GEOMETRÍA BÁSICA

TEMA III- CONCEPTOS FUNDAMENTALES Y AXIOMÁTICA DE LA GEOMETRÍA EUCLÍDEA PLANA

1. PUNTOS, RECTAS Y PLANOS
2. ALGUNOS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS BÁSICOS
3. LONGITUD DE SEGMENTOS
4. MEDIDA DE ANGULOS
5. RELACION DE PARALELISMO
6. CUADRILATEROS
7. ALGUNOS RESULTADOS RELATIVOS A RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

1. PUNTOS, RECTAS Y PLANOS

Los conceptos de punto, recta, plano y espacio, son fundamentales en el estudio de la Geometría, pero no pueden ser definidos utilizando otros términos más simples. Euclides definió el punto como “lo que no tiene partes" y la recta como “una longitud que no tiene anchura". Nosotros adoptaremos estas descripciones, motivándolas con situaciones físicas reales, en un intento de acercarnos a los conceptos de forma intuitiva y, posteriormente, admitiremos su existencia como axioma.

Punto: es lo que no tiene anchura, ni longitud ni altura. Es el lunar o la mancha más pequeña que se puede dibujar. Nombraremos los puntos mediante letras mayúsculas: A, B, C, ...

Recta: es un conjunto infinito de puntos sin anchura ni altura. Un hilo tensado que no tenga principio ni final. Utilizaremos letras minúsculas para referirnos a las rectas: r, s, t, ...

Plano: es un conjunto infinito de puntos que no tiene altura. Es como un folio prolongado indefinidamente. Utilizaremos letras griegas para designar los planos: α, β, γ, ...

Espacio: es el conjunto de todos los puntos.

Las expresiones como “estar situado en” o “estar entre” se refieren a relaciones entre los conceptos anteriores y otros que se definirán luego. Las propiedades de estas relaciones están dadas en los axiomas.

Axioma I. Existen puntos, rectas y planos en el espacio. Las rectas tienen un número infinito de puntos. Cualquiera que sea una recta hay puntos que pertenecen y puntos que no pertenecen a ella. Dado un plano, hay rectas contenidas y otras no contenidas en él.

Consecuencia: Dado un plano, hay puntos en él y otros fuera de él.

Axioma II. Cualesquiera que sean dos puntos distintos hay una y sólo una recta que los contiene.

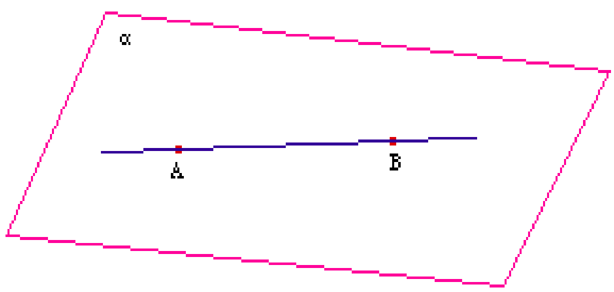
La única recta que pasa por los puntos A y B, la indicaremos con AB.

Consecuencia: Dos rectas distintas, o bien se cortan en un único punto, o no se cortan.

Diremos que tres puntos están *alineados* o son *colineales* si los tres pertenecen a la misma recta.

Axioma III. Por tres puntos no alineados pasa un único plano. Si dos puntos distintos A y B pertenecen a un plano α entonces la recta AB está contenida en α.

Diremos que cuatro o más puntos son *coplanares* si pertenecen al mismo plano. Dos o más rectas son *coplanares* si están en el mismo plano.



Axioma IV. Si dos planos distintos α y β tienen un punto común, entonces su intersección es una recta.

Dos rectas se dicen *secantes* si tienen un punto en común. Dos rectas coplanares se dicen *paralelas* si no se cortan. Se dice que dos rectas *se cruzan* si no son coplanares.

Proposición 1: Dada una recta r y un punto A que no está en r, existe un único plano que contiene a r y a A.

Dem.: Sean P y Q dos puntos distintos de r. Como A no está en r, entonces A, P y Q no están alineados y hay un único plano α que los contiene (Axioma III). Por el axioma III, r = PQ está contenida en α.□

Proposición 2: i) Si dos rectas son secantes, entonces son coplanares.
ii) Dada una recta r, existe una recta s tal que r y s no son coplanares.

Dem.: i) Si A es el punto que tienen en común las rectas secantes r y s, sea Q un punto de r distinto de A y sea R un punto de s distinto de A. Entonces hay un único plano que contiene a A, Q y R. Teniendo en cuenta la proposición anterior, ese plano contiene a r = AQ y a s = AR.

ii) Sean A y B dos puntos distintos de r, de modo que r = AB. Sea P un punto que no está en r. P y r determinan un único plano α que contiene a ambos. Sea Q un punto que no está en α (Figura 2).
Las rectas r y s = PQ no son coplanares puesto que si hubiese un plano β que contuviese a ambas, α y β deberían coincidir (ambos contienen a A, B y P no alineados), y sin embargo Q pertenece a β y no a α.□

Proposición 3: i) Dado un punto, hay una recta que no lo contiene.
ii) Por un punto pasan infinitas rectas.
iii) Por una recta pasan infinitos planos.

