GEOMETRÍA BÁSICA

TEMA I: INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA

1. ACERCA DEL CONCEPTO DE GEOMETRÍA
2. LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA: MÉTODO ANALÍTICO, MÉTODO AXIOMÁTICO
3. LA NECESIDAD DE LA DEMOSTRACIÓN

---

1. ACERCA DEL CONCEPTO DE GEOMETRÍA

Si queremos comenzar dando una definición moderna de Geometría debemos decir que es "el conjunto de las propiedades que permanecen invariantes en un espacio cuando éste ha sido sometido a un determinado conjunto de transformaciones". Quizá uno, inicialmente, no entienda muy bien lo que eso significa, pero una lectura detallada al menos hace distinguir los siguientes elementos esenciales de *una* geometría:

- *Espacio o conjunto de puntos sobre el que se actúa*
- *Grupo de transformaciones que se aplica (de movimientos, de semejanzas, de proyecciones, ... según el caso) y que clasifica figuras (figuras equivalentes)*
- *Conjunto de propiedades que se conservan por dicho grupo de transformaciones*

A dicho concepto, establecido por Felix Klein a finales del siglo XIX, se llegó después de una profunda evolución, a todos los niveles, de lo que inicialmente se entendió por geometría.

Si nos atenemos al significado etimológico de la palabra Geometría, debemos decir que es el de "medida de la tierra". El origen de este término para designar a "la ciencia que estudia las propiedades del espacio y las figuras que se construyen en él" está en función del tipo de prácticas de corte geométrico que se produjeron inicialmente. Dichas prácticas tuvieron relación con la delimitación de terrenos o la medida de sus superficies. El historiador griego Herodoto atribuye a los agrimensores egipcios el comienzo de la Geometría, pero otras civilizaciones antiguas (Persa, Hindú, China), poseían conocimientos geométricos. Por ejemplo, en Babilonia se conocía el teorema de Pitágoras mucho antes de que naciera Pitágoras. En esa primera época los conocimientos eran de carácter empírico y se manejaban intuitivamente algunos casos sencillos de teoremas geométricos. Para las aplicaciones prácticas bastaba, en muchos casos, un resultado aproximado. En Babilonia, hacia el 2000-1600 a.C. consideraban la circunferencia como 3 veces el diámetro, es decir $\pi \approx 3$. Este mismo valor usaban los arquitectos romanos y aparece también en tratados chinos. Los egipcios aproximaban, hacia 1800 a.C., $\pi \approx (16/9)^2 \approx 3{,}16$.

Sin embargo, los pensadores griegos, comenzando por Tales de Mileto, fueron los primeros en obtener resultados geométricos mediante el razonamiento deductivo. Es Euclides, en el siglo IV a. de C., el que tratando de estructurar todos los resultados geométricos conocidos hasta ese momento construye la Geometría como teoría con un método que se denomina *axiomático*, y que aunque fue creado específicamente para la Geometría, actualmente ese método se emplea en muchas ramas de las Matemáticas.

2. LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA: MÉTODOS ANALÍTICO Y AXIOMÁTICO

Vamos a pasar a hablar del ***método axiomático*** para la construcción de la Geometría como teoría matemática teniendo en cuenta los siguientes aspectos

1. Es el método geométrico por excelencia desde el punto de vista histórico
2. Hay otros tratamientos posibles: método analítico
3. Se produce como consecuencia del análisis del conocimiento con las leyes de la deducción lógica

Es precisamente el último punto por el que nos interesamos a continuación, para lo que pasamos a distinguir dos tipos de conocimiento que se puede producir.

La relación con nuestro entorno nos proporciona un conocimiento directo del espacio que nos rodea, y es lo que constituye en nosotros la *intuición geométrica*. Mediante la intuición se produce la primera aproximación a la geometría. Por ejemplo, la intuición nos puede llevar a concluir que, en el espacio que nos rodea

Por dos puntos pasa una única recta

Después se produce una aproximación reflexiva, no directa, de naturaleza más abstracta. Por ejemplo, admitiendo que *por dos puntos pasa una única recta*, la *reflexión* sobre este hecho conlleva que

Dos rectas cualesquiera o bien son coincidentes, o bien tienen un único punto en común, o bien no tienen ningún punto en común.

Estos dos modos de aproximación a la Geometría, por *INTUICIÓN* (de forma sensorial, creativa, subjetiva) y por *ABSTRACCIÓN* (analítico y objetivo) son, como puede apreciarse, bien diferentes pero complementarios, y pueden considerarse como fases del desarrollo del pensamiento.

El análisis del conocimiento con las leyes de la deducción lógica, para que así se pueda expresar y comunicar por medio del lenguaje, constituyó el método axiomático, inventado por los griegos, y caracterizado por los siguientes elementos

1. *Conceptos básicos* de los que se parte: espacio, punto, recta, ...

2. *Axiomas*: Propiedades o relaciones básicas entre los objetos de los que admitimos su veracidad. Por ejemplo: "por dos puntos pasa una única recta".
En el caso que nos ocupa, el de la geometría, hemos de decir que el método axiomático descansa, en buena medida, sobre nuestra concepción intuitiva de la realidad. La veracidad de esas relaciones y propiedades está respaldada por su evidencia intuitiva.

3. *Deducción de propiedades* sobre las figuras geométricas sin más apelación a la intuición, sino con el uso exclusivo de los axiomas y las reglas del razonamiento lógico.
La validez de las conclusiones no requiere su verificación experimental, sino la *corrección del razonamiento empleado*. Sobre esto volveremos en el último apartado de este primer capítulo, en el que se tratarán algunos aspectos de la teoría de la demostración.

