es que $\mathcal{F}$ se reduzca al grupo generado por τ. Sea $\mathcal{F}_1 = <\tau>$. Un friso cuyo grupo de isometrías es $\mathcal{F}_1$ no tiene centros de simetría, no tiene ejes de simetría y no se preserva por una simetría deslizante.

/____ /____ /____ /____
• o • o • o • o •
A_0 M_0 A_1 M_1 A_2 M_2 A_3 M_3 A_4

Los puntos A_i, M_i de la figura no son necesariamente parte del dibujo del friso.

II. Supongamos ahora que $\mathcal{F}$ tiene alguna simetría central. Entonces σ_A está en $\mathcal{F}$. También σ_{Mo} está en $\mathcal{F}$ pues $\sigma_{Mo} = \tau \circ \sigma_A$. Entonces $\mathcal{F}$ contiene todas las simetrías centrales σ_{Ai} y σ_{Mi}. Supongamos que P es el centro de una simetría central en $\mathcal{F}$. Entonces, la traslación $\sigma_P \circ \sigma_A$ está en $\mathcal{F}$, de donde $\sigma_P \circ \sigma_A(A) = A_n$ para algún n. Entonces $\sigma_P(A) = A_n$ y P es el punto medio de A y A_n. Por lo tanto, σ_{Ai} y σ_{Mi} son las únicas simetrías centrales que están en

$\mathcal{F}$. Sea $\mathcal{F}_2 = < \tau, \sigma_A >$. Todo elemento de $\mathcal{F}_2$ es de la forma τ^i, o de la forma $\sigma_A \circ \tau^i$. Un friso cuyo grupo de isometrías es $\mathcal{F}_2$ tiene centros de simetría, pero no tiene ningún eje de simetría.

```
/———     /———     /———     /———
•    o    •    o    •    o    •    o    •
     ———/      ———/      ———/      ———/
```

III. Supongamos ahora que $\mathcal{F}$ contiene, además de τ, alguna reflexión. Como las transformaciones de $\mathcal{F}$ fijan c, las únicas reflexiones posibles son con respecto a c o con respecto a una recta m perpendicular a c. Sea $\mathcal{F}_1^{\,1} = < \tau, \sigma_c >$. Como $\tau \circ \sigma_c = \sigma_c \circ \tau$, entonces $\mathcal{F}_1^{\,1}$ es abeliano y sus elementos son de la forma $\sigma_c^{\,j} \circ \tau^i$. Para cada $n \neq 0$, $\mathcal{F}_1^{\,1}$ contiene la simetría deslizante de eje c y vector $\overrightarrow{AA_n}$. Un friso que tiene $\mathcal{F}_1^{\,1}$ como grupo de simetría no tiene centros de simetría y el centro c es un eje de simetría.

```
/———     /———     /———     /———
•    o    •    o    •    o    •    o    •
\———     \———     \———     \———
```

IV. Sea $\mathcal{F}_2^{\,1} = < \tau, \sigma_c, \sigma_A >$. Como $\tau \circ \sigma_c = \sigma_c \circ \tau$, y $\sigma_A \circ \sigma_c = \sigma_c \circ \sigma_A$, los elementos de $\mathcal{F}_2^{\,1}$ son de la forma $\sigma_c^{\,k} \circ \sigma_A^{\,j} \circ \tau^i$. Para cada $n \neq 0$, $\mathcal{F}_2^{\,1}$ contiene la simetría deslizante $\sigma_c \circ \tau^n$. También contiene $\tau^{2i} \circ \sigma_A \circ \sigma_c$ que es la reflexión por la recta perpendicular a c que pasa por A_i, y contiene $\tau^{2i+1} \circ \sigma_A \circ \sigma_c$ que es la reflexión por la perpendicular a c que pasa por M_i. Un friso que tiene $\mathcal{F}_2^{\,1}$ como grupo de simetría tiene centros de simetría y el centro c es un eje de simetría.

```
/——— ———\ /——— ———\ /——— ———\ /——— ———\
•    o    •    o    •    o    •    o    •
\——— ———/ \——— ———/ \——— ———/ \——— ———/
```