Dem.: i) Sea P un punto. Sea Q otro punto. Sea R un punto que no está en la recta PQ. Entonces QR es una recta que no contiene a P. Si no fuera así, P, Q y R serían colineales, sería PQ = QR y R estaría en PQ; una contradicción.

ii) Sea P un punto y r una recta que no contiene a P. Si X e Y son puntos distintos de r, las rectas PX y PY son distintas (Figura 1). En efecto, si las rectas PX y PY fuesen iguales, entonces los puntos X, Y y P estarían alineados; como X e Y determinan r, P pertenecería a r, lo que va contra la condición de partida.
Así pues, cada punto de r determina junto con P una recta diferente.

iii) Sea r la recta dada. Sea s una recta que no es coplanar con r. Si X e Y son puntos diferentes de s, los planos determinados por r y X y por r e Y, respectivamente, son distintos.□

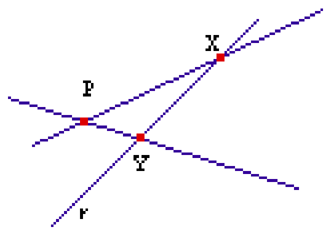


Figura 1

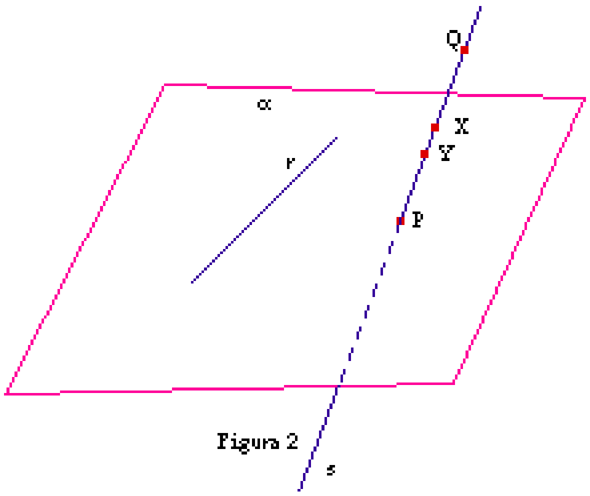


Figura 2

2. ALGUNOS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS BÁSICOS

Axioma V. De tres puntos alineados y distintos, uno de ellos y sólo uno está entre los otros dos.

Dados dos puntos A y B, llamamos *segmento* de extremos A y B al conjunto de puntos de la recta AB que están entre A y B. Lo indicamos por $\overline{AB}$.

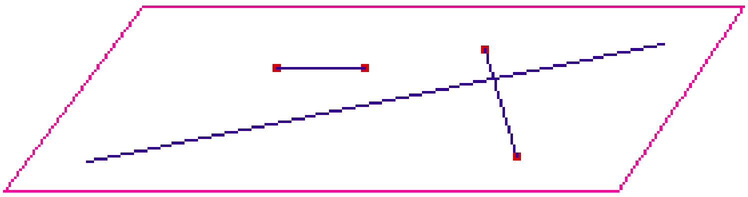
Axioma VI. Un punto A situado en una recta la divide en dos partes llamadas *semirrectas*, y el punto A se llama origen de cada semirrecta. Si dos puntos pertenecen a una de dichas semirrectas, entonces el punto origen A no está entre ellos. Si dos puntos pertenecen a distintas semirrectas, entonces A está entre ellos.

Estas semirrectas determinadas por A en la recta se llaman *semirrectas opuestas* o *complementarias*.

La semirrecta de origen A que contiene el punto B la indicaremos por A_B.

En lo que resta de esta sección y en las secciones 3, 4, 5 y 6 los axiomas y proposiciones se refieren al plano.

Axioma VII. Una recta r contenida en un plano α divide a éste en dos regiones no vacías llamadas *semiplanos*. Si los dos extremos de un segmento cualquiera pertenecen a uno de los semiplanos y ninguno está sobre la recta, entonces el segmento no corta a la recta. Si los extremos del segmento pertenecen a distintos semiplanos, entonces el segmento corta a la recta.



Para designar un semiplano usaremos la recta que lo determina y un punto contenido en él. Por ejemplo, r_A indica el semiplano determinado por la recta r que contiene el punto A (A es un punto del plano que no está en r).

Consecuencias. 1. Si $\overline{AB}$ no corta a r, entonces A y B están en el mismo semiplano con respecto a r.

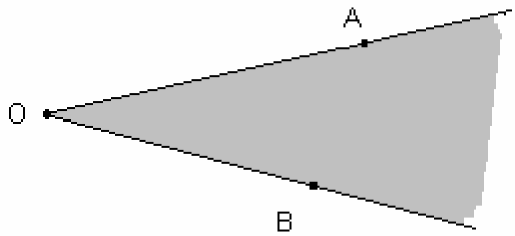
2. Si A, B, C no están en r, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ cortan a r, entonces $\overline{AC}$ no corta a r.

