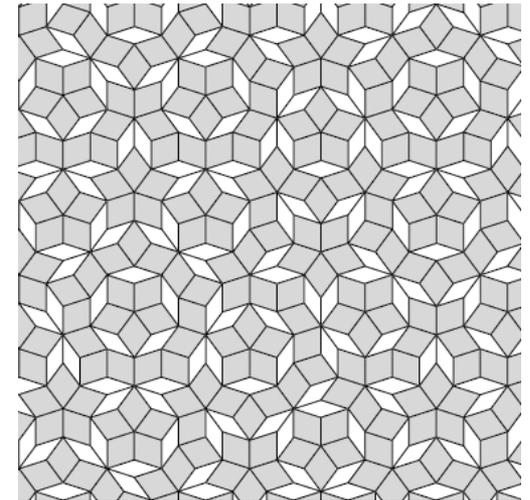
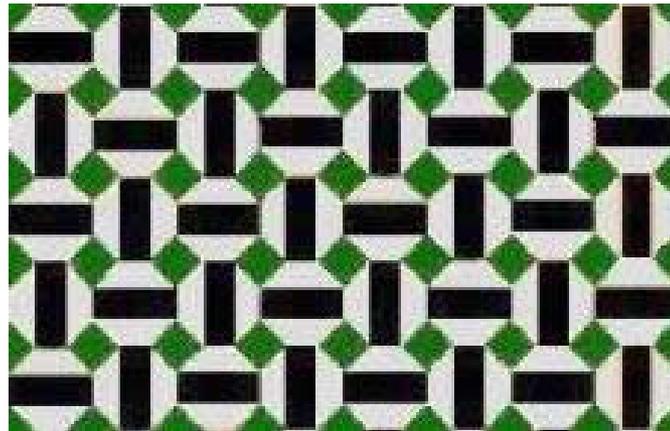
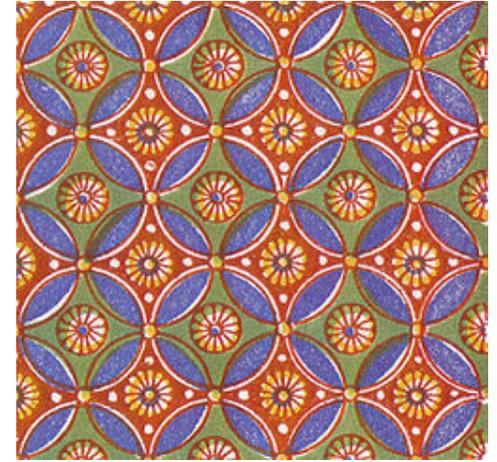
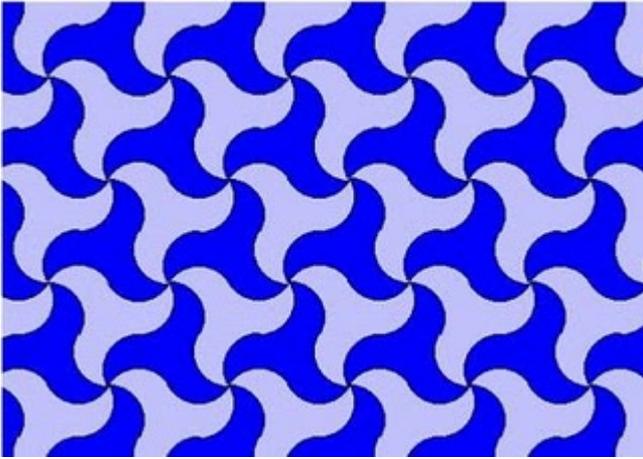


