GEOMETRÍA BÁSICA

TEMA V - RELACIÓN DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

1. PROPORCIONALIDAD. TEOREMA DE THALES.
2. RELACIÓN DE SEMEJANZA Y CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS
3. APICACIONES DE LA RELACIÓN DE SEMEJANZA. TEOREMA DE PITÁGORAS. LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA.
4. CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS CON REGLA Y COMPÁS DERIVADAS DE LA RELACIÓN DE SEMEJANZA.

---

1. PROPORCIONALIDAD. TEOREMA DE THALES.

Dadas dos rectas r, r’ y otra recta s secante a r y r’, se define la *proyección de r sobre r’ en la dirección de s* como la aplicación p: r → r’, que asocia a un punto A de r el punto A’ = p(A) que es intersección de la única recta paralela a s que pasa por A con la recta r’.

Proposición: Si p es la proyección de r sobre r’ en la dirección de s, entonces:

1. p es biyectiva.
2. $p(A) = A'$, $p(B) = B'$ $\Rightarrow$ $p(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$
3. $\overline{AB} = \overline{CD}$ $\Rightarrow$ $p(\overline{AB}) = p(\overline{CD})$.

Dem.: 1. p es inyectiva: Si p(A) = p(B) = Q, entonces Q es el punto de r’ que está en la paralela a s que pasa por A y Q es el punto de r’ que está en la paralela a s que pasa por B. Como hay una única paralela a s que pasa por Q, dichas rectas coinciden y A = B.
p es sobreyectiva: Dado T en r’ sea P el punto de corte de la única paralela a s que pasa por T, con r. Entonces p(P) = T.

2. Sea P un punto de $\overline{AB}$ y sea P’ = p(P). Observamos que AA’|| BB’|| PP’, pues las tres rectas son paralelas a s. Consideramos los dos semiplanos determinados por AA’:

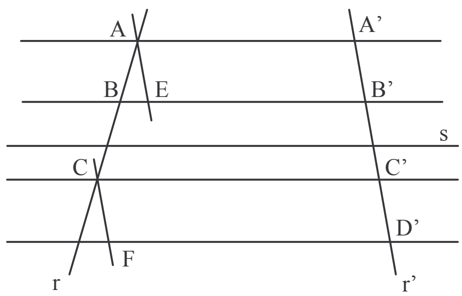
P está en el mismo semiplano que B, pues P está en $\overline{AB}$,
P’ está en el mismo semiplano que P, pues PP’|| AA’,
B’ está en el mismo semiplano que B, pues BB’|| AA’.
Por lo tanto, P’ está en el mismo semiplano que B’ respecto de AA’.

Análogamente, P’ está en el mismo semiplano que A’ respecto de BB’. Entonces P’ está en $\overline{A'B'}$.

3. Supongo p(A) = A', p(B) = B', p(C) = C’, p(D) = D’ y $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Si r || r’ entonces ABB’A’ es paralelogramo y $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. También en este caso $\overline{CD} = \overline{C'D'}$. Luego $\overline{A'B'} = \overline{C'D'}$.

Supongo a hora que r y r’ no son paralelas. Sea E el punto de corte de BB’ con la paralela a r’ que pasa por A. Entonces AA’B’E es un paralelogramo y $\overline{AE} = \overline{A'B'}$.
Sea F el punto de corte de DD’ con la paralela a r que pasa por C. Entonces CC’D’F es un paralelogramo y $\overline{CF} = \overline{C'D'}$.
Como AE || CF entonces $E\hat{A}B = F\hat{C}D$.



Como BB' $\parallel$ DD' entonces $E\hat{B}A = F\hat{D}C$. Como $\overline{AB} = \overline{CD}$, aplicando el segundo criterio de congruencia resulta $\Delta BAE = \Delta DCF$. Luego $\overline{AE} = \overline{CF}$ y entonces $\overline{A'B'} = \overline{C'D'}$. □

Se llama *razón* de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ al cociente de sus longitudes $\lambda = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$.

Se dice que los segmentos $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, . . . , $\overline{A_mB_m}$ son *proporcionales* a los segmentos $\overline{A'_1B'_1}$, $\overline{A'_2B'_2}$, . . . , $\overline{A'_mB'_m}$ si

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A'_1B'_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A'_2B'_2}} = \ldots = \frac{\overline{A_mB_m}}{\overline{A'_mB'_m}}.$$

Lema: Sean a, b, c, d, x, y números reales.

(1) Si $a < x < b$, $a < y < b$, entonces $|x - y| < b - a$.

(2) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ si y solo si $\dfrac{a - c}{b - d} = \dfrac{a}{b}$, $(b \neq 0,\ d \neq 0,\ b \neq d)$.

(3) $\dfrac{2m + 1}{m(m + 1)} < \dfrac{2}{m}$ para todo $m \in \mathbf{N}$.

Dem.: (1) $x < b$, $-y < -a$, entonces $x - y < b - a$,
$-x < -a$, $y < b$, entonces $y - x < b - a$.
Luego $|x - y| < b - a$.

(2) Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow (a - c)b = ab - bc = ab - ad = a(b - d) \Rightarrow \dfrac{a - c}{b - d} = \dfrac{a}{b}$.

Si $\dfrac{a - c}{b - d} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow (a - c)b = a(b - d) \Rightarrow ab - cb = ab - ad \Rightarrow bc = ad \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

(3) $\dfrac{2m + 1}{m(m + 1)} < \dfrac{2}{m}$ si y solo si $2m + 1 < 2(m + 1) = 2m + 2$. □

Proposición: Sea p la proyección de r sobre r' en la dirección de s y sean A, B, C, D puntos de r. Entonces $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a $p(\overline{AB})$ y $p(\overline{CD})$.

Dem.: Llamamos A' = p(A), B' = p(B), C' = p(C), D' = p(D), de modo que $p(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$ y $p(\overline{CD}) = \overline{C'D'}$.

Caso 1: r y r' paralelas

AA'B'B es un paralelogramo y entonces $\overline{A'B'} = \overline{AB}$,

CC'D'D es un paralelogramo y entonces $\overline{C'D'} = \overline{CD}$.

Luego $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = 1 = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$.

Caso 2: r y r' secantes

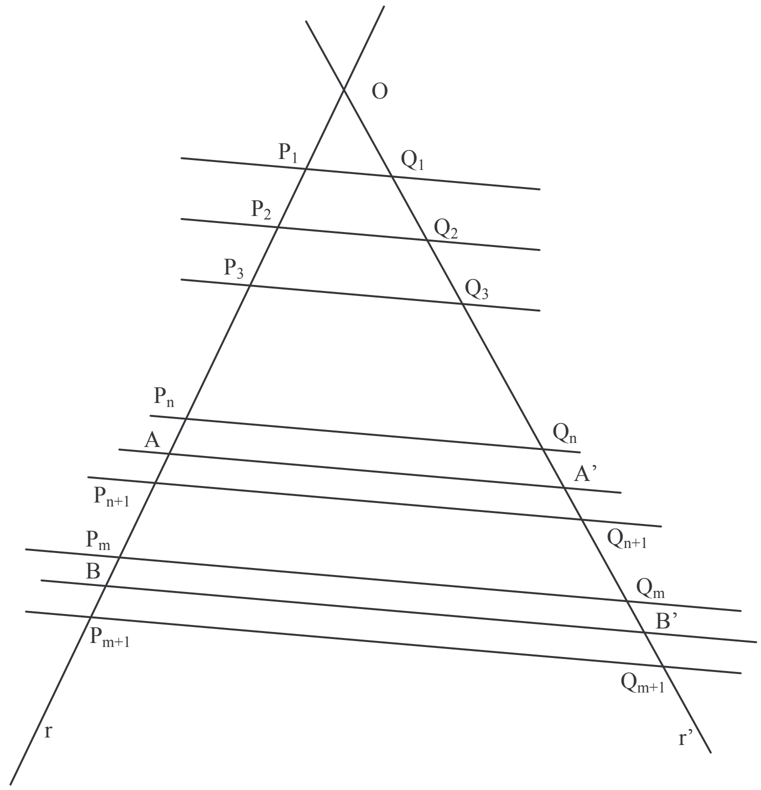
Sea O el punto de corte de r y r'. Vamos a probar que $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$.