En el siglo XVII, René Descartes introduce un nuevo método para la demostración de propiedades geométricas, el llamado ***método analítico***. Esencialmente la idea consiste en considerar que las figuras geométricas están en un "espacio" cuyos puntos pueden representarse por medio de coordenadas (conjuntos ordenados de números). Así, los puntos de una figura plana podrían ser representados por pares ordenados de números reales.

A continuación vamos a **demostrar un mismo enunciado utilizando cada uno de los métodos, con el objetivo de clarificarlos**. Consideremos el siguiente enunciado:

En un cuadrado ABCD, la diagonal $\overline{BD}$ es dividida en tres partes iguales por las rectas trazadas desde el vértice A a los puntos medios M y N de los lados $\overline{CD}$ y $\overline{CB}$ respectivamente.

<u>*Empleando el método axiomático*</u>.

En la situación de la siguiente figura, debemos probar que las longitudes de los segmentos DP, PQ y QB son iguales.

Para ello vamos a utilizar como resultados supuestamente conocidos los siguientes:

- En todo paralelogramo las diagonales se cortan en el punto medio de ambas.
- Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado baricentro, y se verifica que "si G es el baricentro de un triángulo RST, del que RQ es una mediana, entonces se tiene que RG = 2 · GQ".

Teniendo en cuenta lo anterior, y la figura 1 que aparece a continuación, podemos deducir las siguientes relaciones:

AM y DO son medianas del triángulo ADC, y P es el baricentro de dicho triángulo,
por tanto DP = 2 · OP y DO = 3 · OP.
En el triángulo ABC se tiene una situación similar. Así BQ = 2 · OQ y BO = 3 · OQ.
De las relaciones entre segmentos: BO = DO y OP = OQ, se concluye que PQ = DP = BQ.

Como puede observarse, para obtener el resultado deseado, ha sido preciso apoyarse en otras propiedades que hemos admitido y que dentro de una construcción de la Geometría deberíamos haber probado con anterioridad. El método axiomático es por tanto sumamente jerarquizado: *se han de conocer bien las propiedades geométricas que uno puede manejar en la demostración de un resultado nuevo*.

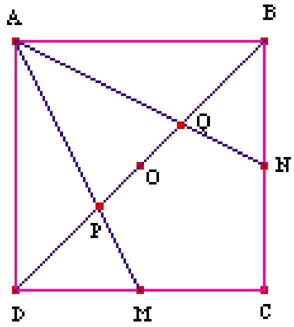


Figura 1

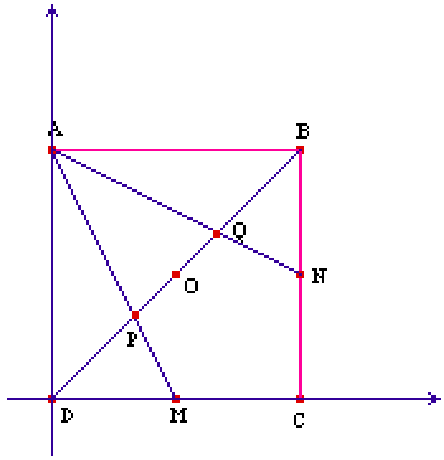


Figura 2

<u>*Empleando el método analítico*</u>

Teniendo en cuenta la figura 2 anterior, se puede observar que D es el origen de un sistema de coordenadas cartesiano cuyos ejes pasan por A y C respectivamente. Si además admitimos como unidad de longitud el lado del cuadrado, se tiene que las coordenadas de los puntos son :

D(0,0), A(0,1), B(1,1), M(1/2,0), N(1,1/2), C(1,0)

Mediante técnicas conocidas por el alumno se obtiene que la ecuación

- de la recta BD es $y - x = 0$
- de la recta AM es $y + 2x - 1 = 0$
- de la recta AN es $2y + x - 2 = 0$

El punto P es la intersección de las rectas BD y AM, por tanto sus coordenadas pueden ser determinadas mediante la resolución del sistema

$$\begin{aligned} y - x &= 0 \\ y + 2x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es P(1/3, 1/3).

El punto Q es la intersección de las rectas BD y AN. La resolución del sistema

$$\begin{aligned} y - x &= 0 \\ 2y + x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

nos da las coordenadas de Q(2/3, 2/3).

Con estos datos podemos determinar la longitud de cada uno de los segmentos DP, PQ y QB, que en todos los casos es $\sqrt{2}/3$.

Este pequeño ejemplo muestra que el método analítico no es tan jerarquizado como el axiomático, y que por ello su manejo puede resultar más sencillo. Sin embargo este método de demostración que tiene ventajas, no carece de inconvenientes: desarrolla menos la intuición geométrica.

Queremos insistir que este curso no tiene como único objetivo enseñar propiedades geométricas, sino fundamentalmente desarrollar la intuición espacial y la capacidad de razonamiento. Esto motiva que el método utilizado en el desarrollo de la geometría en este curso sea el método axiomático.

Pero antes de entrar propiamente en los contenidos del curso, y puesto que vuestra formación matemática previa ha estado centrada casi exclusivamente en la consecución de procedimientos de cálculo y no tanto en la idea de demostración, vamos a tratar de justificar la necesidad de demostrar.

3. LA NECESIDAD DE LA DEMOSTRACIÓN

El objetivo de este apartado es tratar de responder, aunque no de forma demasiado extensa, a estas tres preguntas:

1. ¿Qué es una demostración?
2. ¿Para qué hace falta la demostración?
3. ¿Cómo debe ser la demostración?

3.1. ¿Qué es una demostración?

Cuando uno de nosotros quiere convencer a otra persona de un hecho concreto relata circunstancias, testimonios, situaciones y otras cuestiones que determinen la veracidad de lo que afirmamos. Cada uno de estos aspectos, con ayuda de los cuales podemos convencer a nuestro interlocutor, se llama argumento de la demostración, y al conjunto de todos ellos argumentación, demostración o prueba.