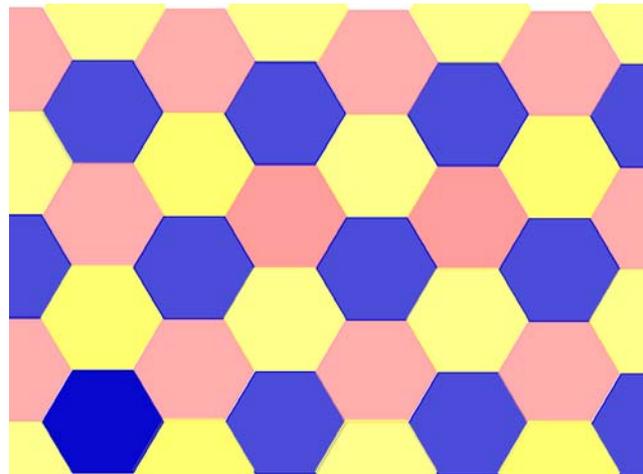
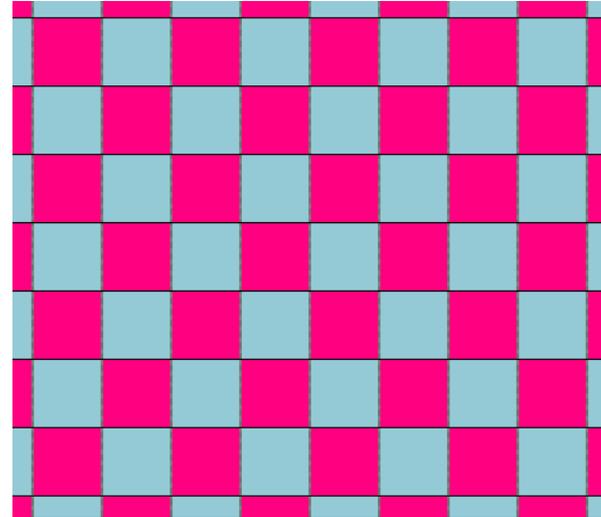
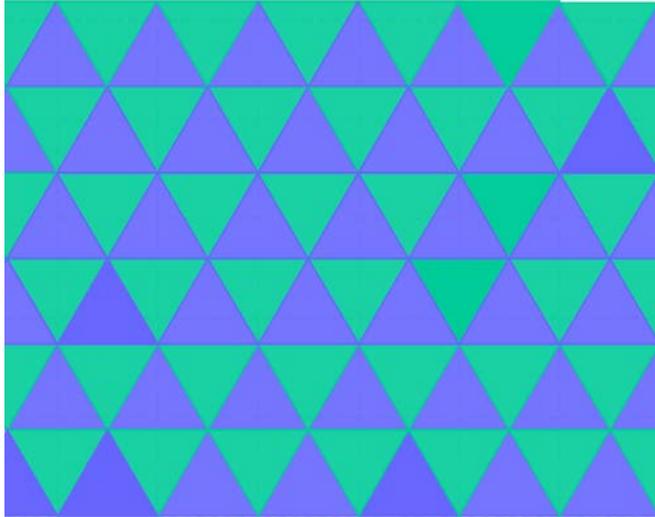
# Mosaicos y embaldosados

Un mosaico, embaldosado o teselación del plano es una colección de figuras que recubren el plano sin dejar huecos y sin solapamientos.



# Mosaicos regulares

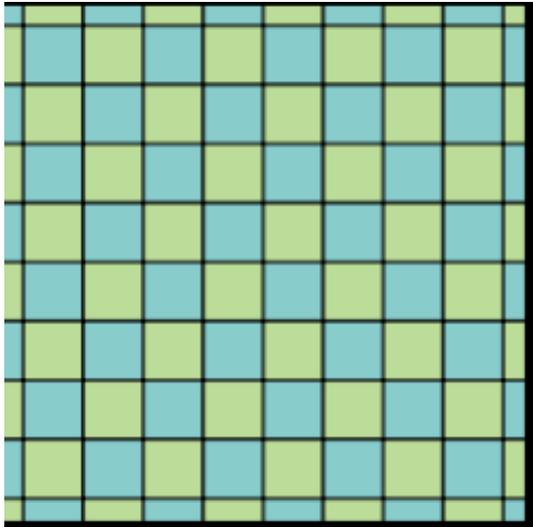
Todos los polígonos del mosaico son regulares y todos son iguales.  
Solo hay tres.



# Mosaicos semirregulares

Todos los polígonos del mosaico son regulares y todos los vértices tienen la misma configuración.