Sea P_1 un punto de $\overline{OA}$ tal que ni $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OP_1}}$ ni $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OP_1}}$ son números enteros. En O_A consideramos $P_2, P_3, \ldots$ tales que $\overline{OP_k} = k\overline{OP_1}$. Existe un entero n tal que

$$\overline{OP}_n = n\overline{OP}_1 < \overline{OA} < (n + 1)\overline{OP}_1 = \overline{OP}_{n+1}$$

y existe m tal que

$$\overline{OP}_m = m\overline{OP}_1 < \overline{OB} < (m + 1)\overline{OP}_1 = \overline{OP}_{m+1}.$$



Teniendo en cuenta las desigualdades anteriores, se deduce que

$$\frac{n}{m+1} < \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} < \frac{n+1}{m} \qquad [1]$$

Podemos suponer que $\overline{OA} < \overline{OB}$, de modo que n < m.

Por P_1, P_2, ... , P_k, ... trazamos las rectas paralelas a AA' que cortarán a $O_{A'}$ en Q_1, Q_2, ..., Q_k, ... Como $\overline{OP}_1$, $\overline{P_1P}_2$, $\overline{P_2P}_3$, ... son segmentos congruentes, entonces $\overline{OQ}_1$, $\overline{Q_1Q}_2$, $\overline{Q_2Q}_3$, ... son congruentes, por la proposición anterior. Puesto que A está entre P_n y P_{n+1} y B está entre P_m y P_{m+1}, A' está entre Q_n y Q_{n+1} y B' entre Q_m y Q_{m+1}. Por lo tanto

$$n\overline{OQ}_1 < \overline{OA'} < (n + 1)\overline{OQ}_1,$$

$$m\overline{OQ}_1 < \overline{OB'} < (m + 1)\overline{OQ}_1$$

de donde se obtiene

$$\frac{n}{m+1} < \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} < \frac{n+1}{m} \qquad [2]$$

De [1] y [2]

$$\left|\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} - \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}\right| < \frac{n+1}{m} - \frac{n}{m+1} = \frac{n+m+1}{m(m+1)} \le \frac{2m+1}{m(m+1)} < \frac{2}{m}$$

Escogiendo $\overline{OP_1}$ suficientemente pequeño, se puede tener m tan grande como se quiera, de modo que $\left|\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} - \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}\right|$ sea tan pequeño como se quiera. Por tanto $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$.

Aplicando el apartado (2) del lema anterior:

$$\frac{\overline{OB} - \overline{OA}}{\overline{OB'} - \overline{OA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}.$$

Razonando del mismo modo

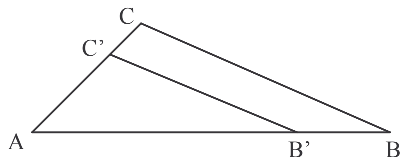
$$\frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OD'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} \quad \text{y} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}.$$

Entonces $\frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$. □

Esta proposición se puede generalizar a un número arbitrario de segmentos y se conoce como <u>*teorema de Thales*</u>.

Teorema de Thales: Si tres o más rectas paralelas entre si son cortadas por dos rectas r y r', entonces los segmentos determinados por los puntos de intersección de las paralelas con r son proporcionales a los segmentos correspondientes determinados en r'.

Se dice que dos triángulos están en *posición de Thales* si tienen un vértice común, dos lados de uno están contenidos en dos lados del otro, respectivamente, y el tercer lado es paralelo al tercer lado del otro.



Proposición: Si dos triángulos ΔABC y ΔAB'C' están en posición de Thales, entonces sus ángulos correspondientes son iguales, sus lados correspondientes son proporcionales y $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{B'B}}{\overline{C'C}}$.

Dem.: Los ángulos son iguales porque B'C' ∥ BC. Por el teorema de Thales, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{B'B}}{\overline{C'C}}$. De la primera igualdad, se tiene $\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}$. Trazamos la paralela a AB que pasa por C' y que cortará a $\overline{BC}$ en un punto D. Entonces C'DBB' es un paralelogramo y $\overline{BD} = \overline{B'C'}$. Por el teorema de Thales, $\frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$. □

Teorema: Si ABC es un triángulo, B' en A_B, B'≠B, C' en A_C, C'≠C, tales que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}$ entonces ΔABC y ΔAB'C' están en posición de Thales.

Dem: Trazamos la paralela a BC que pasa por B' y llamamos C* al punto de corte de esta paralela con AC, de modo que ΔABC y ΔAB'C* están en posición de Thales. Entonces $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC^*}}$. Pero como $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}$, se tiene $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC^*}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}$, de donde $\overline{AC^*} = \overline{AC'}$. Como C* y C' están en A_C, entonces C* = C' y B'C' ∥ BC. □

2. RELACIÓN DE SEMEJANZA Y CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIANGULOS

Se dice que ΔABC y $\Delta A_1B_1C_1$ son *semejantes* y se escribe $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, si tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales. Más precisamente $\hat{A} = \hat{A}_1$, $\hat{B} = \hat{B}_1$, $\hat{C} = \hat{C}_1$, $\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}}$.

Se llama *razón de semejanza* al valor común de estos tres cocientes.

Dos polígonos convexos $P_1\, P_2\, P_3 \dots P_n$, $Q_1\, Q_2\, Q_3 \dots Q_n$ con el mismo número de lados, son *semejantes* si tienen los ángulos correspondientes iguales y los lados correspondientes proporcionales.

Dos triángulos que están en posición de Thales son semejantes, pero el recíproco no es cierto.

Lema: Si ΔABC = ΔA'B'C' y ΔA'B'C' ~ ΔA''B''C'' entonces ΔABC ~ ΔA''B''C''.

Dem.: ejercicio. □

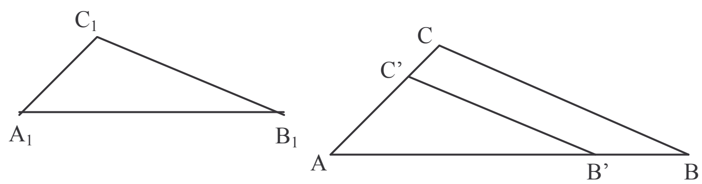
Primer criterio de semejanza de triángulos: Si dos triángulos tienen un par de ángulos iguales y proporcionales los respectivos lados que los forman, entonces son semejantes.

Dem.: Sean ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$ tales que $\hat{A} = \hat{A}_1$ y $\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}} = \lambda$.

Si $\lambda = 1$, entonces $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$ y por el primer criterio de congruencia (LAL), $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Supongamos ahora $\overline{AB} > \overline{A_1B_1}$. Sea B' un punto de $\overline{AB}$ tal que $\overline{AB'} = \overline{A_1B_1}$. La paralela a BC que pasa por B' corta $\overline{AC}$ en un punto C'. Los triángulos ΔABC y ΔA'B'C' están en posición de Thales y por tanto son semejantes. Entonces

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}},$$



de donde se deduce que $\overline{AC'} = \overline{A_1C_1}$.

Esto, junto con $\hat{A} = \hat{A}_1$ y $\overline{AB'} = \overline{A_1B_1}$, implica que $\Delta AB'C' = \Delta A_1B_1C_1$ por el primer criterio de congruencia. Por lo tanto

$$\Delta ABC \sim \Delta AB'C' = \Delta A_1B_1C_1. \ \square$$

Segundo criterio de semejanza de triángulos: Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, entonces son semejantes.

Dem.: Sean ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$ tales que $\hat{A} = \hat{A}_1$ y $\hat{B} = \hat{B}_1$.

Si $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, aplicando el segundo criterio de congruencia (ALA) resulta $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Supongamos ahora $\overline{AB} > \overline{A_1B_1}$ y construimos ΔAB'C' en posición de Thales con ΔABC, con $\overline{AB'} = \overline{A_1B_1}$ como en la demostración del primer criterio. Como $\hat{A} = \hat{A}_1$, $\hat{B}' = \hat{B} = \hat{B}_1$ y $\overline{AB'} = \overline{A_1B_1}$, resulta $\Delta AB'C' = \Delta A_1B_1C_1$, por el segundo criterio de congruencia. Por lo tanto $\Delta ABC \sim \Delta AB'C' = \Delta A_1B_1C_1$. □

Tercer criterio de semejanza de triángulos: Si dos triángulos tienen sus lados proporcionales, entonces son semejantes.

Dem.: Sean ΔABC y $\Delta A_1B_1C_1$ tales que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}} = \lambda$.

Si $\lambda = 1$ entonces los triángulos tienen los lados iguales y por el tercer criterio de congruencia (LLL) los triángulos son congruentes.

Supongamos ahora $\overline{AB} > \overline{A_1B_1}$ y construimos ΔAB'C' en posición de Thales con ΔABC, con $\overline{AB'} = \overline{A_1B_1}$ como en la demostración del primer criterio. Entonces $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$, de donde se deduce que $\overline{B_1C_1} = \overline{B'C'}$ y $\overline{A_1C_1} = \overline{AC'}$. Por el tercer criterio de congruencia $\Delta A'B'C' = \Delta A_1B_1C_1$.