V. Supongamos ahora que $\mathcal{F}$ no tiene simetrías centrales pero contiene una reflexión por una recta m perpendicular a c. Supongamos que m pasa por A. Entonces $\mathcal{F}$ contiene $\tau^{2i} \circ \sigma_m$ que es la reflexión por la perpendicular a c que pasa por A_i, y contiene $\tau^{2i+1} \circ \sigma_m$ que es la reflexión por la perpendicular a c que pasa por M_i. [Demostrar que estas son las únicas reflexiones de $\mathcal{F}$, si $\mathcal{F}$ no tiene simetrías centrales.] Sea $\mathcal{F}_1^{\,2} = < \tau, \sigma_m >$. Como $\tau \circ \sigma_m = \sigma_m \circ \tau^{-1}$, los elementos de $\mathcal{F}_1^{\,2}$ son de la forma $\sigma_m^{\,j} \circ \tau^i$. $\mathcal{F}_1^{\,2}$ no contiene σ_c . Un friso que tiene $\mathcal{F}_1^{\,2}$ como grupo de simetría no tiene centros de simetría, tiene ejes de simetría, pero el centro c no es eje de simetría.

```
/——— ———\ /——— ———\ /——— ———\ /——— ———\
•    o    •    o    •    o    •    o    •
```

VI. Supongamos ahora que $\mathcal{F}$ contiene una simetría central y la reflexión por una recta q perpendicular a c en un punto que no es A_i ni M_i. Entonces q debe ser la mediatriz de algún segmento $\overline{AM_i}$. Luego, $\mathcal{F}$ contendrá la reflexión con respecto a la mediatriz de $\overline{AM_i}$ para todo i. En particular, $\mathcal{F}$ contiene a σ_p con p la mediatriz de $\overline{AM}$. Si a es la perpendicular a c en A, σ_p y σ_a no pueden estar ambas en $\mathcal{F}$ pues la traslación $\sigma_p \circ \sigma_a$ aplicaría A en M, lo que contradice la definición de M. Además, como $\sigma_p \circ \sigma_a = \sigma_p \circ \sigma_c \circ \sigma_A$, tampoco pueden estar σ_p y σ_c juntos en $\mathcal{F}$.

Sea $\mathcal{F}_2^{\,2} = < \tau, \sigma_A, \sigma_p >$. Observe que la simetría deslizante $\gamma = \sigma_p \circ \sigma_A$ está en $\mathcal{F}_2^{\,2}$. Como $\tau = \gamma^2$ y $\sigma_p = \gamma \circ \sigma_A$, resulta $\mathcal{F}_2^{\,2} = < \gamma, \sigma_A >$. Un friso que tiene $\mathcal{F}_2^{\,2}$ como grupo de simetrías tiene centros de simetría, ejes de simetría, pero el centro c no es eje de simetría.

```
 /——\      /——\      /——\      /——\
•    o    •    o    •    o    •    o    •
      \——/      \——/      \——/      \——/
```

VII. Algunos de los grupos que hemos visto contenían simetrías deslizantes. Veamos si hay algún otro grupo de friso que contenga una simetría deslizante α. Entonces α tiene eje c y α^2 es una traslación que fija c. Hay dos casos posibles, $\alpha^2 = \tau^{2n}$ o $\alpha^2 = \tau^{2n+1}$, para algún entero n. Si $\alpha^2 = \tau^{2n}$ entonces $\alpha = \sigma_c \circ \tau^n$. En este caso $\mathcal{F}$ contiene σ_c y $\sigma_c \circ \tau^j$ para todo j. Si $\mathcal{F}$ contiene una simetría central, será $\mathcal{F}_1^1$, si no será $\mathcal{F}_2^1$. Supongamos ahora que $\alpha^2 = \tau^{2n+1}$. Entonces $(\tau^{-n} \circ \alpha)^2 = \tau$. Sea $\gamma = \tau^{-n} \circ \alpha$. Entonces γ es una isometría impar cuyo cuadrado es τ. Por tanto, γ es la simetría deslizante de eje c que lleva A a M. Como $\gamma^{2m} = \tau^m$ y $\gamma^{2m+1} = \tau^m \circ \gamma$, las simetrías deslizantes de $\mathcal{F}$ son precisamente las de la forma $\tau^m \circ \gamma$. Sea $\mathcal{F}_1^3 = <\gamma>$, donde γ es una simetría deslizante de eje c tal que $\gamma^2 = \tau$. Un friso con $\mathcal{F}_1^3$ como grupo de simetrías no tiene centros de simetría, ni ejes de simetría, pero queda fijo por una simetría deslizante.