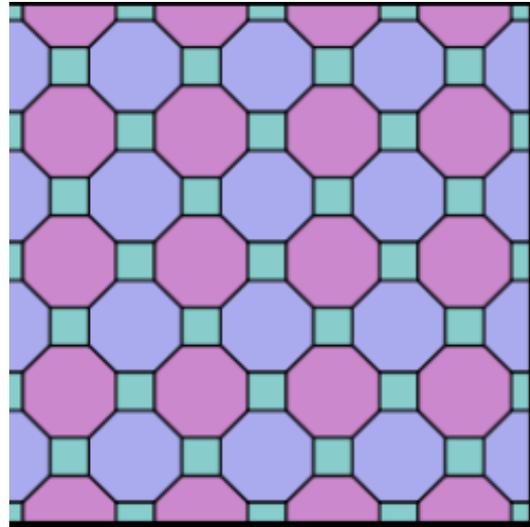
## Tres ejemplos



**4 . 4 . 4 . 4**

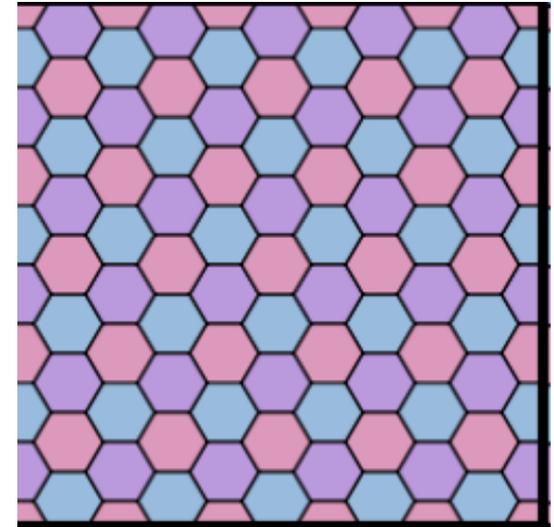


Configuración del vértice:  
cuadrado, cuadrado, cuadrado, cuadrado



**4 . 8 . 8**

cuadrado, octógono, octógono



**6 . 6 . 6**

hexágono, hexágono, hexágono

	n	ángulo
Triángulo	3	60°
Cuadrado	4	90°
Pentágono	5	108°
Hexágono	6	120°
Heptágono	7	128 4/7°
Octógono	8	135°
Nonágono	9	140°
Decágono	10	144°
Undecágono	11	147 3/11°
Dodecágono	12	150°
	15	156°
	18	160°
	20	162°
	24	165°
	42	171 3/7°

**Regla 1:** En cada vértice la suma de los ángulos debe ser 360°.

**Regla 2:** En cada vértice se encuentran entre 3 y 6 polígonos.

**Regla 3:** No pueden haber 4 polígonos distintos en un vértice.

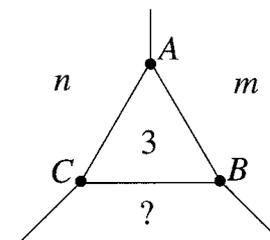
60 + 90 + 108 = 258 → faltan 102, no existe

60 + 90 + 120 = 270 → faltan 90, se repite

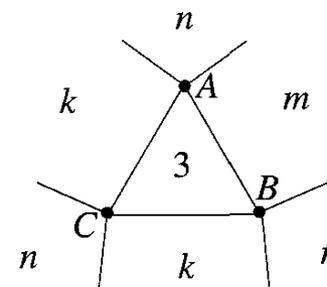
60 + 108 + 120 = 288 → faltan 72, no existe

La media de los 4 ángulos tiene que ser 90.

**Regla 4:** No puede haber una configuración k.n.m con k impar y n distinto de m.



**Regla 5:** No puede haber una configuración 3.k.n.m con k distinto de m.



## Vértices posibles (a priori)

### Con 6 polígonos

3.3.3.3.3.3 (6 triángulos) es el único posible

### Con 5 polígonos

3.3.3.3.6 ( $60^\circ \times 4 + 120^\circ = 360^\circ$ )

3.3.3.4.4

3.3.4.3.4

### Con 4 polígonos

3.3.4.12 viola la regla 5.

3.4.3.12 viola la regla 5.

3.3.6.6 viola la regla 5.

3.6.3.6

3.4.4.6 viola la regla 5.

3.4.6.4

4.4.4.4

### Con 3 polígonos

3.12.12

4.5.20 = 5.4.20 viola la regla 4.