Entonces $\Delta ABC \sim \Delta AB'C' = \Delta A_1B_1C_1$. □

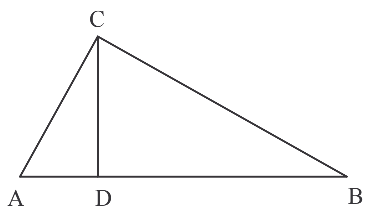
3. APLICACIONES DE LA RELACIÓN DE SEMEJANZA. TEOREMA DE PITÁGORAS. LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA.

La *media proporcional* (o *media geométrica*) de dos números a y b, es otro número x tal que a/x = x/b, o equivalentemente, $ab = x^2$.

Dados tres números a, b, c se llama *cuarto proporcional* a dichos números al número x tal que a/b = c/x.

Teorema de la altura: En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa es media proporcional de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

Dem.: Sea ΔABC con ángulo recto $\hat{C}$. Sea D el pie de la altura relativa a la hipotenusa, de modo que D está en



$\overline{AB}$ y $A\hat{D}C = B\hat{D}C = 90º$. Además, $C\hat{A}D = C\hat{A}B = \hat{A} = 90º - \hat{B} = 90º - A\hat{B}C = 90º - D\hat{B}C = D\hat{C}B$. Por el segundo criterio de semejanza $\Delta ADC \sim \Delta CDB$. Entonces $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{DB}}$ por lo que

$\overline{AD} \cdot \overline{DB} = \overline{DC}^2$. □

Teorema del cateto: En un triángulo rectángulo, cada uno de los catetos es media proporcional de la hipotenusa y su proyección sobre la hipotenusa.

Dem.: Sea ΔABC con ángulo recto $\hat{C}$. Sea D el pie de la altura relativa a la hipotenusa. Los triángulos ΔADC y ΔACB comparten el ángulo agudo $\hat{A}$ y ambos tienen un ángulo recto. Por el segundo criterio de semejanza ΔADC ~ ΔACB. Entonces $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{CB}}$ lo que implica $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AC}^2$.

Para el otro cateto se prueba de modo similar. □

Teorema de Pitágoras: En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Dem.: Sea ΔABC con ángulo recto $\hat{C}$, de modo que la hipotenusa es $\overline{AB}$. Sea D el pie de la altura relativa a la hipotenusa. Por el teorema del cateto $\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AD}$ y $\overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BD}$. Sumando

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{AB} \cdot \overline{BD} = \overline{AB}\,(\overline{AD} + \overline{BD}) = \overline{AB}^2. \ \square$$

Teorema: En un triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, más el doble del producto de uno de estos lados por la proyección del otro sobre la recta que lo contiene.

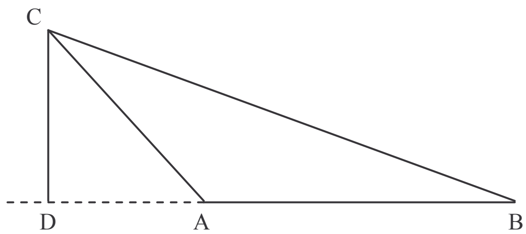
Dem.: Sea ΔABC con $\hat{A}$ obtuso. Sea D el pie de la altura correspondiente al vértice C. Entonces A está entre D y B y $\overline{DB} = \overline{DA} + \overline{AB}$. Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos ΔCDA y ΔCDB:

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2\,,\ \overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2\,.$$

Restando

$$\begin{aligned}\overline{CB}^2 - \overline{AC}^2 &= \overline{DB}^2 - \overline{DA}^2 = (\overline{DA} + \overline{AB})^2 - \overline{DA}^2\\ &= \overline{DA}^2 + \overline{AB}^2 + 2\,\overline{DA}\ \overline{AB} - \overline{DA}^2\\ &= \overline{AB}^2 + 2\,\overline{DA}\ \overline{AB}\end{aligned}$$

y entonces $\overline{CB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + 2\,\overline{DA}\ \overline{AB}$. $\square$



Teorema: En un triángulo, el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de uno de estos lados por la proyección del otro sobre él.

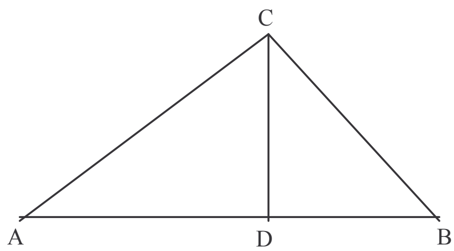
Dem.: Sea ΔABC con $\hat{A}$ agudo. Sea D el pie de la altura correspondiente al vértice C. Aplicando el teorema de Pitágoras a ΔADC y ΔDBC: $\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2$, $\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2$. Restando: $\overline{CB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{DB}^2 - \overline{DA}^2$ y entonces $\overline{CB}^2 = \overline{DB}^2 - \overline{DA}^2 + \overline{AC}^2$.

<u>Caso 1</u>: $\hat{B}$ agudo

Entonces $\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AD}$ y

$$\begin{aligned}\overline{CB}^2 &= (\overline{AB} - \overline{AD})^2 - \overline{DA}^2 + \overline{AC}^2\\ &= \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2\,\overline{AB}\ \overline{AD} - \overline{DA}^2 + \overline{AC}^2\\ &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AB}\ \overline{AD},\end{aligned}$$

donde $\overline{AD}$ es la proyección del lado $\overline{AC}$ sobre AB.



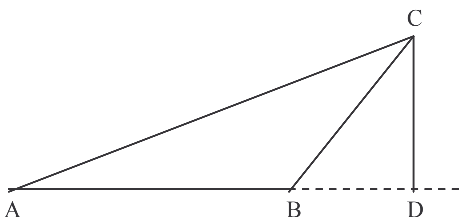
<u>Caso 2</u>: $\hat{B}$ recto

Entonces D = B y el teorema se reduce al teorema de Pitágoras.

<u>Caso 3</u>: $\hat{B}$ obtuso

Entonces $\overline{DB} = \overline{AD} - \overline{AB}$ y

$$\begin{aligned}\overline{CB}^2 &= (\overline{AD} - \overline{AB})^2 - \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2\\ &= \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,\overline{AD}\ \overline{AB} - \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2\\ &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AB}\ \overline{AD}. \ \square\end{aligned}$$



Razones trigonométricas

Dado un triángulo rectángulo, si α es uno de los ángulos agudos, uno de los catetos es adyacente al ángulo α y el otro cateto es opuesto al ángulo α. Se definen las siguientes razones trigonométricas asociadas al ángulo α:

Seno: $\text{sen } \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$, **Coseno**: $\cos \alpha = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$,

Tangente: $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$, **Cotangente**: $\cot \alpha = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}$,

Cosecante: $\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha}$, **Secante**: $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha}$.

Se observa que estas razones solo dependen del ángulo α ya que si dos triángulos rectángulos tienen igual uno de los ángulos agudos, entonces son semejantes y por la proporcionalidad de los lados, los cocientes anteriores coinciden en los dos triángulos.

Como consecuencia del teorema de Pitágoras se tiene: $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

La definición se extiende de modo natural a:

$$\text{sen } 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \text{sen } 90^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0.$$

Si α es un ángulo obtuso se define $\text{sen } \alpha = \cos(\alpha - 90^\circ)$ y $\cos \alpha = -\text{sen}(\alpha - 90^\circ)$.

Si $\overline{AC}$ forma un ángulo agudo con la semirrecta A_B entonces la proyección de $\overline{AC}$ sobre AB es igual a

$$\overline{AC} \cos(C\hat{A}B).$$

En nuestro tratamiento de la geometría euclideana solo consideramos ángulos positivos. Si introdujéramos una noción de orientación en el plano, podríamos definir ángulos negativos y podríamos extender apropiadamente la definición de razones trigonométricas para ángulos negativos. También se podrían definir las razones trigonométricas de ángulos mayores de 180º. Esto tendría la ventaja de poder enunciar de forma general propiedades relacionadas con la suma y diferencia de ángulos.

Ejercicio: Enunciar los dos teoremas anteriores usando las razones trigonométricas.

Proporcionalidad de cuerdas y segmentos tangentes a una circunferencia. Potencia de un punto.