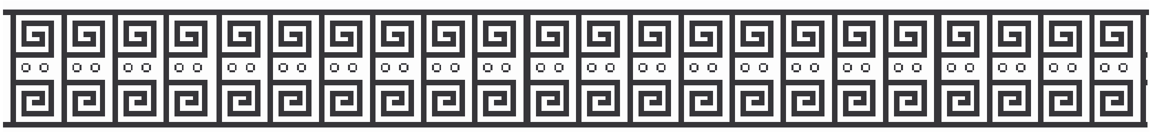
```
 /———      /———      /———      /———
•    o    •    o    •    o    •    o    •
      \———      \———      \———      \———
```

Supongamos que $\mathcal{F}$ contiene otras isometrías además de las generadas por γ. Como $(\sigma_c \circ \gamma)^2 = \tau$, entonces $\sigma_c \circ \gamma$ no está en $<\tau>$. Luego σ_c no puede estar en $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}$ contiene σ_m con m perpendicular a c, entonces $\mathcal{F}$ contiene la simetría central $\sigma_m \circ \gamma$. Si $\mathcal{F}$ contiene una simetría central, debe contener σ_A. Si contiene σ_A y γ debe ser $\mathcal{F}_2^2$.

Teorema: Los siete posibles grupos de friso son

$\mathcal{F}_1 = <\tau>$	F F F F F F F F
$\mathcal{F}_1^1 = <\tau, \sigma_c>$	D D D D D D D D
$\mathcal{F}_1^2 = <\tau, \sigma_m>$	A A A A A A A A
$\mathcal{F}_1^3 = <\gamma>$	D W D M D W D M
$\mathcal{F}_2 = <\tau, \sigma_A>$	S S S S S S S S
$\mathcal{F}_2^1 = <\tau, \sigma_c, \sigma_A>$	I I I I I I I I
$\mathcal{F}_2^2 = <\tau, \sigma_A, \sigma_p>$	M W M W M W M W

[Determinar todas las relaciones posibles de subgrupo entre estos grupos.]



Bibliografía

Martin, G. E., Transformation geometry: an introduction to symmetry. Springer Verlag, 1982. New York.

Para determinar el grupo de simetrías de un friso determinado, se puede usar el siguiente esquema:

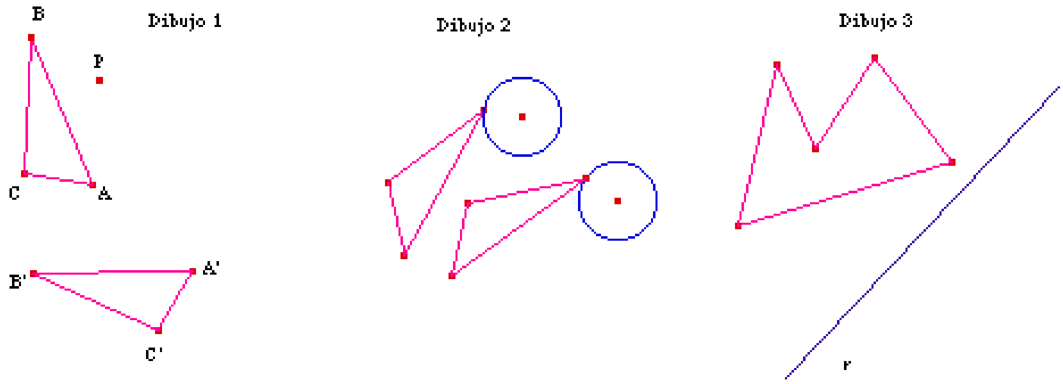
- ¿Tiene simetría Central?
  - No
    - ¿Reflexión por el centro?
      - No
        - ¿Reflexión?
          - No
            - ¿Simetría deslizante?
              - No
                - $\mathcal{F}_1$
              - Si
                - $\mathcal{F}_1^3$
          - Si
            - $\mathcal{F}_1^2$
      - Si
        - $\mathcal{F}_1^1$
  - Si
    - ¿Reflexión por el centro?
      - No
        - ¿Reflexión?
          - No
            - $\mathcal{F}_2$
          - Si
            - $\mathcal{F}_2^2$
      - Si
        - $\mathcal{F}_2^1$

Hallar el grupo de simetrías de los frisos de la página siguiente.