4.6.12

4.8.8

6.6.6

n	ángulo
3	$60^\circ$
4	$90^\circ$
5	$108^\circ$
6	$120^\circ$
7	$128 \frac{4}{7}^\circ$
8	$135^\circ$
9	$140^\circ$
10	$144^\circ$
11	$147 \frac{3}{11}^\circ$
12	$150^\circ$
15	$156^\circ$
18	$160^\circ$
20	$162^\circ$
24	$165^\circ$
42	$171 \frac{3}{7}^\circ$

**Regla 5:** No puede haber una configuración 3.k.n.m con k distinto de m.

**Regla 4:** No puede haber una configuración k.n.m con k impar y n distinto de m.

Han quedado 11

**3.3.3.3.3.3**

**3.3.3.3.6**

**3.3.3.4.4**

**3.3.4.3.4**

**3.6.3.6**

**3.4.6.4**

**4.4.4.4**

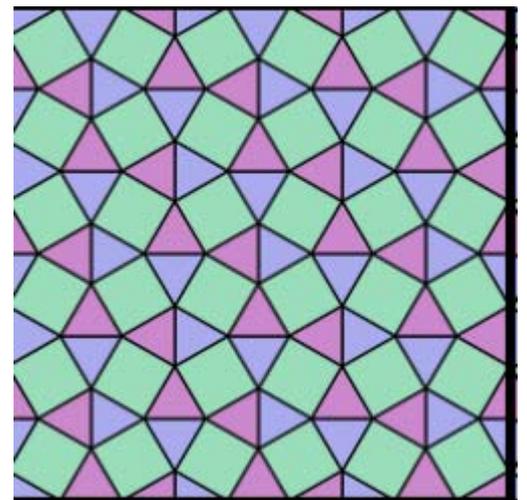
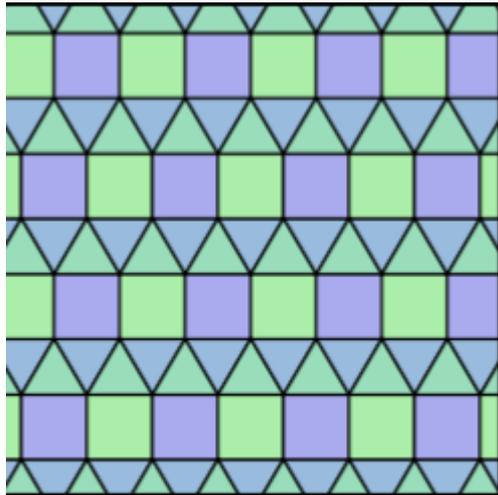
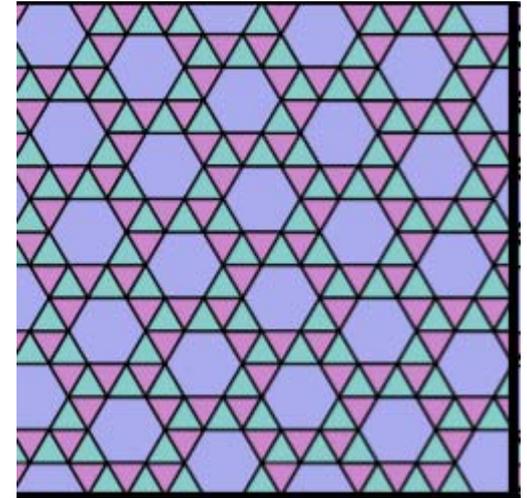
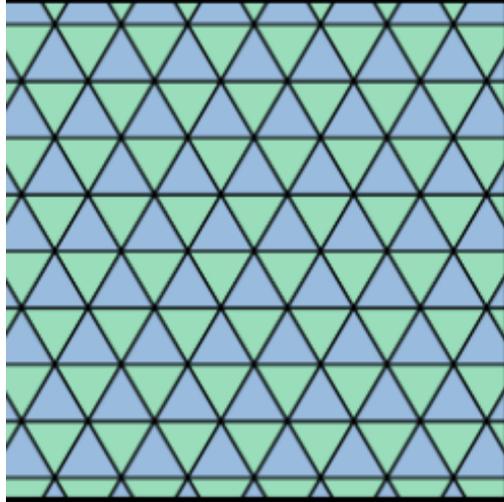
**3.12.12**