Teorema: (1) Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son cuerdas de una circunferencia que se cortan en un punto S, entonces se tiene que

$$\overline{AS} \cdot \overline{BS} = \overline{CS} \cdot \overline{DS}.$$

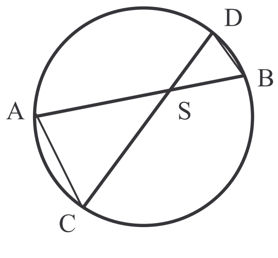
(2) Si S es un punto exterior a una circunferencia y las rectas r y s que pasan por S cortan a dicha circunferencia en A, B y C, D, respectivamente, entonces

$$\overline{AS} \cdot \overline{BS} = \overline{CS} \cdot \overline{DS}.$$

(3) Si S es un punto exterior a una circunferencia, la recta r que pasa por S corta a la circunferencia en A, B, y la recta r' que pasa por S es tangente a la circunferencia en C, entonces $\overline{AS} \cdot \overline{BS} = \overline{CS}^2$.

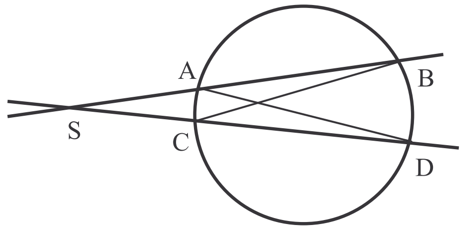
Dem.: (1) $A\hat{C}D = A\hat{B}D$ pues corresponden al mismo arco de circunferencia. Por la misma razón $C\hat{A}B = C\hat{D}B$. Entonces $\Delta ASC \sim \Delta DSB$.

Luego $\dfrac{\overline{AS}}{\overline{DS}} = \dfrac{\overline{CS}}{\overline{BS}}$ y $\overline{AS} \cdot \overline{BS} = \overline{CS} \cdot \overline{DS}$.



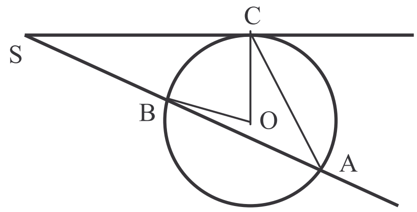
(2) $C\hat{B}S = A\hat{D}S$ pues corresponden al mismo arco de circunferencia, y $B\hat{S}C = D\hat{S}A$. Entonces $\Delta CBS \sim \Delta ADS$. Luego $\dfrac{\overline{AS}}{\overline{CS}} = \dfrac{\overline{DS}}{\overline{BS}}$ y

$\overline{AS} \cdot \overline{BS} = \overline{CS} \cdot \overline{DS}$.



(3) $C\hat{A}S = C\hat{A}B = ½\, C\hat{O}B$ por el ejercicio 13 del tema IV y $B\hat{C}S = ½\, C\hat{O}B$ por el ejercicio 22 del tema IV. Entonces $C\hat{A}S = B\hat{C}S$. Como además $C\hat{S}A = B\hat{S}C$, se tiene $\Delta CAS \sim \Delta BCS$.

Luego $\dfrac{\overline{AS}}{\overline{CS}} = \dfrac{\overline{CS}}{\overline{BS}}$ y $\overline{AS} \cdot \overline{BS} = \overline{CS}^2$. □

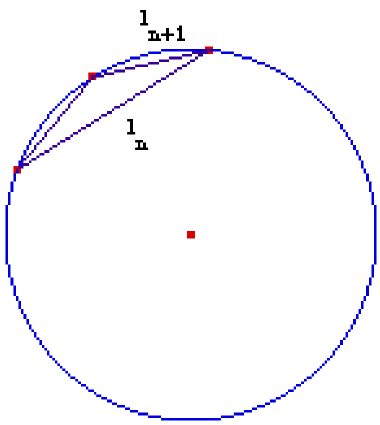


Este teorema nos asegura que la siguiente definición no depende de la recta r que pasa por S elegida.
Se llama *potencia* del punto S con respecto a la circunferencia *c* a:

$$\begin{cases} \overline{AS} \cdot \overline{BS} & \text{si S es exterior a } c, \\ -\,\overline{AS} \cdot \overline{BS} & \text{si S es interior a } c, \\ 0 & \text{si S está en } c. \end{cases}$$

Longitud de la circunferencia.

Sea c una circunferencia. Siempre es posible inscribir en ella polígonos regulares de 2^n lados con $n \geq 2$, así como circunscribir a ella un cuadrado, cuyo lado es ℓ y su perímetro $P = 4\ell$. El polígono regular de 2^n lados inscripto en c, tiene lado ℓ_n y perímetro p_n.



$p_n = 2^n.\, \ell_n$ y $p_{n+1} = 2^{n+1}.\, \ell_{n+1}$

pero puesto que $2.\, \ell_{n+1} > \ell_n$, es inmediato concluir que $p_{n+1} > p_n$ (*).

Además vamos a admitir el siguiente resultado, cuya demostración puede verse en el Pogorelov: *Si P y P' son dos polígonos convexos tales que P' está contenido en P, entonces el perímetro de P' es menor que el de P.* Teniendo esto en cuenta, podemos afirmar que $p_n < P$ cualquiera que sea $n \geq 2$ (**).

De (*) y (**) obtenemos que la sucesión de los perímetros $\{p_n\}$ es creciente y acotada, y por tanto tiene límite.

El límite anterior es lo que se define como longitud L de la circunferencia c.

Si d es el diámetro de la circunferencia c, veamos que el cociente $\frac{L}{d}$ es igual para todas las circunferencias. En efecto, si c, c' son dos circunferencias de diámetros d, d' y longitudes L, L', respectivamente, consideramos las sucesiones de perímetros de los 2^n-gonos inscriptos p_n y p'_n, respectivamente, de modo que

$$L = \lim p_n \quad y \quad L' = \lim p'_n .$$

Además, el perímetro de un 2^n-gono regular es proporcional al diámetro de la circunferencia circunscripta y por esto

$$p_n = c_n\, d \text{ y } p'_n = c_n\, d'.$$

(Por ejemplo, en el caso del cuadrado, $p2 = 2\sqrt{2}$ d.)
Entonces

$$\frac{L}{d} = \frac{\lim p_n}{d} = \lim \frac{p_n}{d} = \lim c_n = \lim \frac{p'_n}{d} = \frac{\lim p'_n}{d} = \frac{L'}{d'} .$$

Esta razón constante $\frac{L}{d} = \frac{L'}{d'}$ se llama π.

Entonces

$$L = \pi d.$$

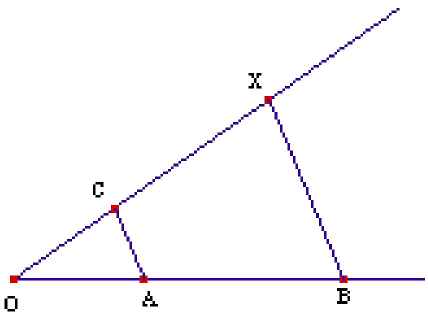
La longitud de un arco de circunferencia es proporcional a la medida del ángulo. Si *a* es un arco de ángulo α en una circunferencia de radio *r*, entonces

$$\text{long}(a) = \pi\, r \frac{\alpha}{180} .$$

Esto si α está medido en grados. Se puede utilizar una unidad de medida de ángulos, tal que si el radio es $r = 1$, entonces la medida del ángulo α coincide con la medida del arco *a*. Esta unidad de medida es el *radián*. Un ángulo llano mide π radianes y un ángulo recto mide π/2 radianes.

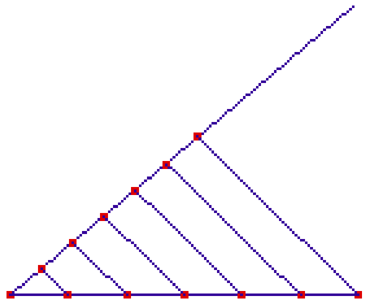
4. CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS CON REGLA Y COMPÁS DERIVADAS DE LA RELACIÓN DE SEMEJANZA.