3. Si A está en r y B no está en r, entonces A_B está contenida en r_B.

4. Si A, B están en r_C, entonces el segmento $\overline{AB}$ está contenido en r_C.

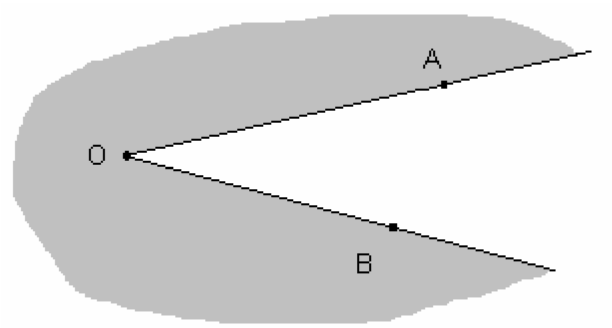
Dem.: La demostración de los puntos 1, 2 y 4 se deja como ejercicio.
Para 3 razonamos por reducción al absurdo: Supongamos que A_B no está contenida en r_B. En ese caso existirá un punto P de A_B que no está en r_B. Como P está en A_B entonces P está entre A y B, o P = B, o B está entre A y P. Por otro lado, como P no está en r_B entonces B y P están en semiplanos distintos con respecto a r. Por el A.VII $\overline{PB}$ y r tienen un punto en común y este punto será A (¿por qué?). De donde se deduce que A está entre P y B, lo cual es una contradicción.□

Dadas dos semirrectas O_A y O_B que no son opuestas, se llama *ángulo convexo* $A\hat{O}B$ a la intersección de los semiplanos OA_B y OB_A . El punto O se llama el *vértice* del ángulo y las semirrectas los *lados*.



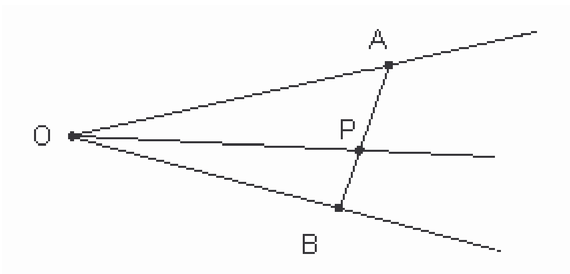
Si las semirrectas O_A y O_B coinciden, se dice que el ángulo $A\hat{O}B$ es *nulo*. Si las semirrectas O_A y O_B son opuestas, se dice que forman un *ángulo llano*.

A cada ángulo convexo $A\hat{O}B$ corresponde un *ángulo cóncavo*, que es la región del plano formada por los puntos que no están en $A\hat{O}B$, ni en las semirrectas que lo determinan, ni son el vértice.



Dos ángulos se dicen *consecutivos* si tienen el mismo vértice y un lado común. Dos ángulos se dicen *adyacentes* si son consecutivos y sus lados no comunes son semirrectas complementarias. Dos ángulos se dicen *opuestos por el vértice* si tienen el mismo vértice y los lados de uno son semirrectas opuestas de los lados del otro.

Proposición. Dado un ángulo convexo $A\hat{O}B$, si P está en el segmento $\overline{AB}$ entonces la semirrecta O_P está en el ángulo $A\hat{O}B$.



Dem.: Por un resultado anterior, A_B está en el semiplano OA_B. Entonces P está en OA_B. Por el mismo resultado anterior, O_P está en el semiplano OA_B.

Análogamente, O_P está en el semiplano OB_A. Por lo tanto, O_P está en $A\hat{O}B$.□

¿Es cierto el siguiente enunciado? Si P está en $A\hat{O}B$ entonces la semirrecta O_P corta a $\overline{AB}$ en un punto entre A y B.

Dados tres puntos no alineados A, B y C, se llama *triángulo* ΔABC a la figura formada por los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$. El *interior del triángulo* es la intersección de los tres semiplanos AB_C, BC_A y AC_B.

Sean $P_1, P_2, \ldots, P_n$ puntos distintos del plano. El conjunto de segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ... , $\overline{P_{n-1}P_n}$, es una *poligonal* si los segmentos se cortan solo en sus extremos y los puntos P_i, P_{i+1}, P_{i+2} no están alineados para i = 1, 2, ... , n – 2.

El conjunto de segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ... , $\overline{P_{n-1}P_n}$, $\overline{P_nP_1}$ es una *polígonal cerrada* o *polígono* si los segmentos se cortan solo en sus extremos y los puntos P_i, P_{i+1}, P_{i+2} no están alineados para i = 1, 2, ... , n – 2. Los puntos P_1, P_2, ... , P_n se llaman *vértices* del polígono y los segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ... , $\overline{P_{n-1}P_n}$, $\overline{P_nP_1}$ se llaman *lados* del polígono. Dos vértices son *consecutivos* si son extremos de un mismo lado. Un segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono se llama *diagonal*.

Un polígono de vértices $P_1, P_2, \ldots, P_n$ es un *polígono convexo* si para cada lado $\overline{P_iP_{i+1}}$ los vértices restantes están todos en el mismo semiplano respecto de P_iP_{i+1}. El *interior* de un polígono convexo es la intersección de los semiplanos determinados por cada uno de los lados que contienen los vértices restantes. Cada uno de los ángulos convexos $P_i\hat{P}_{i+1}P_{i+2}$ determinado por tres vértices consecutivos de un polígono convexo se llama *ángulo interior* del polígono.