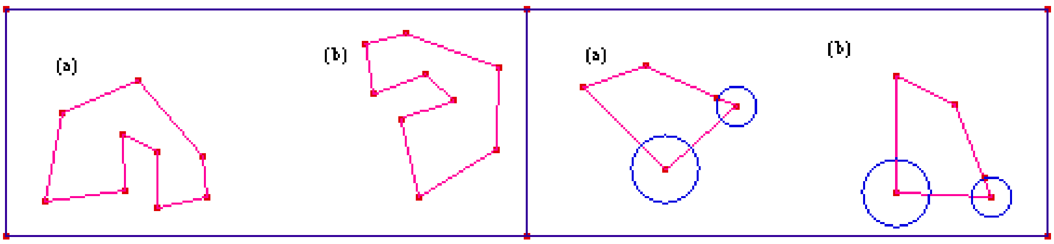
GEOMETRIA BASICA

EJERCICIOS TEMA VI: TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

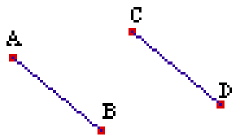
1.- Teniendo en cuenta las figuras que aparecen a continuación, realiza cada uno de los siguientes ejercicios.
a) En el dibujo 1, halla el transformado del punto P mediante el movimiento que transforma el triángulo ABC en el triángulo A'B'C'.
b) En el dibujo 2, determina el movimiento que transforma una figura en otra.
c) En el dibujo 3, halla la imagen del pentágono mediante la simetría axial de eje r.



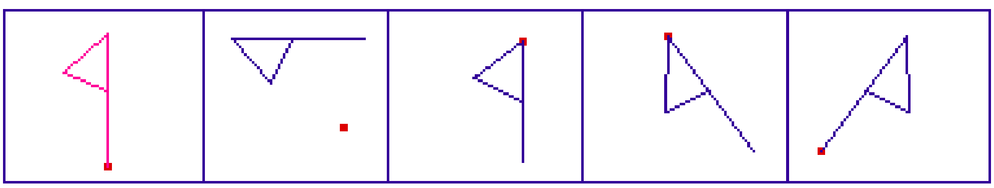
2.- Determina el tipo de movimiento que transforma la figura (a) en la (b) en cada uno de los casos siguientes, dibujando los elementos necesarios para describir el movimiento.



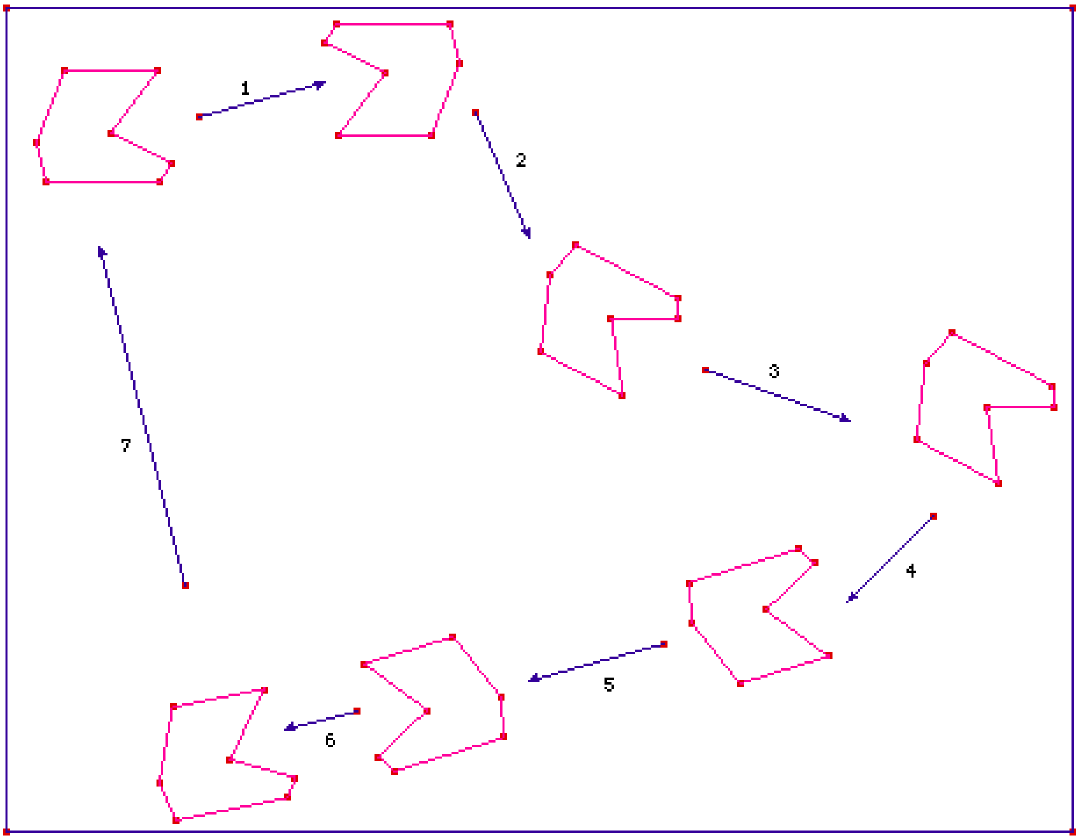
3.- En la figura AB y CD son paralelos y congruentes.
i) Da, justificadamente, tres movimientos distintos que transformen AB en CD.
ii) ¿Cuál sería, en cada caso de los anteriores, la imagen del punto medio de AD?.