1. Construcción del cuarto proporcional a tres segmentos dados.



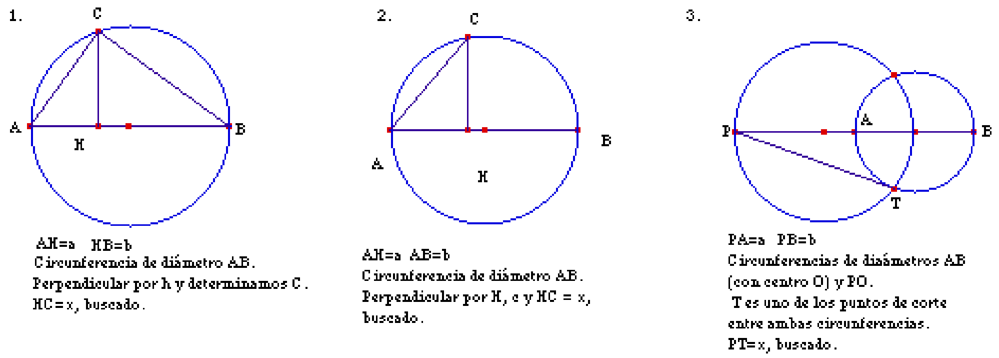
OA=a, OB=b, OC=c.
Por B paralela a AC, y X.
OX = x, cuarto proporcional a a,b,c

2. División de un segmento $\overline{AB}$ en n partes iguales.



Se traza una semirrecta oblicua con origen en uno de los extremos A del segmento. Sobre esta semirrecta se dibujan n segmentos consecutivos iguales $\overline{AP_1}$, $\overline{P_1P_2}$, ... , $\overline{P_{n-1}P_n}$. Se une el extremo final P_n del último segmento con el otro extremo B del segmento dado. Se trazan las rectas paralelas a P_nB que pasan por P_1, P_2, ... , P_{n-1}. Por el terorema de Thales, estas rectas determinan en $\overline{AB}$ n segmentos iguales.

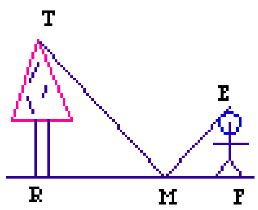
3. Construcción de medias geométricas (usando el teorema de la altura, el del cateto y el de potencia de un punto. Para este último método nos hace falta conocer cómo construir una tangente a una circunferencia desde un punto).

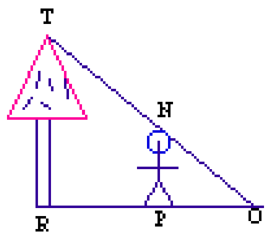


GEOMETRÍA BÁSICA

EJERCICIOS TEMA V: RELACIÓN DE SEMEJANZA

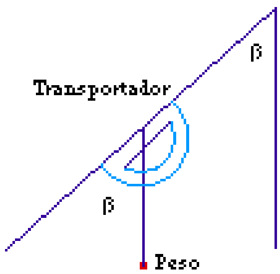
1.- En los ejercicios que se proponen en los apartados sucesivos podrá comprobarse cómo la semejanza de triángulos puede resultar muy útil para medir longitudes inaccesibles.
a) Juan ha de medir la altura de un árbol gigante situado en un llano, para lo cual actúa de la siguiente manera. Coloca un espejo a una determinada distancia del pie del árbol, y después se mueve (en línea recta con el espejo y el pie del árbol) hasta que consigue ver en el espejo la cima del árbol. La figura siguiente –izda.- representa esta situación.

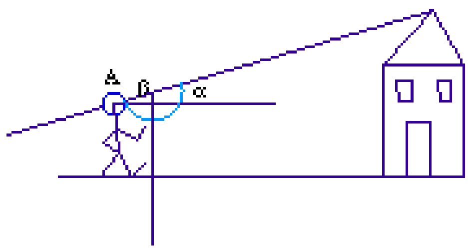




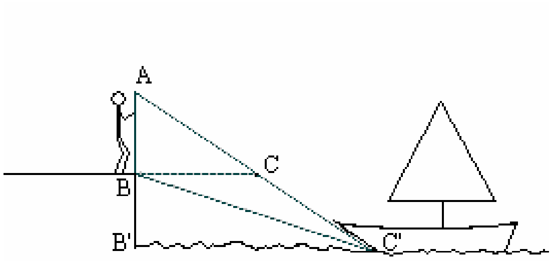
En la figura M representa la posición del espejo, y es muy fácil para Juan medir las longitudes RM, MF y su propia altura EF. Además Juan conoce una ley física que dice que *los ángulos de incidencia y reflexión de un rayo de luz sobre un espejo son iguales*. Por tanto el sabe que los ángulos EMF y TMR son iguales. ¿Podrías reproducir el razonamiento que hace Juan para determinar la altura TR del árbol?.
b) Pero, ¿qué pasará si Juan no tiene un espejo?. Entonces inventa otra forma de calcular la altura del árbol: camina alejándose del árbol a lo largo de la sombra del mismo, hasta el punto en que su sombra coincide con la parte final de la sombra del árbol. Juan asegura que, de esa forma, su cabeza, la cima del árbol y el extremo de la sombra están alineados (tal y cómo se indica en la figura anterior –dcha.-) ¿Por qué?.

Supongamos que Juan mide 180 cm. y que ha caminado, desde la base del árbol, 7m. ¿Qué otra magnitud necesita conocer Juan para determinar la altura del árbol?. ¿Cuál es la altura del arbol en función de dicha magnitud?.
c) Un *goniómetro o sextante* es un instrumento para medir ángulos inaccesibles. Puede construirse de forma simple, utilizando un transportador y una plomada (figura inferior izquierda).





La figura anterior (derecha) muestra el método para medir el ángulo a que forma la horizontal del ojo humano y el extremo del tejado de un edificio, utilizando el goniómetro.
La plomada sobre el transportador determina la medida de un ángulo β, y se verifica que $\alpha = 90°-\beta$.
Utilizando el goniómetro, ¿cómo calcularías la distancia a la que se encuentra un barco de la costa?. Observa la figura siguiente.



2.- Sobre semejanza de triángulos
a) ¿Pueden ser semejantes dos triángulos tales que el primero contenga un ángulo de 70° y el segundo uno de 115°?.
b) ¿Es posible que dos triángulos sean semejantes, si el primero contiene ángulos que miden 45° y 72°, y el segundo 72° y 85°?.
c) Sea ABC un triángulo cuyos lados tienen longitudes 5, 3 y 7 cm., y DEF otro triángulo cuyos lados miden 9, 15 y 21. ¿Son dichos triángulos semejantes?.
d) Si los lados del triángulo ABC miden 36, 48 y 27 m. y los de DEF 48, 64 y 36, ¿son los dos triángulos semejantes?.
e) Da un ejemplo de triángulos que tengan iguales cinco elementos (entre lados y ángulos) y que sin embargo no sean triángulos iguales.
f) En una circunferencia que tiene de radio 36 m. se traza una cuerda de 48 m. Calcula la longitud del segmento que dicha cuerda proyecta sobre uno cualquiera de los diámetros que pasan por sus extremos.
g) Sea ABC un triángulo cualquiera. Construye un triángulo en posición de Thales con ABC cuyo perímetro sea un tercio del perímetro de ABC.

3.- Consideremos un cuadrado ABCD. Uniendo el vértice A con el punto medio del lado DC, y prolongando esta línea hasta que corte a la recta BC en un punto E, obtenemos el triángulo ABE. Calcular el perímetro de este triángulo, sabiendo que el lado del cuadrado mide 5 m.

4.- Demuestra que la bisectriz AD del triángulo ABC divide el lado BC en segmentos proporcionales a los lados AB y AC, es decir,

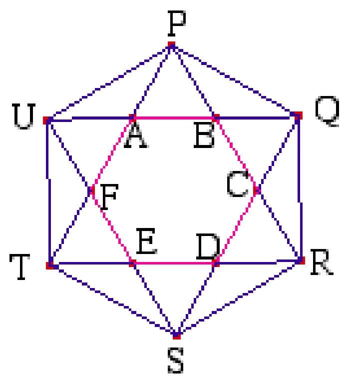
$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$$

El resultado anterior se conoce como teorema de la bisectriz interior de un triángulo.

5.- Sean AB y CD cuerdas de una circunferencia que se cortan en el punto P. Demuestra que AP·BP = CP·DP, esto es, que los productos de segmentos de cuerdas secantes coinciden.

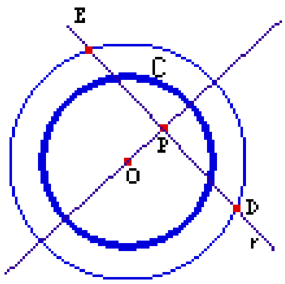
6.- Sea ABCDEF un hexágono regular. Sobre sus lados y “hacia fuera” se construyen triángulos equiláteros. Si P ,Q, R, S, T, U son los vértices de los triángulos no compartidos con el hexágono inicial,

1. Prueba que PQRSTU es un hexágono regular.
2. ¿Son semejantes ABCDEF y PQRSTU?. En caso afirmativo, ¿cuál es la razón de semejanza?.



7.- Demuestra que en todo paralelogramo la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los lados. Deduce que en cuadrado la longitud de la diagonal es la longitud del lado multiplicada por $\sqrt{2}$.