3. LONGITUD DE SEGMENTOS

Axioma VIII. (*Axioma de la regla*) Denotemos por S el conjunto de todos los segmentos del plano, incluyendo segmentos nulos. Existe una aplicación ℓ: S $\rightarrow$ $\mathbf{R}^+$, llamada *longitud*, tal que:

1) Para cada $\lambda \in \mathbf{R}^+$ y cada semirrecta del plano, existe un único segmento s, con un extremo en el origen de la semirrecta y contenido en la misma, tal que $\ell(s) = \lambda$.

2) Si $X \in \overline{AB}$, $\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{AX}) + \ell(\overline{XB})$.

Observaciones

1. Aplicando la segunda condición, con X = B = A, se deduce que la longitud de un segmento nulo es 0.
2. Dado un segmento $\overline{AB}$ existe un punto M en $\overline{AB}$, llamado *punto medio*, tal que $\ell(\overline{AM}) = \ell(\overline{MB})$.
3. El axioma VIII permite identificar cada recta con el conjunto de los números reales. Más precisamente, sea r una recta, A y B puntos de r tales que $\ell(\overline{AB}) = 1$. Identificamos A con el número 0 y B con el 1. Sea P otro punto de r. Si P está en la semirrecta A_B, identificamos P con $\ell(\overline{AP})$. Si P está en la semirrecta opuesta, identificamos P con $-\ell(\overline{AP})$. Por la condición 1) del axioma, habrá en la recta un punto para cada número real.

Dos segmentos se dicen *congruentes* o *iguales* si tienen la misma longitud.

La *distancia* entre dos puntos A y B es la longitud del segmento $\overline{AB}$.

El *perímetro* de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados.

Circunferencia y círculo

Dado un punto O y $r \in \mathbf{R}^+$, la *circunferencia* de *centro* O y *radio* r es el conjunto de los puntos del plano cuya distancia a O es r. El *círculo* de *centro* O y *radio* r es el conjunto de los puntos del plano cuya distancia a O es menor o igual que r. Una *cuerda* es un segmento que une dos puntos de la circunferencia. Un *diámetro* es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. Si A y B son dos puntos distintos de una circunferencia, la recta AB determina dos semiplanos α y β, y así la circunferencia queda dividida en dos partes: una contenida en α y la otra en β. Cada una recibe el nombre de *arco* de extremos A y B.

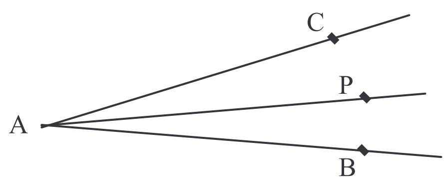
4. MEDIDA DE ANGULOS

Axioma IX. Denotemos por *A* el conjunto de todos los ángulos convexos, y sea [0, 180] el intervalo cerrado de números reales comprendidos entre 0 y 180. Existe una aplicación g: $A \rightarrow [0, 180]$ verificando:

1) La imagen por g de todo ángulo llano es 180.

2) Para cualquier número real $\lambda \in [0, 180]$, cualquier semiplano y cualquier semirrecta A_B contenida en el borde del semiplano, existe una única semirrecta A_C contenida en el semiplano considerado tal que $g(B\hat{A}C) = \lambda$.

3) Si Ap está contenida en el ángulo $B\hat{A}C$, entonces $g(B\hat{A}C) = g(B\hat{A}P) + g(P\hat{A}C)$.



El número g asociado a un ángulo convexo es la *medida* del ángulo en grados.

Dos ángulos se dicen *congruentes* o *iguales* si tienen la misma medida.

Consecuencias

1. La medida de un ángulo nulo es 0.
2. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
3. La suma de las medidas de dos ángulos adyacentes es 180º.
4. Un ángulo de vértice A contiene una semirrecta de vértice A, llamada *bisectriz*, que divide el ángulo en dos ángulos congruentes.

Un ángulo convexo es *recto* si mide 90º, *agudo* si mide menos de 90º y *obtuso* si mide más de 90º.

La medida de un ángulo cóncavo es igual a 360º menos la medida del ángulo convexo correspondiente.

Dos rectas secantes son *perpendiculares* si al cortarse forman ángulos rectos.

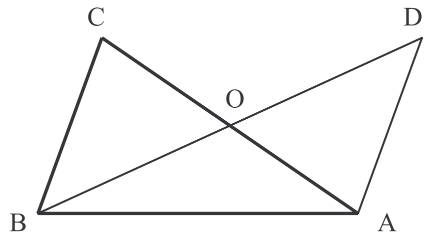
Diremos que dos triángulos ΔABC y $\Delta A_1B_1C_1$ son congruentes o iguales si sus lados y sus ángulos son congruentes, es decir, si $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$, $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$, $\hat{A} = \hat{A}_1$, $\hat{B} = \hat{B}_1$, $\hat{C} = \hat{C}_1$.