**4.6.12**

**4.8.8**

**6.6.6**

Veamos si se pueden hacer



Faltan:

3.6.3.6

3.4.6.4

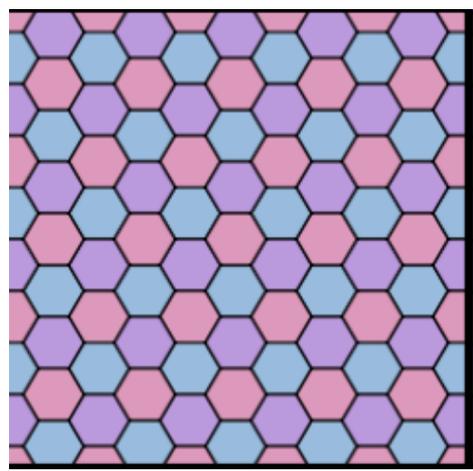
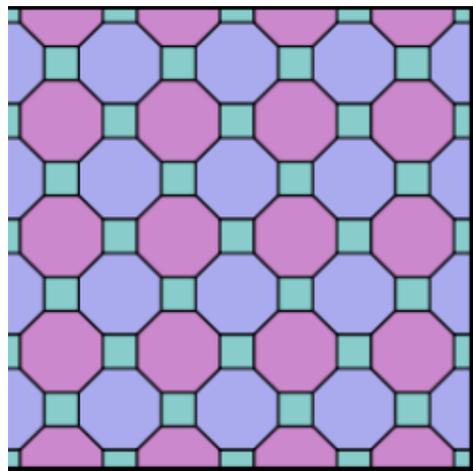
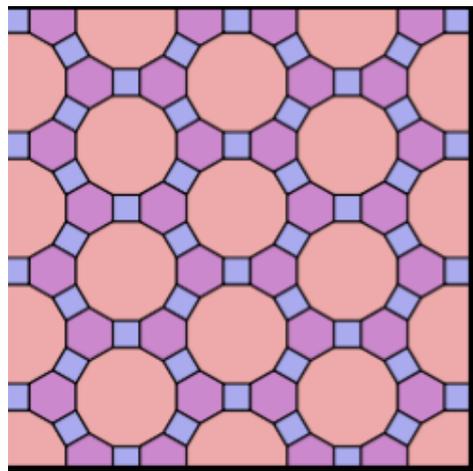
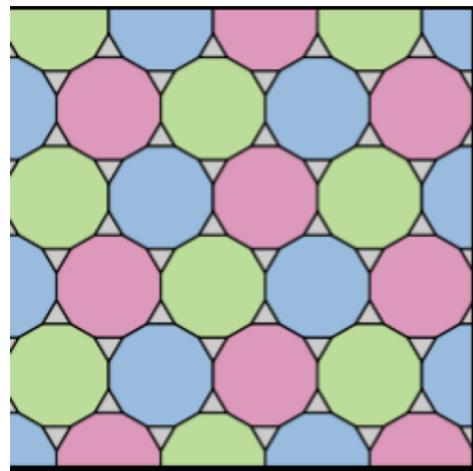
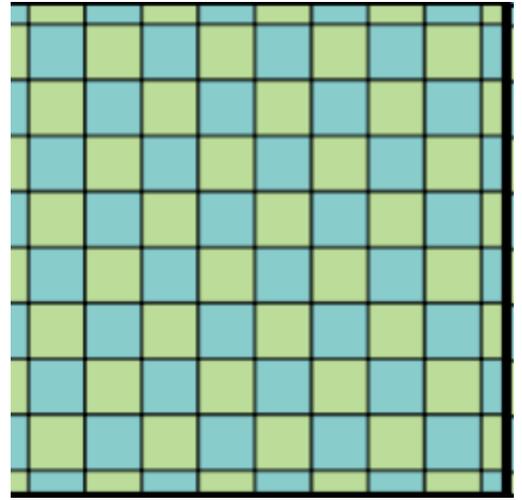
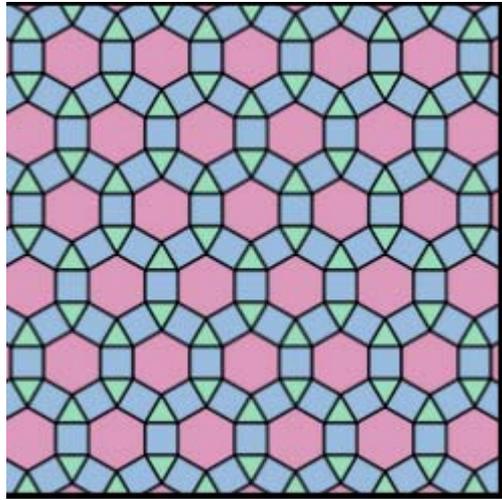
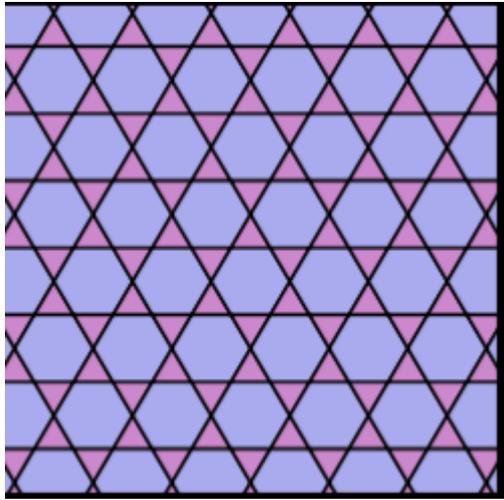
4.4.4.4