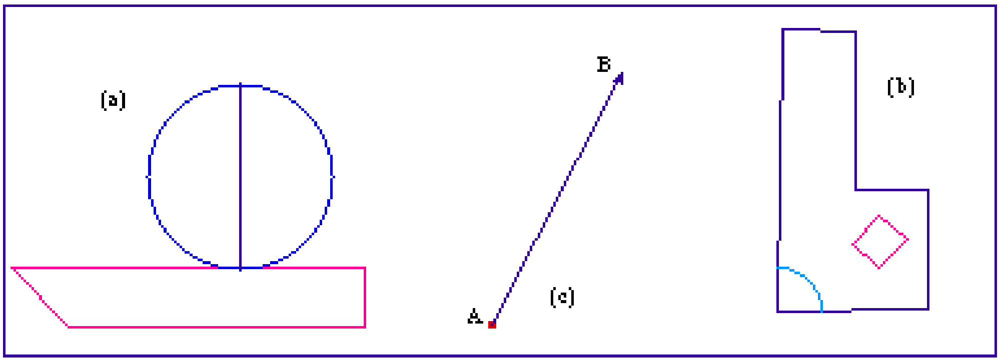
4.- Dibuja la imagen de cada figura bajo un giro de una amplitud de 90 grados (en sentido contrario a las agujas del reloj) y de centro el punto señalado.



5.- Describe, para cada uno de los casos sigiuentes, el movimiento que debes realizar para conseguir una figura a partir de la anterior.



6.- Ten en cuenta las figuras (a), (b) y (c) siguientes.

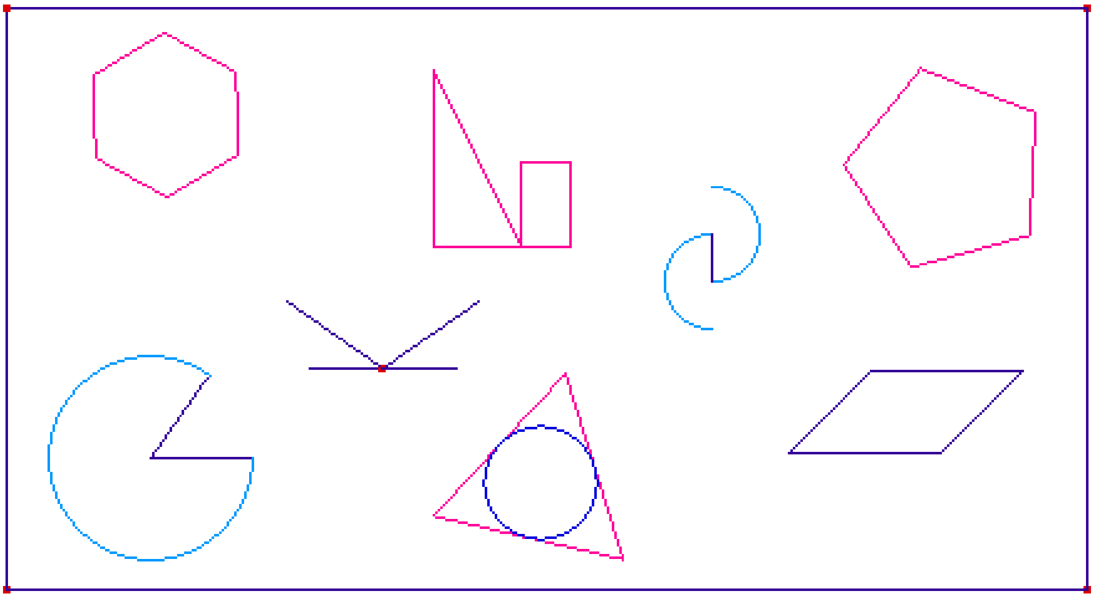


Se consideran los movimientos: i) traslación de vector AB, ii) giro de ángulo P/3 y centro A, iii) simetría de eje la recta AB, iv) simetría deslizante de vector AB.

a) Aplica, separadamente, cada movimiento a las distintas figuras anteriores.