8.- *Intersección de una recta con una circunferencia*. Se había definido lo que era una recta tangente, una recta secante y una recta exterior a una circunferencia. Se había visto que tales definiciones tenían sentido construyendo rectas con las distintas características. Se había caracterizado el caso en que una recta es tangente (la recta r es tangente a una circunferencia de centro O en un punto P si y sólo si el radio OP es perpendicular a r). A continuación vamos a dar una caracterización global de todos los posibles casos.
Sea **C** una circunferencia de centro O y radio ρ. Y sea r una recta tal que la distancia de O a r es d. Entonces:
i) si $d > \rho$, r no corta a **C**
ii) si $d = \rho$, r es tangente a **C**
iii) si $d < \rho$, r corta a **C** en dos puntos
Puesto que la dificultad radica en el tercer caso, de este vamos a dar el esquema de la demostración que deberás justificar.
Suponemos pues que $d < \rho$. Desde O se traza la perpendicular a r, que corta a dicha recta en el punto P. La longitud del segmento OP es d puesto que .... Además P divide a r en dos semirrectas. En ellas consideramos respectivamente puntos E y D tales que $PE = PD = \sqrt{r^2 - d^2}$. Se deduce que OD = OE porque ....
Si consideramos la circunferencia de centro O y radio OD = OE, dicha circunferencia corta a la recta r en los puntos .... Pero OD = OE = ..., por tanto la circunferencia construida coincide con la dada, y como consecuencia .... Como en una circunferencia no hay tres puntos alineados, $r \cap$**C** = { ....}.



En la figura, y según lo anterior, la circunferencia **C**, de traza grueso, coincidirá con la de trazo fino.

9.- *Existencia del triángulo de lados dados*. Como se sabe la suma de dos lados de un triángulo es mayor que el tercer lado. Una pregunta natural es entonces la siguiente: ¿Pueden ser lados de un triángulo tres números arbitrarios si la suma de dos cualesquiera de estos números es mayor que el tercero?. Se trata de demostrar a continuación que dicha pregunta tiene una respuesta afirmativa. Para ello se van a ir señalando los pasos de la demostración que tú deberás ir justificando.

Sean *a, b, c* tres números reales positivos donde la suma de dos cualesquiera de ellos es mayor que el tercero. Supongamos, para puntualizar que $a \leq b \leq c$.
Sea $a_1 = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}$.
Se tiene que $a_1 > 0$ puesto que ....
También $a_1 < a$ porque $a - a_1 = a -$ .... = ... > 0 ya que $b >$ ....
Se construye el triángulo ABC del modo siguiente. Tomemos un segmento AB de longitud c. En la semirrecta B_A y desde B se considera el punto D tal que el segmento BD tiene longitud a_1. Se traza desde D la perpendicular r a AB. En una de las semirrectas en que r queda dividida por D, se considera el punto C tal que la longitud de DC sea $\sqrt{a^2 - a_1^2}$.
Se afirma que los lados del triángulo ABC son efectivamente a, b, c. ¿Por qué éso es cierto?.

10.- *Posición relativa de dos circunferencias*. En ejercicios de construcción geométrica se ha utilizado que dos circunferencias "en determinadas condiciones" se cortan en dos puntos, y se había comentado que con posterioridad eso iba a justificarse. Es aquí donde se va a realizar dicha justificación.

Se consideran dos circunferencias de centros respectivos O y O' y radios ρ y ρ', siendo $\rho \leq \rho'$, y d la distancia entre los centros. Demuestra que:
i) Las circunferencias no se cortan, o sea no tienen puntos comunes, si $\rho + \rho' < d$ ó $\rho' - \rho > d$.
ii) Las circunferencias tienen un punto en común en el que son tangentes, es decir tienen una tangente común, si $\rho + \rho' = d$ ó $\rho' - \rho = d$.
iii) Las circunferencias se cortan en dos puntos si $\rho + \rho' > d$ y $\rho' - \rho < d$.

En la realización de los tres ejercicios anteriores, se hace uso de manera implícita del principio de continuidad para una recta (que puede deducirse a partir del axioma de longitud de segmentos), y que puede extenderse a otros conjuntos de puntos: segmentos, semirrectas, arcos de circunferencia, ... Encontramos innecesario es este curso hacer una mayor formalización de ello.

11.- Construye con regla y compás una recta tangente a una circunferencia dada y que pase por un punto dado (exterior a la circunferencia).

12.- *Cuestiones sencillas sobre semejanza de triángulos*.
i) ¿Cuánto valen los ángulos del triángulo ABC que es semejante al triángulo BCA?.
ii) ¿Dos triángulos isósceles que tienen iguales los ángulos opuestos a la base son semejantes?
iii) El ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles mide 36°. ¿Cómo es el triángulo que se forma al trazar la bisectriz de uno de los ángulos de la base?.

13.- El pie de la bisectriz trazada desde vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo divide la hipotenusa en razón m/n. Demuestra que el pie de la altura trazada desde el mismo vértice divide a la hipotenusa en razón m^2/n^2.

14.- La bisectriz del ángulo exterior de vértice A de un triángulo ABC corta la recta CB en un punto D. Demuestra que $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Este resultado se conoce como tª de la bisectriz exterior.

15.- Dado un segmento de longitud a, se llama *segmento aureo* del dado a un segmento de longitud x que satisface: $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$.
Demuestra que:
i) Si un segmento de longitud x es el áureo de uno de longitud a, entonces el áureo de x es $a - x$.
ii) En un triángulo isósceles cuyo ángulo opuesto a la base es de 36°, la base es el segmento áureo del lateral.
iii) El lado del decágono regular es el seg. áureo del radio de su circunferencia circunscrita.

16.- *Construcción de un segmento dado su áureo*. Dado un segmento de longitud x, se trata de construir uno de longitud a, tal que el primero sea segmento áureo del segundo. Para ello sigue las siguientes indicaciones:
- Traza dos semirrectas perpendiculares Op y OQ tales que los segmentos OP y OQ tengan longitud x.
- Construye la circunferencia de diámetro OQ, cuyo centro denotamos por M.
- Sean A y B los puntos de corte de la recta PM con la circunferencia, de forma que llamamos B al que está entre M y P.
- Demuestra que el segmento AP es el segmento buscado.

17.- *Construcción del segmento áureo de uno dado* . Dado un segmento de longitud a, construye uno de longitud x, tal que el segundo sea segmento áureo del primero. (Ten en cuenta 15i) y 16)

18.- Dada una circunferencia, divídela en 10 arcos iguales, construyendo el segmento áureo de su radio y trazando arcos consecutivos cuya cuerda sea el segmento áureo hallado.

19.- Construir un triángulo ABC conocidos el segmento unidad, el ángulo A y la longitud de la mediana AM, y sabiendo que $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{4}$.

20.- Comprueba que si x es el segmento áureo de a, entonces x = $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$a.
a) Usando la relación anterior, construye mediante plegado de papel el segmento áureo de uno dado.
b) Se ha visto en el ejercicio 15 que en un triángulo isósceles cuyo ángulo opuesto a la base es de 36°, la base es el segmento áureo del lateral. Demuestra ahora su recíproco: Si un triángulo es isósceles y su base es el segmento áureo del lateral, entonces el ángulo opuesto a la base es de 36°.

21.- El ejercicio 18 te permite construir un decágono regular, y como consecuencia un pentágono regular, conocido el radio de la circunferencia circunscrita.
i) Demuestra que si λ es la longitud del lado del pentágono construido, $\lambda = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\rho$, donde ρ es el radio de la circunferencia circunscrita.
ii) ¿Cómo construirías un decágono regular conocido su lado?.
iii) ¿Se te ocurre una construcción con regla y compás de un pentágono regular conocido su lado?.

22.- A partir de la división de la circunferencia en 10 arcos iguales y en 6 arcos iguales, y teniendo en cuenta que $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$, idear cómo construir un polígono regular de 15 lados.

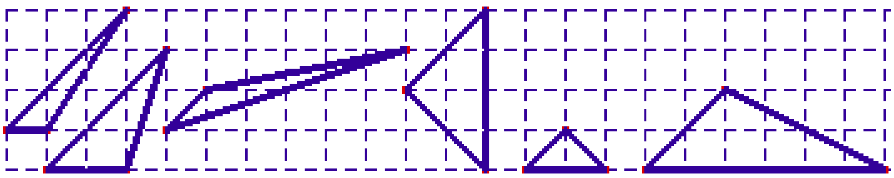
23.- Dados cinco segmentos de longitudes a, b, c, d, e, construye el segmento de longitud x tal que $x = \dfrac{abc}{de}$.