3.12.12

4.6.12

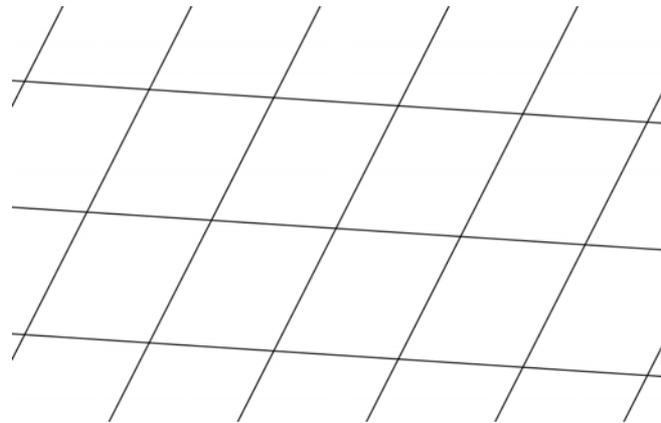
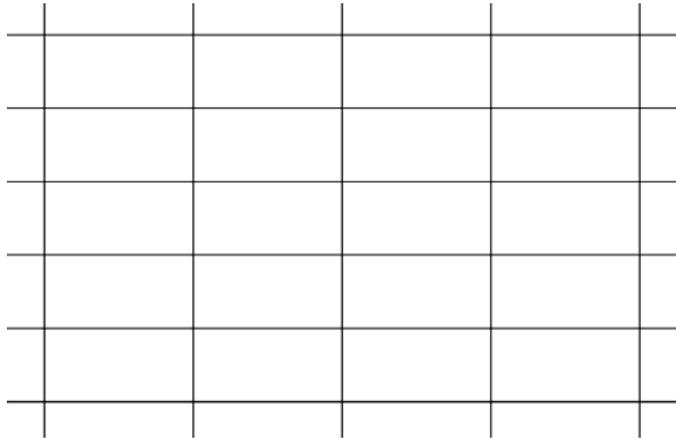
4.8.8