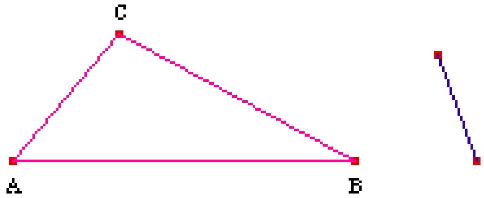
b) Aplica, sucesivamente, los movimientos indicados a cada figura de las anteriores

7.- Halla, cuando sea posible, los ejes de simetría y los centros de simetría de las siguientes figuras.

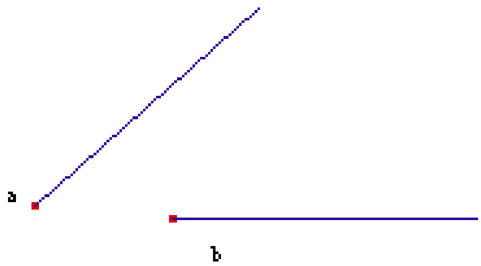


8.- Dibuja un triángulo, un punto P y un punto P' distinto de P. Si por una traslación la imagen de P es P', ¿cuál será la imagen del triángulo que has dibujado?.

9.- En el triángulo ABC de la figura "inscribe" un segmento de igual longitud y paralelo al segmento dado.



10.- La semirrecta *a* de la figura se transforma en la semirrecta *b* por un giro. Determina el centro de giro y la amplitud del ángulo de giro.



11.- Sea A uno de los puntos comunes en los que se cortan dos circunferencias. Construir una recta que pasando por A, determine cuerdas de igual longitud en ambas circunferencias. (*Indicación*: piensa en una simetría central)

12.- En la pared interior de un vaso cilíndrico de cristal hay una gota de miel situada a tres centímetros del borde superior del recipiente. En el borde exterior, en el punto diametralmente opuesto hay una hormiga. Indica cuál es el camino más corto que puede seguir la hormiga para llegar hasta la gota de miel. ¿Cuál es el recorrido total que hace si la altura del vaso es de 20 cms. y el diámetro es de 10 cms.?. (La hormiga no va a encontrar el camino y facilitar así la solución. Es necesario poseer ciertos conocimientos de geometría. Demasiado complicado para la cabeza de una hormiga).

13.- Sea ABC un triángulo cualquiera, y sean AB'C, ABC' y A'BC los triángulos equiláteros construidos sobre sus lados, y que tienen en común con el de partida sólo el lado correspondiente. Demuestra que los segmentos AA', BB' y CC' son congruentes. (*Indicación*: piensa en algunos giros).

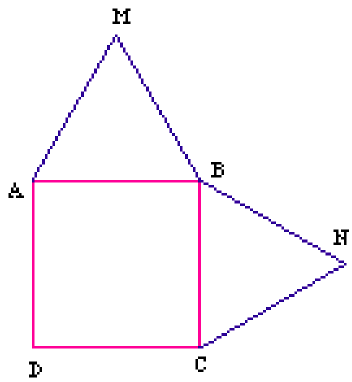
14.- Construye un triángulo ABC conociendo su área, la posición de los puntos A y B, y sabiendo que su perímetro es mínimo.

15.- ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos medios de un segmento de longitud variable, tal que uno de sus extremos permanece fijo mientras el otro recorre una circunferencia?.

16.- Dado un triángulo acutángulo ABC, construir un cuadrado con uno de los lados situado en AB, y los otros vértices en AC y BC respectivamente.

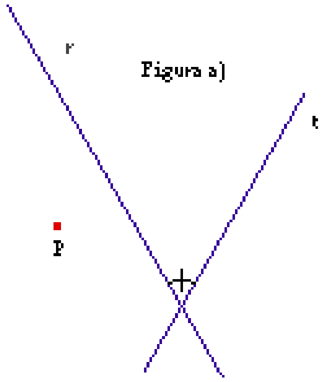
17.- Sea ABCDEF un hexágono regular cuyos lados miden longitud λ. Sobre cada lado del hexágono se construye un triángulo equilátero. Los triángulos construidos son: ABM, BCN, CDO, DEP, EFQ, FAR.
a) Demuestra que los puntos F, A y M están alineados.
b) Sea S el punto de corte de la bisectriz del ángulo RAM con el segmento MR.
    b.1.- Determina la amplitud de cada uno de los ángulos del triángulo AMS
    b.2.- Demuestra que la longitud de MS es $(\lambda\sqrt{3})/2$.
c) Prueba que MNOPQR es hexágono regular cuyos lados miden longitud $\lambda\sqrt{3}$.
d) ABCDEF y MNOPQR son semejantes. ¿Por qué?. ¿Cuál es la razón de semejanza?
e) Prueba que el área de MNOPQR es tres veces el área de ABCDEF.
f) Sea T el centro de ABCDEF y A'B'C'D'E'F' la imagen de ABCDEF por el giro de centro T y amplitud $-(\Pi/6)$. Demuestra que la imagen de A'B'C'D'E'F' por la homotecia de centro T y razón $\sqrt{3}$ es MNOPQR.