Para conocer en qué se basa la fuerza de un argumento, vamos a dar dos ejemplos relacionados con las matemáticas. Otros ejemplos relacionados con la física o la naturaleza aparecen en el libro de ediciones Mir "Acerca de la demostración en geometría" de Fetisov.

• *Ejemplo de carácter aritmético*

Tomemos varios números impares: 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... , elevemos cada uno de ellos al cuadrado y a cada una de las cantidades obtenidas restémosle una unidad.

$$1^2 - 1 = 0,\ 3^2 - 1 = 8,\ 5^2 - 1 = 24,\ 7^2 - 1 = 48,\ 9^2 - 1 = 80,\ 11^2 - 1 = 120,\ ...$$

Si nos preguntamos qué propiedad tienen en común todos los números obtenidos en los casos anteriores, y en otros más si fuese necesario, podríamos aventurar lo siguiente:

"*El cuadrado de cualquier número impar, disminuido en una unidad, da un múltiplo de 8*"

El enunciado se refiere a cualquier número impar, por tanto la demostración de ese resultado no consiste en la mera comprobación de que eso es válido para 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... y otros tantos más. Para realizar la demostración de ese resultado debemos aportar argumentos válidos para cualquier número impar.

1. Recordemos que cualquier número impar se puede expresar como $2n+1$ donde n es un número natural cualquiera.

2. El cuadrado de un número impar, disminuido en una unidad, puede escribirse entonces

$$(2n + 1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n + 1 - 1 = 4n(n + 1).$$

Este número es múltiplo de 4, como indica dicho factor.

3. Los números n y $n+1$ son números consecutivos, por tanto alguno de ellos es par. En consecuencia, la expresión $n(n+1)$ contiene necesariamente un factor 2.

Así pues, el número $4n(n+1)$ es siempre múltiplo de ocho, como se quería probar.

En el ejemplo anterior se ponen de manifiesto los dos caminos principales que se siguen cuando se determinan o se trata de conocer objetos, fenómenos o leyes (sean matemáticas o de otra índole).

• El primero de estos caminos consiste en que, basándonos en un gran número de observaciones y experiencias efectuadas con los objetos y fenómenos descubrimos en ellos leyes comunes:

"El cuadrado de cualquier número impar, disminuido en una unidad, es múltiplo de 8"

Esta vía de obtención de conclusiones generales por observación de numerosos casos particulares, se llama *inducción*. La inducción es un tipo de razonamiento que parte de los conocimientos o verdades particulares para obtener mediante ellos una verdad más general, o que observa varios fenómenos para inferir la ley que los explica.

• El otro camino es el que se sigue cuando, conociendo ya algunas leyes generales, aplicamos estos conocimientos a casos particulares. Este camino recibe el nombre de deducción.
Así, en el ejemplo mostrado se puede observar que en cada uno de los puntos señalados aplicamos leyes generales de la aritmética con el fin de probar la propiedad enunciada.

Todo ello muestra como inducción y deducción son caminos íntimamente ligados, y dicha unidad es precisamente un rasgo característico del pensamiento científico. En el proceso de cualquier enunciado y demostración empleamos estos dos caminos.

• *Ejemplo de carácter geométrico*

Recordemos ahora el ejemplo de carácter geométrico del comienzo de este tema. Se admitía que "por dos puntos del espacio pasa una única recta" porque así nos lo dictaba nuestra experiencia. Basándonos en esa verdad, podemos deducir, sin necesidad de ninguna experiencia, y mediante un razonamiento muy sencillo que "dos rectas del espacio o son coincidentes, o tienen un solo punto en común, o no tienen puntos en común". Si dos rectas son distintas no pueden tener dos (o más) puntos en común porque lo contrario contradice la verdad inicialmente establecida.

Este ejemplo muestra como, al menos en geometría, se pueden distinguir entre dos tipos de enunciados:

• Los más simples y generales, que se admiten sin demostración: *axiomas*.

• Los que pueden deducirse de las anteriores y cuya veracidad se pone de manifiesto a través de demostraciones: *teoremas*.

Ya se ha dicho al comienzo que esta distinción ya se realizó en la Antigua Grecia y que fue Euclides el principal artífice de sistematizar todo el conocimiento geométrico con este método.

Con lo visto, se puede decir que *una demostración en geometría es un sistema de razonamientos por medio de los cuales la veracidad de la proposición que se demuestra se deduce de axiomas o de otros enunciados ya probados*.

Llegado este punto cabe hacerse las otras dos preguntas con que comenzábamos el tercer apartado del tema.

3.2. ¿Para qué hace falta la demostración, es necesaria aun en el caso en que la proposición sea evidente?

Una de las leyes fundamentales de la lógica establece el requerimiento de que la veracidad de nuestras afirmaciones esté rigurosamente fundamentada. Esta fundamentación en el caso de las matemáticas consiste principalmente, y como ha podido comprobarse, en la realización de un razonamiento correctamente estructurado que contenga un sistema de deducciones. Aun teniendo esto en cuenta uno puede preguntarse
"¿Podemos evitar el realizar la demostración de un enunciado que resulta evidente o inmediato?"
Respecto esta pregunta hay algo que decir.

• *A veces lo que nos parece evidente deja de serlo cuando se analizan los argumentos, no explícitos, que nos ayudan a llegar a la conclusión*.

Es el caso que se presenta cuando alguien dice que para percibir la veracidad del teorema de Pitágoras basta con mirar el siguiente dibujo.