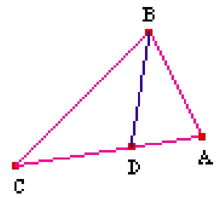
24.- Demuestra que el lugar geométrico de los puntos C para los cuáles la razón de sus distancias a dos puntos fijos A y B es constante y diferente de la unidad, es una circunferencia. *Indicación*: Las bisectrices de los ángulos interior y exterior de vértice C del triángulo ABC son perpendiculares. Cortan a la recta AB siempre en los mismos puntos cualquiera que sea C.

25,- Construye una circunferencia que pase por un punto y sea tangente a dos rectas secantes.

26.- Sea ABC acutángulo con AB > AC. Sean CH y BL alturas de dicho triángulo. Demuestra que
i) los triángulos ACH y ABL son semejantes   ii) CH < BL.

27.- Indica cuáles de los triángulos sobre la cuadrícula siguiente son semejantes.



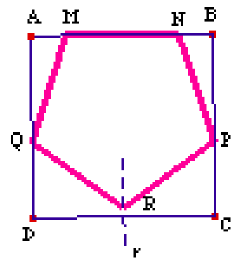


28.- De la figura anterior (derecha) se sabe que: ABC es isósceles de ángulo desigual C = 36°, D está en la bisectriz del ángulo B, y AB mide 6 cm. Señala qué triángulos de la figura son semejantes y cuáles son isósceles. Calcula la longitud de AC.

29.- a) Da la definición de polígonos semejantes.
b) Enuncia los criterios de semejanza de triángulos.
c) Da un ejemplo de cuadriláteros con ángulos correspondientes iguales que no sean semejantes
d) Demuestra que que si ABCD y A'B'C'D' son paralelogramos tales que A ≡ A' y $\frac{AB}{A'B} = \frac{AD}{A'D'}$ entonces ABCD y A'B'C'D' son semejantes.

30.- Coge una pieza de papel con forma de cuadrado. Teniendo en cuenta la relación que existe entre un segmento y su áureo, determina sobre la pieza de papel, mediante plegado, un segmento que sea el áureo del lado del cuadrado.

31.-En este ejercicio se pide la construcción de un pentágono regular mediante plegado de papel. P ello sigue las instrucciones siguientes.
1.- Coge una pieza de papel con forma de cuadrado ABCD.
2.- Mediante plegado determina en el lado AB dos puntos M y N tales que MN sea el segmento aureo de AB, y AM = NB = (AB - MN)/2.
3.- Plegando desde M llevamos N sobre AB, y plegando desde N llevamos M sobre BC. Así obtenemos respectivamente dos puntos Q y P.
4.- Obtenemos también mediante plegado la mediatriz r de CD, y sobre ella determinamos un punt doblando por Q y llevando M sobre r.
5.- Afirmamos que MNPRQ es un pentágono regular. Demuéstralo.



32.- Sea **C** una circunferencia de centro O en la que se señala un diámetro UV. (Figura 1)
a) Sea r la perpendicular por A a UV, N el punto de intersección de r con UV y C el de r con **C**.
- Demuestra que N es punto medio de AC. Si M es el punto medio de AB, ¿son MN y BC paralelos?
- ¿Qué relación se puede establecer entre los ángulos ANM y AOB?.
b) Demuestra que si P es la proyección perpendicular de B sobre UV, N PM es isósceles.
c) Si AB y A'B' son cuerdas congruentes, M' es punto medio de A'B', y N' y P' son los pies de las perpendiculares a UV trazadas por A' y B' respectivamente, prueba que los triángulos NPM y N'P'M' son semejantes.

33.- En la circunferencia **C** de centro O en la que se señala un diámetro AB, se considera una cuerda CD (figura 2). Sea E la intersección de las rectas AC y BD, y F la intersección de AD y BC.
a) Prueba que AD y CB son alturas del triángulo ABE. Deduce que las rectas AB y EF son perpendiculares.
b) Determina todos los triángulos de la figura que sean semejantes al triángulo BFD.

34.- En un texto de geometría aparece el siguiente ejercicio:
Construye un triángulo conocidas las alturas h_1, h_2 y h_3.
La figura 3 puede servirte de ayuda para realizar dicha construcción, donde:

- PQ, PR *y* PS *son segmentos iguales a las alturas dadas (h_1, h_2 y h_3 respectivamente) .*
- *C es la circunferencia que pasa por* Q, R *y* S.

Los lados del triángulo buscado son proporcionales a los segmentos l_1 = PK, *l_2 =* PL *y l_3 =* PM.
El problema de construcción geométrica estará completamente resuelto cuando se justifique que el triángulo que finalmente se construye tiene por alturas las dadas al comienzo. De eso trata este ejercicio y para ello:

1. Demuestra que en cualquier triángulo ABC de alturas AF, BG y CH, se verifica: AC $\cdot$BG = BC$\cdot$AF = AB $\cdot$CH .
2. Teniendo en cuenta la figura 3, prueba que PQ $\cdot$ PK = PR $\cdot$ PL .
3. Supuesto construido el triángulo de lados l_1, l_2 y l_3, deduce que dicho triángulo es semejante al que se desea construir.
4. Con ayuda de lo anterior, establece el resto de los pasos que te permitan construir un triángulo que tenga por alturas h_1, h_2 y h_3.

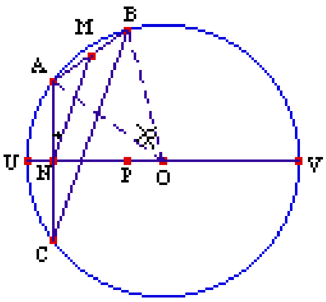


Figura 1

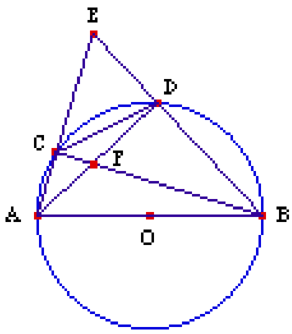


Figura 2

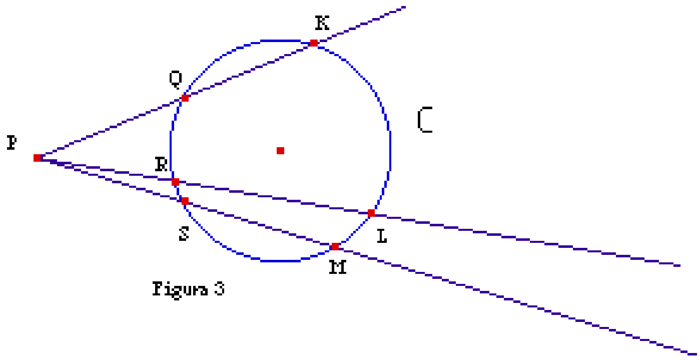


Figura 3

35.- Sea ABC un triángulo isósceles de base AB. En las figuras 2 y 3, el punto O es el cicuncentro de ABC y el punto Y su incentro. Sean *d* , *r*, *s* las longitudes respectivas de los segmentos OY, OC, YR. Sea 2α la amplitud del ángulo ACB, y 2β la de ABC.
a) Prueba que: " Y pertenece a la recta CO". " El triángulo PCA es rectángulo", "El ángulo APY tiene amplitud 2β ". "El ángulo BAP tiene amplitud α ".
b) Demuestra que el triángulo APY es isósceles de base AY.
c) Observa la figura 3, en la que YR y AC son perpendiculares. ¿Son los triángulos CYR y CPA semejantes?.
d) Usando los apartados anteriores deduce que d = $\sqrt{\ r^2\text{-}2rs}$.