Axioma X. *Primer criterio de congruencia de triángulos* (LAL). Si dos triángulos tienen dos lados correspondientes congruentes y el ángulo comprendido entre ellos también es congruente, entonces los triángulos son congruentes.

Proposición: La suma de dos ángulos cualesquiera de un triángulo es menor que uno llano.

Dem.: Sea ΔABC el triángulo dado. Veremos que la suma de los ángulos A y C es menor que 180º. Sea O el punto medio del lado $\overline{AC}$. En la semirrecta opuesta a O_B se construye un segmento $\overline{OD}$ congruente a $\overline{OB}$. Entonces $\Delta AOD = \Delta COB$, pues tienen iguales los ángulos de vértice O, $\overline{AO} = \overline{OC}$ y $\overline{OD} = \overline{OB}$. Luego $O\hat{C}B = O\hat{A}D$. Por otro lado, $B\hat{A}D = B\hat{A}O + O\hat{A}D$. Entonces $B\hat{A}D = B\hat{A}O + O\hat{C}B = B\hat{A}C + A\hat{C}B$, que son los ángulos de ΔABC que nos interesan. Ahora, $B\hat{A}D$ es menor que un llano porque D no está en la recta AB. Por lo tanto,

$B\hat{A}C + A\hat{C}B < 180º$.□

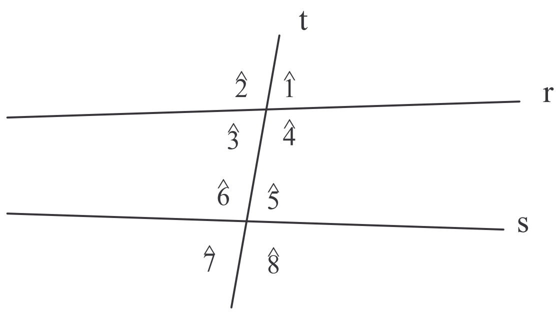


5. RELACION DE PARALELISMO EN EL PLANO

Axioma XI. *De paralelismo*.
Por un punto exterior a una recta pasa una y sólo una paralela a dicha recta.

Consecuencias. 1. Si r y s son secantes y t es paralela a r, entonces t y s son secantes.
2. Si r, s, t rectas distintas dos a dos, r y s son paralelas y s y t son paralelas, entonces r y t son paralelas.

Sean r, s y t tres rectas tales que t es secante a las otras dos, de modo que se forman los ocho ángulos que se indican en la figura siguiente:

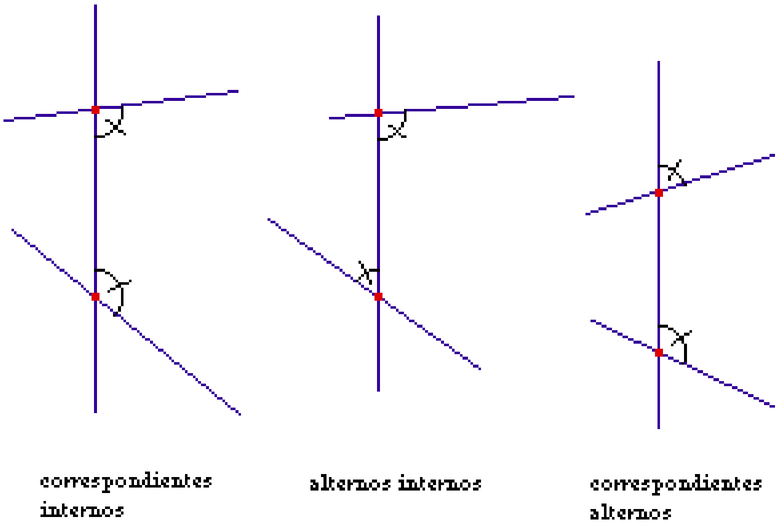


Los ángulos $\hat{4}$ y $\hat{5}$ se llaman *correspondientes internos*. Lo mismo ocurre con $\hat{3}$ y $\hat{6}$.

Los ángulos $\hat{3}$ y $\hat{5}$ se llaman *alternos internos*. Lo mismo ocurre con $\hat{4}$ y $\hat{6}$.

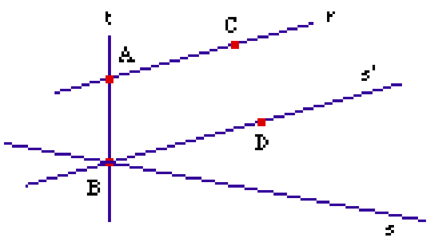
De forma análoga, se definen los ángulos correspondientes externos y alternos externos.

Los ángulos $\hat{1}$ y $\hat{5}$ se llaman *correspondientes alternos*. Lo mismo ocurre con $\hat{4}$ y $\hat{8}$, $\hat{2}$ y $\hat{6}$, $\hat{3}$ y $\hat{7}$.



Caracterización de rectas paralelas *en función de los ángulos correspondientes internos definidos en las mismas por una secante.*
Sean r y s dos rectas y t una secante a ambas. Las rectas r y s son paralelas si y sólo si los ángulos correspondientes internos determinados por dichas rectas y la secante t suman 180º.