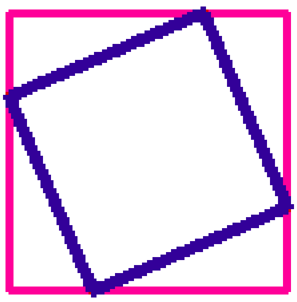


Figura 3

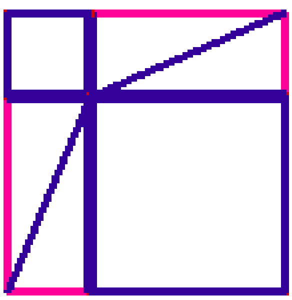


Figura 4

Trata de recordar lo que dice dicho teorema así como de dar una justificación del mismo utilizando como ayuda el dibujo anterior. Seguro que no sólo has mirado, también has pensado.

• *En ocasiones lo que parece inmediato, porque así lo dicta nuestra experiencia, resulta ser falso.*

Tómese una tira de papel ABCD punteada a lo largo de su mitad, como indica la figura. ¿Cuántos trozos obtenemos si cortamos a lo largo de la línea punteada?

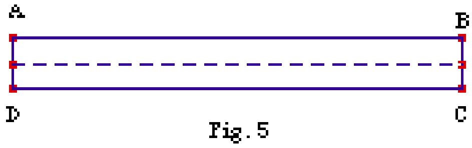


Fig. 5

Si tomamos una tira igual a la anterior, construimos un cilindro identificando A con B y C con D, y cortamos a lo largo de la línea punteada, ¿cuántos trozos se obtienen?

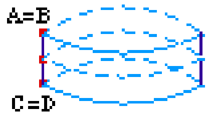


Fig. 6

Si cogemos de nuevo una tira como la de la figura 1, y pegamos el borde AD con el borde BC de forma que C se identifique con A y B con D, obtenemos una banda conocida como banda de Möbius. ¿Cuántos trozos resultan si cortamos dicha banda a lo largo de la línea punteada?

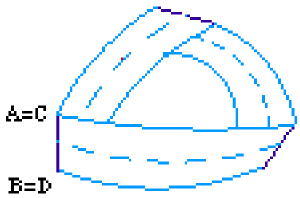


Fig. 7

Nuestra experiencia de los dos primeros casos podría llevarnos a una conclusión falsa en el tercero.

• *Ya se ha comentado que en enunciados con un cuantificador "cualquiera", la veracidad de los mismos está garantizada cuando se dan argumentos válidos para todos los casos. Sin embargo es fácil que algunos (o muchos) de esos casos presenten una situación en que la veracidad de lo afirmado resulte obvio, pero no si se tienen en cuenta algunos casos "límite". Veamos un ejemplo.*

"En cualquier triángulo, el ángulo adyacente a uno de sus ángulos es mayor que cualquiera de los otros dos"

Si se observan triángulos como los que se muestran en la figura 8, podemos pensar que la prueba del resultado es innecesaria porque es suficientemente claro. ¿Pero qué sucede cuando se considera la figura 9?

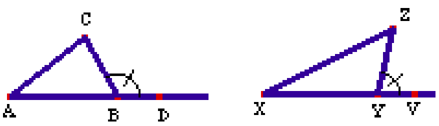


Fig. 8

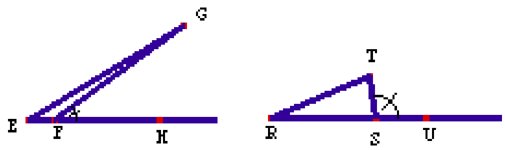


Fig. 9

En el triángulo ΔABC, el ángulo exterior señalado es obtuso, frente a los dos ángulos interiores del triángulo no adyacentes a él, que son agudos. En el segundo, el ángulo ZYV, adyacente al ángulo Y del triángulo XYZ es agudo, pero a simple vista mayor que los otros dos ángulos del triángulo.

En la figura 9 podemos observar que los ángulos GEF y GFH son ambos agudos y de "tamaño similar". Tampoco se puede distinguir claramente la relación entre los ángulos RTS y TSU, ambos obtusos.

• *La generalización por analogía en ocasiones falla.*

En el ejemplo de carácter aritmético dado en el punto 3.1. se llega a establecer la generalización de un resultado a través de casos particulares, y luego se comprueba su veracidad.

Si alguien, en una situación similar, generaliza un resultado en la esperanza de que como en el caso anterior la generalización sea cierta, y no trata de realizar una prueba formal, puede haber cometido un error. Veamos algunos ejemplos.

1. Consideremos los números de la forma $2^{2^n} + 1$, donde n designa un número natural cualquiera. Para $n = 0, 1, 2, 3, 4$, los números resultantes son, respectivamente, 3, 5, 17, 257 y 65.537, todos ellos primos.

Fermat, ilustre matemático francés del siglo XVII, aceptaba que todos los números de la forma $2^{2^n} + 1$ eran primos. En el siglo XVIII, el matemático alemán Euler comprobó que para $n = 5$ el número resultante, el 4.294.967.297, es compuesto.

2. También en el siglo XVII el matemático alemán Leibniz demostró (puede ser un ejercicio para el alumno) que

- Cualquiera que sea el número natural n, el número $n^3 - n$ es múltiplo de 3.
- Cualquiera que sea el número natural n, el número $n^5 - n$ es múltiplo de 5.
- Cualquiera que sea el número natural n, el número $n^7 - n$ es múltiplo de 7.

De aquí supuso que "para todo número k impar y cualquier número natural n, el número $n^k - n$ es múltiplo de k ". Pronto observó que el número $2^9 - 2 = 510$ no es múltiplo de 9.

3. El siguiente ejemplo puede resultar aún más instructivo. Sustituyendo n en la expresión $991n^2+1$ por los números naturales sucesivos 1, 2, 3, ... parece imposible obtener el cuadrado de un número por mucho tiempo que lo dediquemos. Sin embargo sería erróneo afirmar que ningún número de ese tipo es un cuadrado, puesto que hay algunos que sí lo son. Eso sí, el valor mínimo de n para el que el número $991n^2+1$ resulta ser un cuadrado es muy grande. He aquí el número n = 12 055 735 790 331 359 447 442 538 767

Por tanto, la demostración es necesaria también para fundamentar la generalidad de la proposición que se establece, es decir, la posibilidad de su aplicación a todos los casos particulares.