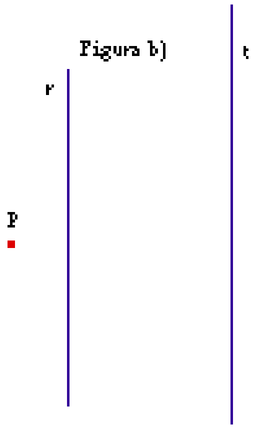
18.- Sea ABCD un cuadrado y M y N puntos tales que los triángulos ABM y BCN son equiláteros (como muestra la figura).
a) ¿De qué polígono regular pueden ser lados los segmentos MB y BN?.
b) Construye (sobre la figura anterior) el polígono regular que tiene por lados MB y BN.
c) Prueba que DB es eje de simetría de la figura ACNBM.
d) ¿Quiénes son las imágenes de los puntos N, M, A, B, C por un giro de centro B y amplitud +150º ?.
e) Sea C' la imagen de C por el giro descrito en d). Demuestra que MC'B es un triángulo equilátero.



19.- Sean r y t rectas del plano. En la figura a) las rectas son secantes y el ángulo señalado es de amplitud $\Pi/3$. En la figura b) las rectas son paralelas.

1. Señala en cada caso quien es la imagen del punto P cuando se aplica sucesivamente la simetría axial de eje r y la simetría axial de eje t.
2. Determina el movimiento que resulta en cada una de las composiciones anteriores.





20.- En la trama cuadrada adjunta, la distancia entre puntos consecutivos de una fila o de una columna se toma como unidad de longitud.

1.- Dibuja en la trama dos triángulos ABC y FGH no congruentes de área 2 y un cuadrilátero PQRS del mismo área.

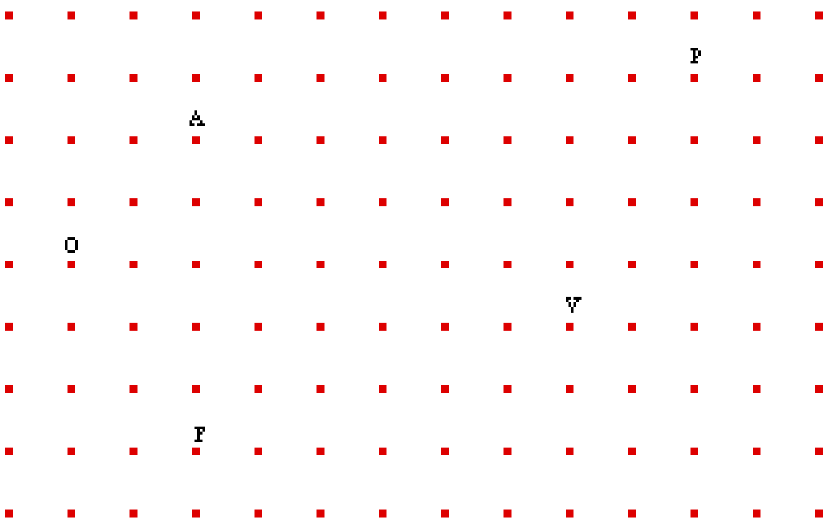
2.- Halla la imagen de ABC por el giro de centro O y amplitud $3\Pi/2$ en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Halla la imagen de FGH por la simetría de eje OF. ¿En estos casos las imágenes son figuras congruentes a las iniciales?.

3.- Sea $h_{V,\div 2}$ la homotecia de centro V y razón $\sqrt{2}$. Determina la imagen P' de P por dicha homotecia. ¿Es P' un punto de la trama?.

Si P'' es la imagen de P por la homotecia $h_{V,3/2}$, ¿es P'' un punto de la trama?.

¿Para qué valores de α la imagen de P por la homotecia $h_{V,\alpha}$ es un punto de la trama?.

Si P'Q'R'S' es la imagen de PQRS por $h_{V,\sqrt{2}}$, ¿cuál es el área de P'Q'R'S'?.