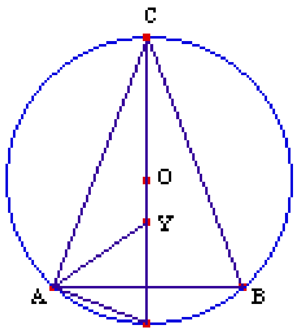


Figura 2

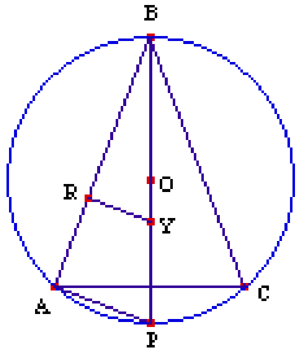
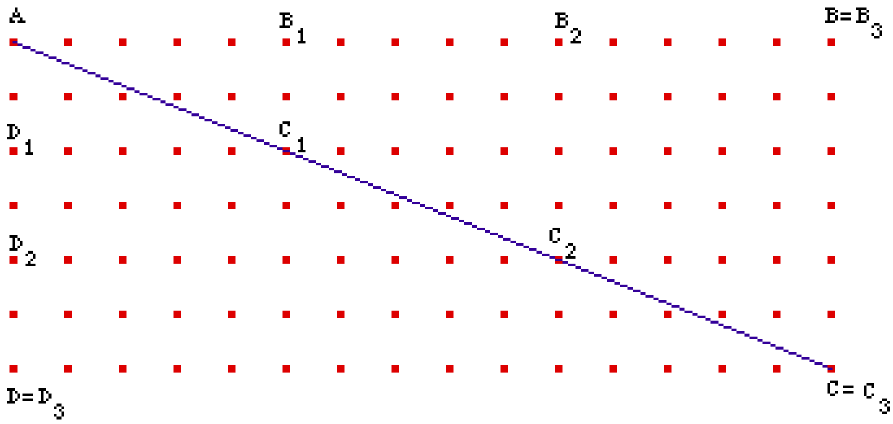


Figura 3

36.- *Divisibilidad y semejanza*. Consideremos una trama cuadrada de vértices A, B, C y D y de tamaño (m+1) × (n+1). Esto es, tomando como unidad de longitud la que hay entre dos puntos consecutivos de la trama, la longitud de AB es m y la longitud de BC es n. El objetivo de este ejercicio es determinar el número de cuadrados básicos de la trama a los que corta la diagonal AC. Diremos que la diagonal corta a un cuadrado de la trama cuando la intersección de ambos no se reduce a un punto.



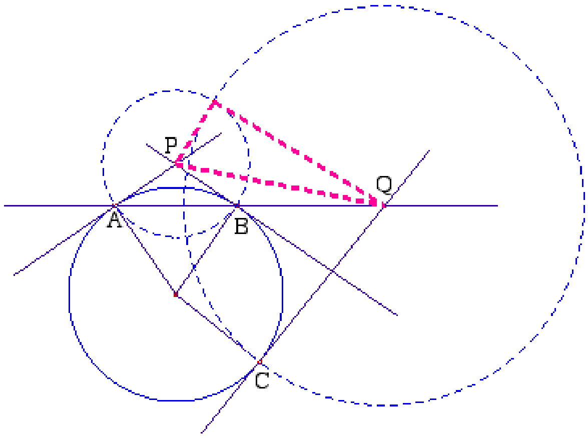
1. Sea d = m.c.d.{m,n}, p = m:d y q = n:d. Llamamos D_k al punto de AD tal que $AD_k = kq$, siendo k un número natural tal que $1 \leq k \leq d$. ¿D_k es un punto de la trama?. Prueba que el punto C_k que es intersección de AC y la recta r_k paralela a AB por D_k, es un punto de la trama.
2. Demuestra que si P es un punto de la trama que se encuentra sobre la diagonal AC entonces P es uno de los puntos C_k hallados en el apartado anterior.
3. ¿Cuántos rectángulos iguales a $AB_1C_1D_1$ se pueden construir sobre la diagonal AC?. ¿El segmento AC_1 poseerá algún punto de la trama distinto de los extremos?. ¿Si m y n son números primos entre si la diagonal AC contendrá algún punto de la trama?. ¿El número de cuadrados básicos de la trama a los que corta la diagonal AC será d veces el número de cuadrados básicos de la trama a los que corta el segmento AC_1?.
4. Desarrolla una estrategia que te permita concluir que el número de cuadrados básicos de la trama a los que corta el segmento AC_1 es p+q-1.

38.- Construye un triángulo ABC conocidos el ángulo A y el radio de la circunferencia inscrita, y sabiendo que AC / AB = 3/4.

39.- Construir un triángulo rectángulo de hipotenusa dada, tal que la mitad de la misma sea la media geométrica de sus catetos.

40.- Sean A,B,C tres puntos sobre una circunferencia, P el punto de corte de las tangentes a dicha circunferencia trazadas por A y B respectivamente, y Q el punto de corte de la recta AB y la tangente a la circunferencia por el punto C. Demostrar que $PQ^2 = PB^2 + QC^2$.

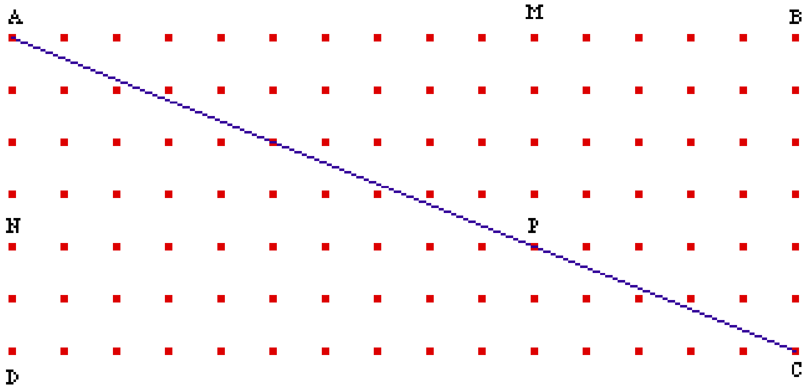
La siguiente figura puede darte idea de cómo abordar el problema.



Resolución ejercicio nº 36.

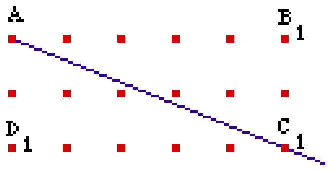
1. Obviamente los puntos D_k son puntos de la trama, puesto que n es longitud entre puntos de la trama y q es un divisor de n.
   Los triángulos AD_kC_k y ADC son semejantes con razón de semejanza r=kq/n=k/d (razón entre AD_k y AD). Por tanto D_kC_k / DC = k/d, y en consecuencia D_kC_k = (k/d).dp = kp.
   Si D_k es un punto de la trama, p es la longitud entre dos puntos de la trama y D_kC_k = kp, entonces C_k es también punto de la trama.

2. Sea P un punto de la trama que se encuentra sobre la diagonal AC, y sean M y N puntos de la trama tales que AMPN es un rectángulo. En esas condiciones, los triángulos ANP y ADC son semejantes y por tanto AN/ NP= AD/ DC=n/m=q/p. Como AN y NP son números enteros y q y p son números primos entre si, entonces AN = kq y NP = kp para algún entero k comprendido entre 1 y d. Así pues P es uno de los puntos C_k del apartado anterior.



3. Teniendo en cuenta los apartados anteriores podemos observar que C_1 es el punto de la trama más próximo a A que pertenece a AC, esto es, no hay ningún punto de la trama entre A y C_1. Si m y n son primos entre si C_1 = C, y por ello no habrá puntos de la trama en AC.
   Como C_d = C, son d los rectángulos iguales a $AB_1C_1D_1$ que se pueden construir sobre la diagonal AC. El número de cuadrados básicos de la trama a los que corta la diagonal AC será entonces d veces el número de cuadrados básicos de la trama a los que corta el segmento AC_1.

4. Nos quedamos con el trozo de trama correspondiente al rectángulo $AB_1C_1D_1$, cuyos lados tienen longitudes p y q respectivamente (p y q primos entre si).



   Llamemos m_1 al número de cuadrados básicos de la primera fila que corta la diagonal AC_1, m_2 al número de cuadrados de la segunda fila que corta la diagonal AC_1, ..., m_q al número de cuadrados de la q-ésima fila que corta la diagonal AC_1.
   Si m_1 es el número de cuadrados básicos descritos antes, el desplazamiento horizontal que realizamos a lo largo de la primera fila es de longitud l_1= m_1-1+"algo". Supongamos que en este primer paso sólo computamos la longitud λ_1= m_1-1, y que el "algo" lo computamos al pasar a la segunda fila. Esta forma de actuar lo mantendremos hasta llegar a la fila número q.
   Cuando seguimos avanzando por AC_1 a lo largo de la segunda fila nos desplazamos entonces horizontalmente una nueva longitud λ_2= m_2-1.
   La longitud horizontal que nos desplazamos a lo largo de la fila (q-1)-ésima es, siguiendo la técnica descrita antes,

$$\lambda_{q-1}= m_{q-1}-1.$$

   En la última fila, computando como hasta ahora, y teniendo en cuenta que llegamos al vértice C_1, λ_q= m_q.
   La longitud horizontal total es $p = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_{q-1} + \lambda_q = m_1-1 + m_2-1 + ...+ m_{q-1}-1 + m_q = (m_1 + m_2 + ... + m_{q-1} + m_q) - (q-1)$. Por tanto el número total de cuadrados básicos cruzados por AC_1 es $m_1 + m_2 + ... + m_{q-1} + m_q = p + q -1$.