3.3. ¿Cómo debe ser la demostración?

Teniendo presente lo que es una demostración y sabiendo de su necesidad, debemos conocer ahora qué condiciones debe satisfacer para que pueda considerarse correcta.

Puesto que cada demostración consta de una serie de deducciones, la corrección o no de la misma depende de la corrección o no de las deducciones que intervienen en ella.

Ya se ha dicho que el razonamiento deductivo es la aplicación de cierta ley general a un caso particular dado. Para evitar errores en las deducciones se han de conocer ciertos esquemas de la lógica elemental, que vamos a tratar de poner de manifiesto mediante ejemplos extraídos de la geometría.

3.3.1. Dos esquemas básicos

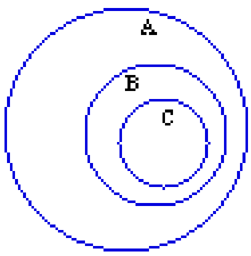
• *Ejemplo 1*

Supongamos que se ha hecho la siguiente deducción

- En todos los rectángulos, las diagonales tienen igual longitud.
- Todos los cuadrados son rectángulos.
- Conclusión: En todos los cuadrados, las diagonales tienen igual longitud.

Vamos a mostrar mediante un esquema el razonamiento empleado. Denotemos por A el conjunto de todos los cuadriláteros que tienen sus diagonales con igual longitud, por B el conjunto de los rectángulos (paralelogramos con ángulos rectos) y por C el conjunto de los cuadrados. El razonamiento en forma esquemática es el siguiente, y el gráfico realizado ilustra la situación.

- Todo el que está en B, está en A
- Todo el que está en C, está en B
- Conclusión: Todo el que está en C, está en A



En relación con el ejemplo anterior proponemos la resolución de las siguientes cuestiones:

1. ¿ Puedes dibujar un cuadrilátero que tenga diagonales iguales y no sea un rectángulo?

2. "Todo cuadrilátero con diagonales iguales es un rectángulo". ¿Esa afirmación es verdadera o falsa? ¿Por qué?

3. Teniendo en cuenta las respuestas dadas a las preguntas anteriores, ¿podríamos decir que "los conjuntos A y B son iguales"? ¿Son iguales los conjuntos B y C?

La resolución de las cuestiones planteadas involucran algunas técnicas básicas de la teoría de la demostración que pasamos a comentar. Para dar respuesta a las preguntas del segundo apartado, se hace uso de lo que sucede en un caso particular. La existencia de un cuadrilátero con diagonales iguales que no es rectángulo, *prueba la falsedad* de la afirmación que se hace en el punto 2. Esto se expresa diciendo que "se ha encontrado un *contraejemplo* que prueba que lo afirmado es falso".

En la realización del tercer apartado se emplea una técnica habitual para la comprobación de si dos conjuntos son iguales o no. Consiste, como se puede apreciar, en probar si todos los elementos del primer conjunto lo son del segundo, y si todos los elementos del segundo lo son del primero. En el caso de que se den las dos condiciones, los conjuntos serán iguales. Si falla alguna de las dos, serán distintos.

•*Ejemplo 2*

Observemos la figura 6. En ella aparece un cuadrilátero cuyos vértices son puntos de una circunferencia, y sus lados están contenidos en el círculo por ella definido. En este caso se dice que el cuadrilátero está inscrito en la circunferencia (la circunferencia esta circunscrita al cuadrilátero). Los ángulos señalados se dicen opuestos (también se dicen así los otros dos).

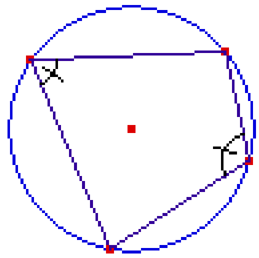


Fig. 10

Consideremos ahora el siguiente argumento en el que aparecen sentencias negativas.

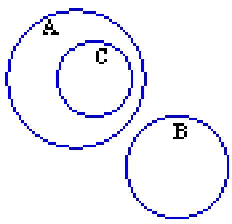
- Todos los cuadriláteros en los que la suma de ángulos opuestos sea distinta de 180º, no pueden inscribirse en una circunferencia

- En un paralelogramo con un ángulo obtuso, la suma de los ángulos opuestos es distinta de 180 º.

- Conclusión: Un paralelogramo con un ángulo obtuso no puede inscribirse en una circunferencia.

El razonamiento anterior tiene el siguiente esquema y representación.

- Ninguno de los que está en A, está en B.
- Todo el que está en C, está en A.
- Conclusión: Ninguno de C está en B.



¿A qué conjuntos representan en este caso A, B y C? Obsérvese la forma en que se expresa la primera de las sentencias en el esquema.

Una vez analizados estos dos ejemplos, hemos de decir que la gran mayoría de las deducciones que se desarrollan en geometría (y muchas veces en otras ramas de las matemáticas) siguen alguno de los esquemas anteriores. Además esta forma de representar la relación entre los conceptos, posibilita comprender bien la estructura de cualquier razonamiento y de descubrir el error en las conclusiones incorrectas.

3.3.2. Errores frecuentes

• *<u>Ejemplo 3</u>*

En la figura 11 vemos que el cuadrilátero tiene sus lados tangentes a la circunferencia. En este caso se dice que el cuadrilátero está circunscrito a la circunferencia (la circunferencia está inscrita en el cuadrilátero). Los lados señalados (y los otros dos no señalados) se dicen opuestos.

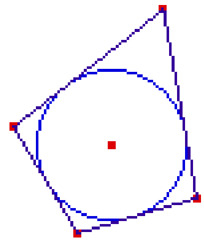


Fig.11

El argumento que se establece a continuación involucra el trapecio isósceles que aparece en la figura 12.