Dem.: Supongamos que los correspondientes internos suman 180º, y que r y s no son paralelas. En ese caso se formaría un triángulo con dos ángulos cuya suma fuese uno llano, lo que contradice un resultado anterior.
Supongamos que r y s son paralelas y que los ángulos correspondientes internos no suman 180º. En la situación de la figura, en el semiplano AB_C se puede considerar una semirrecta contenida en la recta s', tal que los ángulos BAC y ABD sumen uno llano. En ese caso, aplicando la implicación que acabamos de probar podemos afirmar que r y s' son paralelas. Así por un mismo punto B pasan dos rectas paralelas y distintas a r, lo que contradice el axioma de las paralelas.



Obsérvese que este criterio de caracterización anterior tiene sus equivalentes en función de alternos internos iguales y correspondientes alternos iguales.

Proposición: La suma de los tres ángulos de un triángulo es 180º.

Dem.: Dado ΔABC, sea r la recta paralela a AB que pasa por C. Sea D un punto de r que está en BC_A y sea E un punto de r que está en AC_B. Como r ∥ AB entonces $B\hat{A}C = A\hat{C}D$ y $A\hat{B}C = B\hat{C}E$. Luego, la suma de los ángulos del triángulo:

$$B\hat{A}C + A\hat{B}C + A\hat{C}B = A\hat{C}D + A\hat{C}B + B\hat{C}E = D\hat{C}E = 180º. \square$$

Proposición: Si r y s son paralelas y r y t son perpendiculares, entonces s y t son perpendiculares.

Dem.: Se deja como ejercicio.

Proposición: Por un punto cualquiera siempre se puede trazar una y solo una perpendicular a una recta dada.

Dem.: Sea r una recta y P un punto.

Si P está en r, por el axioma IX se puede trazar una recta que pase por P y sea perpendicular a r.

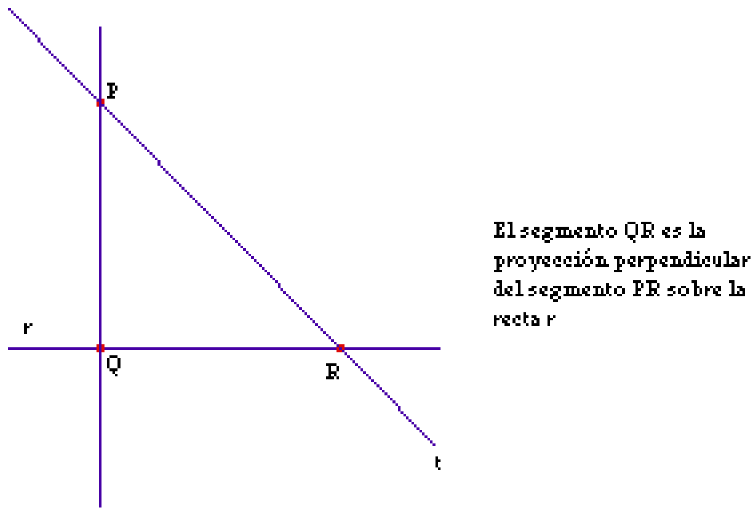
Si P no está en r, existe una única recta s paralela a r que pasa por P. Por lo anterior, existe una única recta t perpendicular a s que pasa por P. Entonces r y t son perpendiculares. Además t es única, pues si hubiera otra perpendicular a r que pasa por P, serían dos perpendiculares a s por P, lo que contradice el axioma IX.□

Se llama *mediatriz* de un segmento AB a la recta perpendicular a AB que pasa por el punto medio de AB.

Sea r una recta y P un punto cualquiera. Sea t la perpendicular a r que pasa por P y sea Q el punto de intersección de r y t. Dicho punto Q recibe el nombre de *pie de la perpendicular* o *proyección* de P sobre r. Obsérvese que Q = P si P está en r.

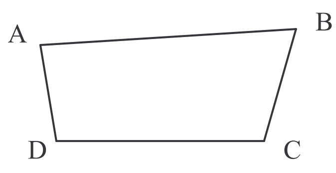
Sea r una recta y P un punto cualquiera. Si Q es el pie de la perpendicular a r que pasa por P, entonces se llama distancia de P a r, a la longitud del segmento $\overline{PQ}$, y tal distancia se denota por d(P,r). Obsérvese que si P está en r, entonces d(P,r) = 0.

Sea r una recta y P un punto que no pertenece a r. Sea t una recta secante a r, pero no perpendicular y que pasa por P. La recta t recibe el nombre de recta *oblicua* a r (que pasa por P) y el punto R de corte de t y r se llama *pie de la oblicua*. Si Q es el pie de la perpendicular a r que pasa por P, el segmento $\overline{QR}$ se llama *proyección perpendicular* de $\overline{PR}$ (segmento oblicuo) sobre r.



6. CUADRILATEROS

Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados. Si los vértices de un cuadrilátero son, dados ordenadamente, ABCD, los lados AB y CD se dicen opuestos. También son opuestos los lados AD y BC. Los ángulos A y C se llaman ángulos opuestos y también los ángulos B y D.



Se llama *paralelogramo* a un cuadrilátero en el que los dos pares de lados opuestos son paralelos.