21.- La figura 5 muestra cómo partiendo de un cuadrado se ha formado el polígono con forma de hueso que en ella aparece. Esto te da información acerca de ángulos, longitudes de lados, etc. del "polígono hueso" al que denotaremos por *P*.

a) Demuestra que *P* tiene un eje de simetría.

b) Dibuja la imagen de *P* por el giro de centro A y amplitud $+\Pi/2$.

c) Señala las transformaciones que creas necesarias para conseguir una figura como la 6. ¿Es A centro de simetría de esa figura?.

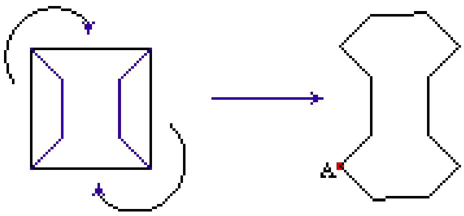


Figura 5

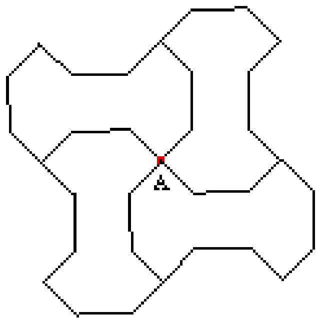
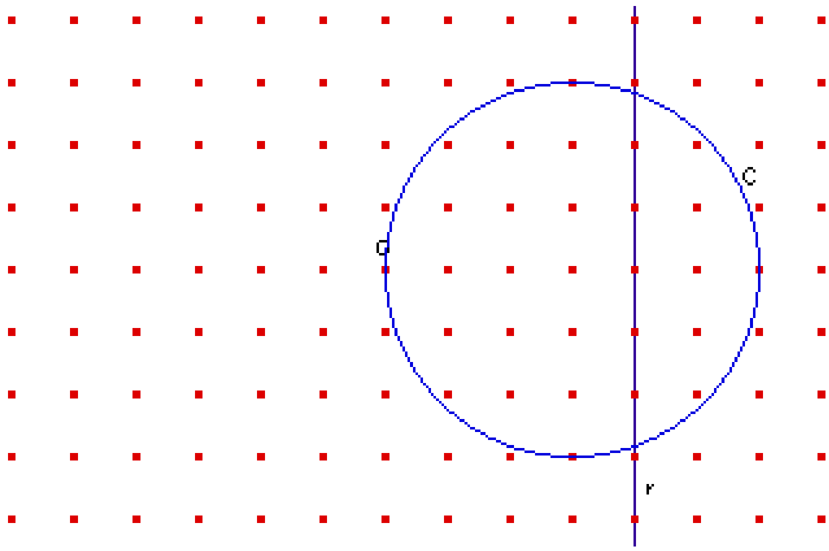


Figura 6

22.- Determinar la imagen de la recta r y de la circunferencia C dadas en la figura por la inversión de polo O y potencia 36 (toma como unidad de longitud la que hay entre puntos consecutivos de igual fila o columna). ¿Existe una circunferencia de puntos dobles?.
Realiza el mismo ejercicio para la inversión de polo O y potencia -36.



23.- Sea ABCD un rombo con el ángulo en B obtuso (Figura 7). Desde B se trazan las perpendiculares a los lados AD y CD, que cortan a dichos segmentos en E y F respectivamente.

a) Demuestra que los triángulos BDA y EFB son ambos isósceles y semejantes entre si
b) Sea *a* la longitud del segmento AB y *b* la del segmento BE. Determina la imagen del triángulo BDA por la aplicación $h_{B,a/b} \circ g_{B,-\square/2} \circ t_{AB}$.

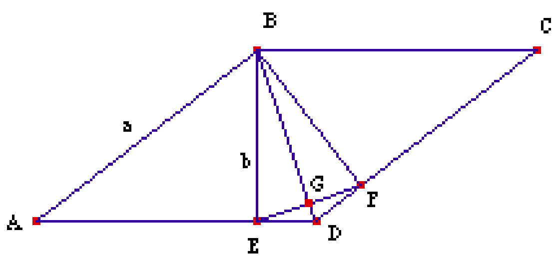


Figura 7

24.- Dado un triángulo ABC, sea A' B' C' su triángulo de puntos medios. Designamos por G_i (baricentros), H_i (ortocentros), y C_i circuncentros i=1,2,3 de los triángulos AB'C', BA'C' y CA'B' respectivamente. Uniendo los puntos G_i entre si, y lo mismo para los H_i y los C_i respectivamente se obtienen tres triángulos. Probar que los tres triángulos así obtenidos son congruentes y, a su vez,
semejantes al triángulo ABC.