- En todos los cuadriláteros circunscritos a las circunferencias, las sumas de los lados opuestos son iguales entre sí.
- En el trapecio dado, las sumas de los lados opuestos son iguales.
- Conclusión: El trapecio dado puede estar circunscrito a una circunferencia.

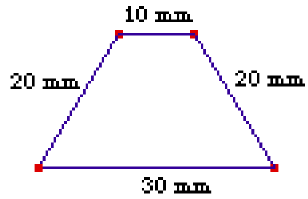
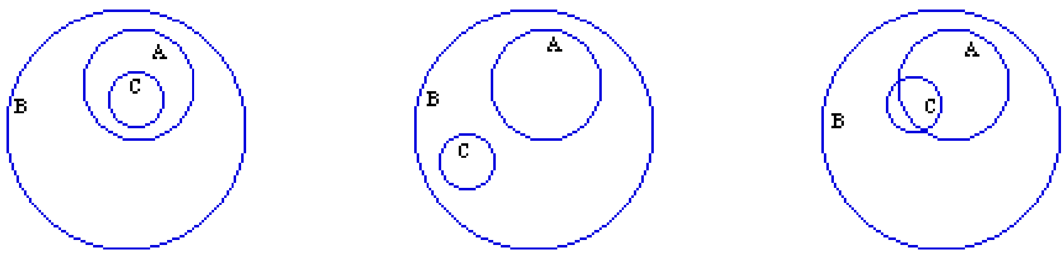


Fig. 12

Denotemos por A el conjunto de todos los cuadriláteros que pueden circunscribirse a una circunferencia, por B el conjunto de todos los cuadriláteros en los que las sumas de los lados opuestos son iguales y por C el conjunto de los trapecios en los que las sumas de los lados opuestos son iguales.

Es claro que el trapecio dibujado pertenece al conjunto C.

De los enunciados dados, sólo se puede deducir que A y C están dentro de B, y nada sobre la dependencia entre A y C. Las distintas posibilidades se muestran en la figura siguiente.



Por tanto nada se puede decir acerca de la relación entre A y C, y en consecuencia no puede extraerse la conclusión que aparece en el argumento.

• *<u>Ejemplo 4</u>*

Tengamos presente la figura 11, y el siguiente argumento:

- Todo cuadrilátero en el que las sumas de los lados opuestos son iguales entre sí, puede circunscribirse a una circunferencia.
- En el trapecio dado, las sumas de los lados opuestos son iguales.
- Conclusión: El trapecio dado puede circunscribirse a una circunferencia.

Esta deducción es completamente correcta, está construida según el esquema del primer ejemplo:

- Todo el que está en B, está en A
- Todo el que está en C, está en B
- Conclusión: Todo el que está en C, está en A

¿A qué conjuntos representarán en este caso A, B y C?

Vamos a tratar de analizar las diferencias entre los ejemplos *3* y *4*, e indicar uno de los errores más comunes cuando se trata de demostrar un enunciado.

Alguien que no haya estado muy atento a los esquemas de argumentación puede aún decir "si las conclusiones en ambos ejemplos son las mismas, y en ambos las condiciones iniciales son ciertas, ¿por qué cuándo uno actúa como en el ejemplo 3, lo hace mal, y no cuándo es como en 4?".

En el ejemplo *3* se ha establecido de forma incorrecta una conclusión que es cierta como se prueba en el ejemplo *4* de forma correcta.

Si tenemos en cuenta la primera condición de cada uno de los argumentos, podemos observar que en un caso la forma del enunciado es

"Todo el que está en A, está en B", o equivalentemente, "si un elemento está en A, entonces está en B"

y en el otro

"Todo el que está en B, está en A", o equivalentemente, "si un elemento está en B, entonces está en A".

Esta situación se expresa diciendo que un enunciado es el recíproco del otro. Un enunciado ("Todo el de A es de B" ó "Si *a* entonces *b*") y su recíproco ("Todo el de B es de A" ó "Si *b* entonces *a*") tienen distinto significado, por ello no pueden utilizarse arbitrariamente, como prueban los ejemplos anteriores.

En los ejemplos señalados, las primeras condiciones de uno y otro argumento son válidas, pero *en el ejemplo 3* ***se confunde una condición con su recíproca***, lo que genera la invalidez del argumento. Por tanto es importante tener en cuenta para no cometer este tipo de errores que

• Un enunciado y su recíproco no tienen igual significado, y es necesario pues distinguir uno de otro.

• Existen situaciones en que un enunciado directo y su recíproco son ciertos, como la presentada en los ejemplos 3 y 4, pero no siempre es así:

Enunciado directo: "Si dos ángulos son opuestos por el vértice (figura 13), entonces tienen igual medida". CIERTO.

Enunciado recíproco: "Si dos ángulos tienen igual medida, entonces son opuestos por el vértice ". FALSO. (figura 14)

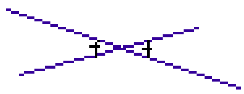


Fig.13

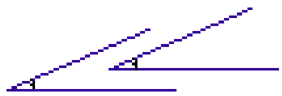


Fig.14

Se tiene entonces

• El teorema recíproco no es consecuencia del directo, a veces ni siquiera es válido, y si es válido requiere una demostración especial.

•<u>*Ejemplo 5*</u>

Se pide probar que "*en todo triángulo, el ángulo adyacente a uno de sus ángulos interiores es mayor que cualquiera de los otros dos ángulos interiores del triángulo*", y supongamos que se establece la siguiente demostración:

Si observamos la figura, se ve que γ es obtuso y que α y β son agudos. Como todo ángulo obtuso es mayor que cualquier ángulo agudo, queda probado lo pedido.