Un *rectángulo* es un cuadrilátero en el que todos los ángulos son rectos.

Un *rombo* es un paralelogramo con todos los lados iguales.

Un *cuadrado* es un rectángulo con todos los lados iguales.

Se llama *trapecio* a cualquier cuadrilátero convexo en el que sólo un par de lados opuestos son paralelos. Si el trapecio tiene dos ángulos rectos, se llama *trapecio rectángulo*. Un trapecio se dice *isósceles* si tiene los dos lados no paralelos iguales. Un *trapecio escaleno* es un trapecio que no es ni rectángulo ni isósceles.

7. ALGUNOS RESULTADOS RELATIVOS A RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

A continuación vamos a enunciar una serie de definiciones y resultados relacionados con algunos aspectos de la geometría en el espacio, tales como paralelismo entre rectas y planos, paralelismo entre planos y rectas que se cruzan. Estos resultados no van a ser demostrados en clase, aunque pueden abordarse como ejercicio por el alumno. El objetivo de su presentación es:

1. Suscitar la reflexión sobre las situaciones que se plantean, y que exigen o desarrollan cierta visualización del problema.
2. Posibilitar la resolución de ejercicios sencillos relacionados con distintas figuras del espacio

TEOREMA 1. Todo plano divide el espacio en dos semiespacios. Si dos puntos están en el mismo semiespacio, el segmento determinado por ellos no corta al plano. En cambio, si los puntos pertenecen a semiespacios distintos el segmento sí corta el plano.

Recordemos que en el espacio se dice que dos rectas son paralelas si están en el mismo plano y no se cortan.

TEOREMA 2. a) Dados una recta en el espacio y un punto que no está en la recta, se puede trazar una y sólo una recta paralela a la dada y que pasa por el punto dado.
b) Si la recta r es paralela a las rectas s y t entonces s y t son paralelas.

Una recta y un plano se dicen paralelos si no se cortan.

TEOREMA 3. Sea α un plano y r una recta. Si en α hay una recta s paralela a r, entonces α y r son paralelos.

TEOREMA 4. Si una recta es paralela a dos planos secantes, entonces es paralela a la recta de intersección.

Dos planos se denominan paralelos si no se cortan.

TEOREMA 5. Si un plano α es paralelo a dos rectas secantes, entonces α es paralelo al plano determinado por dichas rectas secantes.

TEOREMA 6. Por todo punto A exterior al plano α pasa un único plano paralelo a α.

TEOREMA 7. Si una recta r y un plano α se cortan, entonces r corta a cualquier plano paralelo a α, y α corta a cualquier recta paralela a r.

Recordemos que se dice que dos rectas se cruzan si no están en el mismo plano (por tanto no se cortan, pero no son paralelas).

TEOREMA 8. Si dos rectas se cruzan, hay planos paralelos que las contienen.

GEOMETRÍA BÁSICA

EJERCICIOS TEMA III: CONCEPTOS FUNDAMENTALES Y AXIOMÁTICA DE LA GEOMETRÍA

1. a) Sea r una recta y sean A y F dos puntos distintos de r. Sean B y G puntos en distintos semiplanos con respecto a r. Demuestra que $\overline{FB}$ no corta a la semirrecta A_G.

b) Demuestra el *Teorema de Pasch*: Dado un triángulo ΔABC y una recta r, si r pasa por un punto E entre A y C entonces r corta a $\overline{AB}$ o a $\overline{BC}$.

c) Sea ΔFBC y A un punto entre F y C. Sea D un punto tal que D y B están en el mismo semiplano con respecto a FC. Demuestra que entonces A_D corta a $\overline{FB}$ o a $\overline{BC}$.

d) Sea $B\hat{A}C$ un ángulo convexo. Demuestra que si D es un punto de $B\hat{A}C$ entonces A_D corta $\overline{BC}$ en un punto entre B y C.

e) En el plano se tienen cuatro puntos distintos A, B, C y D. Sea r una recta que no pasa por ninguno de ellos. Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ cortan la recta r y el segmento $\overline{BC}$ no la corta. ¿Corta el segmento $\overline{AD}$ la recta r?

f) Sean A, B, C y D cuatro puntos del plano, de los cuales no hay tres colineales. Demuéstrese que si los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se cortan en un único punto, los puntos B y D se hallan en un mismo semiplano con respecto a la recta AC.

g) Demuestra que las diagonales de un cuadrilátero convexo se cortan en un punto.

2. Un subconjunto S del plano es *convexo* si para cada par de puntos A y B de S, el segmento que une A y B está contenido en S.

a) Demuestra que un semiplano es un conjunto convexo.

b) Prueba que un ángulo convexo es un conjunto convexo.

c) Prueba que el interior de un triángulo es un conjunto convexo.