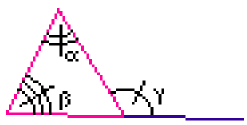


Fig.15

¿Cuál es aquí el error? El error en esta demostración tiene por causa el que considera un tipo particular de triángulos, los que tienen todos sus ángulos agudos, y apoya la demostración en condiciones que sólo cumplen estos triángulos, no todos. En la demostración se ha identificado el conjunto de triángulos acutángulos con el conjunto de todos los triángulos, cosa obviamente falsa.

El **error** detectado en el ejemplo 5 es también muy frecuente y consiste en que ***no se demuestra la proposición que hay que demostrar, sino únicamente cierto caso particular***. Cuidado pues.

•<u>*Ejemplo 6*</u>

Supongamos conocido y ya probado que "si dos triángulos tienen un lado igual y los ángulos que se apoyan en ese lado iguales, entonces los triángulos son iguales, es decir, tienen iguales el resto de los elementos correspondientes"(*).

Se quiere demostrar que "*si ABC es un triángulo en el que CM es mediana y bisectriz, entonces ABC es isósceles de base AB (lo equivale a que sean iguales los lados AC y BC)*".

¿Alguien que realiza la siguiente demostración actúa correctamente?

En un triángulo isósceles la bisectriz relativa a la base es mediana y altura, por tanto en nuestro caso CM también es altura. Podemos aplicar a los triángulos ACM y BCM el resultado (*), deduciendo que AC = BC.

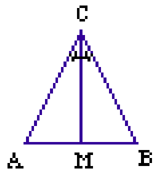


Fig.16

La demostración es incorrecta porque en ella se introduce una condición que es consecuencia de lo que se quiere probar.

Este **nuevo error** cometido, como otros, con excesiva frecuencia consiste en ***utilizar en la demostración el resultado a probar o alguna consecuencia conocida de ese resultado***. En otros casos el error reside en introducir en la prueba resultados o proposiciones no demostrados, por considerarlos evidentes (aun cuando no estén en el conjunto de axiomas).

3.3.3. Otras consideraciones

Los puntos 3.3.1. y 3.3.2. nos permiten concluir que para que una demostración sea correcta, es decir, para poder garantizar la veracidad de la proposición, se debe tener en cuenta:

- La demostración debe apoyarse únicamente en proposiciones verdaderas, es decir, axiomas o teoremas ya probados .
- Todas las conclusiones de que conste una demostración deben estar bien construidas.
- Hay que tener en cuenta el objeto de demostración, y no sustituir la proposición a probar por cualquier otra.

Cuando uno sabe de la necesidad de cumplir los requisitos anteriores, es natural plantearse una serie de preguntas tales como: ¿cómo encontrar la demostración correcta?, ¿cómo hallar el orden de los razonamientos que debe enlazar la proposición que se prueba con las verdades ya establecidas y con las condiciones del teorema?, ¿cómo elegir, entre el gran número de proposiciones distintas, precisamente aquellas que pueden servirnos para demostrar nuestro teorema?

Cuesta decirlo, pero faltaríamos a la verdad si no lo hiciéramos, que la mayor parte de las veces son la práctica y la experiencia las que nos llevan a discernir el camino a seguir, pero apuntemos algo en esta línea. Lo más razonable en esta búsqueda es partir de la proposición a demostrar y plantearse:

¿como consecuencia de qué proposición se puede obtener la proposición que queremos probar?

Si hallamos dicha proposición y ella es consecuencia de las condiciones y de teoremas demostrados ya, nuestro problema está resuelto. Si no es así, volveremos a plantearnos la misma pregunta, pero ya con respecto a esta nueva proposición y así sucesivamente.

3.3.4. Cómo lograr una demostración

Este es un esquema de los pasos que se siguen habitualmente para construir una demostración.

1. Entender bien todas las partes del enunciado.
2. ¿De qué otra proposición se puede deducir la proposición que quiero probar? ¿Está demostrada? ¿La puedo demostrar?
3. ¿Qué otros teoremas están relacionados con los conceptos que aparecen en el enunciado?, ¿podrían ser útiles?
4. ¿Conozco otros teoremas parecidos? ¿Cómo es su demostración?
5. Hacer un esquema de la demostración y luego ir completando los detalles.
6. Revisar la demostración.
7. Mejorar la demostración.
8. ¿Son necesarias todas las hipótesis?

3.3.5. Sobre las técnicas de demostración

No es difícil darse cuenta, a la vista de los ejemplos anteriores, que toda proposición a probar tiene una formulación igual o equivalente a "Si *p* entonces *q*", que simbólicamente escribimos como "$p \Rightarrow q$". En puntos precedentes hemos establecido las pautas elementales para que la demostración de una proposición de este tipo sea correcta, pero deberíamos por último añadir que precisamente proposiciones equivalentes a "$p \Rightarrow q$" nos proporcionan otras técnicas (alternativas) de demostración y que difieren de lo que se conoce como prueba directa.

Esas técnicas son **prueba del contrarrecíproco** y **método por reducción al absurdo**. Como en otras asignaturas ya se ha explicado en que consiste cada una de esas técnicas, y a lo largo del curso tendremos ocasión de utilizarlas con mucha frecuencia, no vamos a entrar a detallarlas aquí.

GEOMETRÍA BÁSICA

EJERCICIOS TEMA I: INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA

1.- Para realizar este ejercicio basta que recuerdes algunas de las cosas aprendidas en cursos anteriores, y tengas presentes las notas de este primer tema.
Considera en el plano un sistema de coordenadas cartesiano con origen O.

a) Si A es el punto de coordenadas (1,0), determina la ecuación de la recta r que es perpendicular al segmento OA y pasa por su punto medio.

b) Prueba que si P es un punto de r, la distancia de P a O es igual a la distancia de P a A.

c) Sea Q un punto de coordenadas (a,b) tal que la distancia de Q a O es la misma que la de Q a A. Demuestra que a=1/2 y deduce que Q pertenece a la recta r.

d) Denotemos por m el conjunto de puntos del plano que distan lo mismo de O que de A. ¿Cuál de las frases siguientes expresa la relación entre m y r que se prueba en b)?

- Todo punto de r está en m.
- Todo punto de m está en r.
- Los conjuntos de puntos m y r son iguales.

e) ¿Cuál de las frases anteriores expresa la relación entre m y r que ha sido probada en c)? ¿Y la probada considerando b) y c) simultáneamente?

f) Las demostraciones que has realizado, ¿son de tipo axiomático o analítico?

2.- Mide tu intuición y tu capacidad de deducción.
Sea A y B dos puntos cualesquiera del plano, r la recta perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio, y m el conjunto de puntos del plano que distan lo mismo de A que de B. ¿Qué opinión tienes sobre la veracidad o falsedad del enunciado "Los conjuntos m y r son iguales"? ¿Puedes dar un argumento que justifique tu respuesta?

Si consideras el segmento AB en el espacio, ¿puedes establecer, intuitivamente, cuál es el conjunto de puntos del espacio que distan lo mismo de A que de B?

3.- Ejercicio de comprensión.
Consideremos el conjunto $\Pi = \{P_1,P_2,P_3,P_4\}$ formado por cuatro elementos distintos al que llamaremos `tetrapunto`. Definimos `bipunto` como un conjunto formado por dos puntos distintos de Π, y `tripunto` como un conjunto formado por tres puntos distintos de Π. Diremos que dos bipuntos distintos `son paralelos` si no tienen puntos en común; en caso contrario se dice que son `secantes`. Definiciones análogas se establecen para los tripuntos.

a) Determina todos los bipuntos distintos que hay en Π.
b) Determina todas las parejas de bipuntos paralelos existentes.
c) ¿Existen tres bipuntos distintos paralelos dos a dos?
d) ¿Son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones? Justifica tu respuesta.

- No existen tripuntos paralelos
- Existen tripuntos secantes con un solo punto en común
- Dos tripuntos cualesquiera son siempre secantes, y tienen dos puntos en común.

4.- Adelantándonos al tema III.
Se establecen los siguientes axiomas: 1. Por dos puntos pasa una única recta. 2. Una línea recta por lo menos tiene dos puntos. 3. Por tres puntos no alineados pasa un único plano. 4. Si dos puntos están en un plano, la recta que pasa por ellos está en el mismo plano. 5. Existen cuatro puntos no todos ellos en un mismo plano. Demuestra que:

a) Por una recta y un punto que no está en ella pasa un único plano.

b) Si dos rectas distintas se cortan, tienen un único punto en común.

c) Si dos planos distintos tienen más de un punto común, tienen en común todos los puntos de una recta y sólo esos.

d) Al menos existen cuatro planos distintos.

e) Si en el conjunto Π del ejercicio 3, llamamos planos a los tripuntos y rectas a los bipuntos, ¿se cumplen los 5 axiomas?

5.- Un enunciado y su recíproco
Un triángulo ABC se dice isósceles de base AB si los lados AC y BC tienen igual longitud.

a) Establece el enunciado recíproco del siguiente:

Si un triángulo ABC es isósceles de base AB, entonces los ángulos CAB y CBA son iguales.

b) Se probará durante el curso que el enunciado anterior y su recíproco son ciertos. ¿qué se puede decir de los conjuntos T_1 y T_2, T_1 siendo el conjunto de todos los triángulos isósceles y T_2 el de todos los triángulos con dos ángulos iguales?

6.- Otra vez a vueltas con Pitágoras.

El teorema de Pitágoras afirma que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

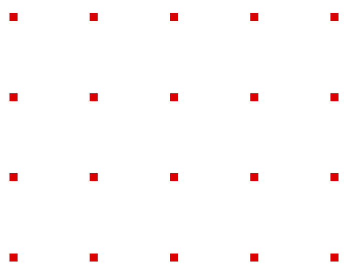
Si un triángulo τ tiene lados de longitudes 3 cms., 4 cms. y 5 cms., entonces se verifica la relación

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Teniendo en cuenta las dos condiciones anteriores podemos concluir que el triángulo τ es rectángulo.

¿El argumento dado es correcto? ¿Por qué?

7.- Una primera investigación.
Denominaremos trama cuadrada a una distribución de puntos en la forma que muestra la figura. El número de filas y columnas de puntos de una trama determinarán su tamaño. Así la trama representada aquí es una trama 4×5 (o equivalentemente 5×4).



Este ejercicio consiste en determinar el número de segmentos de longitudes distintas que se pueden construir en una trama del tipo $n \times n$, teniendo en cuenta que los segmentos tienen sus extremos sobre puntos de la trama.

1. Determina el número de segmentos de longitudes distintas que se pueden construir en una trama 2×2, en una 3×3 y en una 4×4, señalando la estrategia seguida para evitar repetir casos. Anota los resultados, poniendo en relación el obtenido en un caso con el obtenido en el caso anterior.
2. A la vista de lo hallado en el apartado 1, realiza una previsión sobre el número de segmentos de longitudes distintas que se pueden construir en una trama 5×5. Efectuando los cálculos pertinentes, comprueba si tu previsión ha sido acertada.
3. Si denotamos por S_k el número de segmentos de longitudes distintas que hay en una trama $k \times k$, ¿te atreves a conjeturar que $S_n = S_{n-1} + n$? Si tu respuesta es afirmativa, lo que has hecho es dar una generalización de un resultado válido para $n = 3, 4, 5$: $S_3 = S_2 + 3$, $S_4 = S_3 + 4$, $S_5 = S_4 + 5$. ¿Es válida la afirmación para $n = 6$?