3. Recuento de puntos y rectas en distintas configuraciones.

a) ¿Pueden dibujarse cuatro rectas de forma que las intersecciones entre ellas se reduzcan a un punto?, ¿a dos, tres, ... seis, más de seis puntos? ¿En cuántos puntos pueden cortarse dos, tres, cuatro, cinco rectas?, y ¿cuántas regiones planas se determinan en cada caso?

b) ¿Cuántas rectas determinan seis puntos?

c) En una hoja de papel, traza cuatro rectas, de manera que quede dividida en 11 regiones distintas. ¿Podrías trazarlas de otra forma con el objetivo de obtener más de 11 regiones?

d) En el plano, si tenemos un cierto número n de rectas, diremos que este conjunto de rectas "está en posición general" si dos rectas cualesquiera se cortan en un punto y no hay tres que tengan un punto común. Dibuja tres rectas que estén en posición general y tres que no lo estén. Halla los cuatro casos de disposición mutua de tres rectas.

e) ¿Cuántos casos de disposición de cuatro rectas puedes obtener? Dibújalos

f) Estima cuántos puntos aparecen como intersección de n rectas que están en posición general. ¿Cómo podrías razonar que la fórmula obtenida es válida?

4. a) ¿Pueden hallarse tres puntos A, B y C alineados tal que AB = 5, BC = 6 y AC = 7?

b) Si A, B y C son tres puntos alineados, tal que AB = 5 y BC = 6, ¿cuánto mide AC?

5. a) Demuestra que todo punto de la mediatriz del segmento AB equidista de A y de B. Demuestra que también es cierto lo recíproco de lo anterior: Si un punto P dista de A lo mismo que de B, entonces P está en la mediatriz del segmento AB.
Lo probado es este apartado se expresa diciendo que "la mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de puntos del plano que distan lo mismo de los extremos del segmento".

b) Prueba que dos mediatrices de un triángulo se cortan en un punto. Deduce, usando a), que el punto de corte de dos mediatrices pertenece a la tercera mediatriz.
Teniendo en cuenta lo anterior se deduce que las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto, que recibe el nombre de *circuncentro* del triángulo.

c) ¿El circuncentro de un triángulo es centro de una circunferencia que pasa por los tres vértices de dicho triángulo? ¿Cómo se expresa la posición entre el triángulo y tal circunferencia? ¿Es el circuncentro un punto interior del triángulo?

6. Un triángulo es *isósceles* si tiene dos lados iguales; el tercer lado se llama *base* del triángulo isósceles. Demuestra que en todo triángulo isósceles los ángulos relativos a la base son iguales.

7. Una *mediana* de un triángulo es el segmento que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto.
Un triángulo ΔABC tiene tres *alturas*, que son: el segmento que une C con el pie de la perpendicular a AB que pasa por C, el segmento que une B con el pie de la perpendicular a AC que pasa por B, y el segmento que une A con el pie de la perpendicular a BC que pasa por A.

1) Demuestra que dos medianas cualesquiera de un triángulo se cortan en un punto.

2) Demuestra que las rectas que contienen dos alturas de un triángulo se cortan en un punto.

8. 1) Demuestra que en un rombo las diagonales son bisectrices de sus ángulos.

2) Demuestra que las diagonales del rombo son perpendiculares y se cortan en el punto medio de ambas.

9. 1) Demuestra que en una circunferencia no existen tres puntos alineados.

2) ¿Cuántos puntos en común deberán tener una circunferencia y una recta secante a ella?

Los ejercicios 10, 11 y 12 se refieren al espacio.

10. Se nos plantea la siguiente cuestión:
Si *r* y *s* son dos rectas que se cruzan y C es un punto que no está en ninguna de ellas. ¿Es siempre posible trazar por el punto C una recta que corte a las rectas *r* y *s* ?

Tratando resolver esta pregunta seguimos los siguientes pasos, cuyas conclusiones has de justificar:

1. Investigando. Si hay una recta *t* que pasa por C y corta a *r* y a *s*, entonces *t* está contenida en el plano determinado por C y *r*, al que denotamos por α, y también *t* está contenida en el plano determinado por C y *s*, al que denotamos por β. Esto nos aporta la siguiente idea y línea de actuación.

2. Idea. Considerar los planos mencionados en el punto 1. y obtener su intersección.

3. Actuando. Si α es el plano que contiene a C y *r*, y β es el plano que contiene a C y *s*, α y β se cortan en una recta que pasa por C, y que llamamos *t*. ¿Podemos asegurar que *t* corta a *s* y *r*?

4. Tras una prueba. Posiciones posibles entre *t* , y *r* y *s*: que *t* no corte ni a *r* ni a *s*, que corte a una de ellas y no corte a la otra, o que corte a las dos.

¿Puede suceder que no corte ni a *r* ni a *s*? No, porque en ese caso existiría un plano que contuviese a *r* y *s*, cosa que no es posible.

¿Puede suceder que corte a una de ellas y no a otra? Después de reflexionar, concluimos que sí es posible que eso suceda como ilustra una situación que describimos.

5.Conclusión final: ....

11. Sean r_1, r_2, r_3, ... una familia de rectas. Demuestra que si dos cualesquiera de estas rectas se cortan, entonces todas ellas pasan por un mismo punto o pertenecen a un mismo plano.

12. Se consideran dados $2n$ puntos A_1, A_2, A_3, ..., A_{2n} y un plano α que no pasa por ninguno de estos puntos. Demuéstrese que el plano α corta como máximo n^2 de los segmentos A_pA_q que unen estos puntos dos a dos.