6.6.6

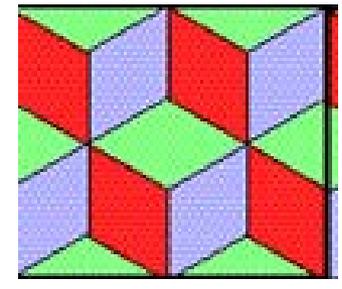
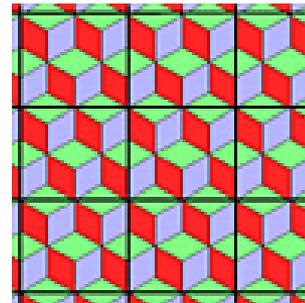
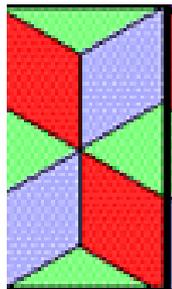
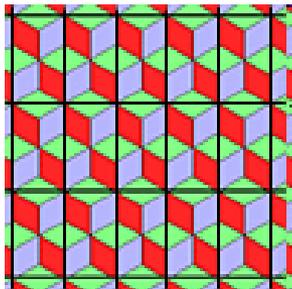
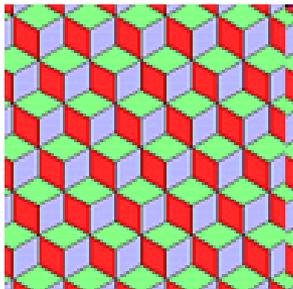


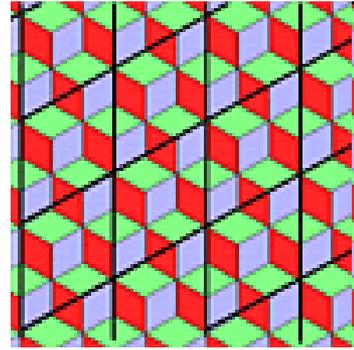
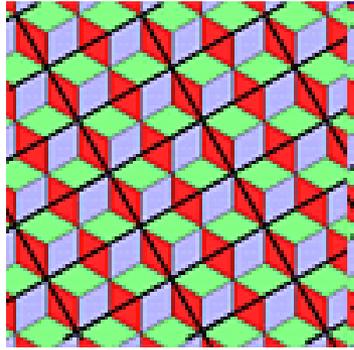
## Mosaicos periódicos

Una *red periódica* está formada por dos familias de rectas paralelas que determinan rectángulos o paralelogramos congruentes:



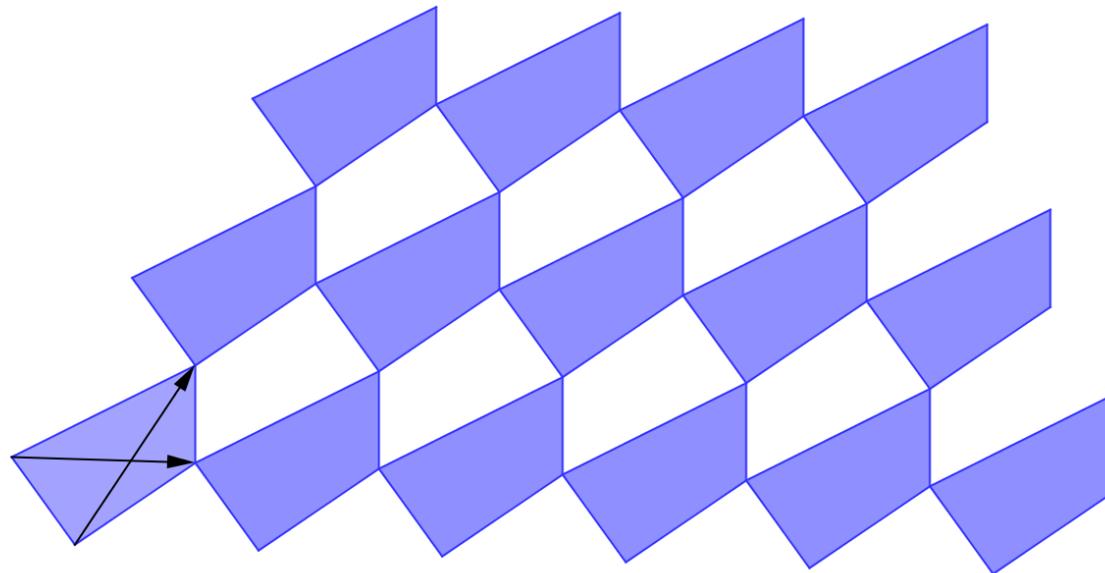
Un mosaico es *periódico* si se puede trazar una red periódica sobre él de modo tal que las piezas contenidas en cada paralelogramo son idénticas. Cada uno de estos paralelogramos se llama *dominio fundamental*.





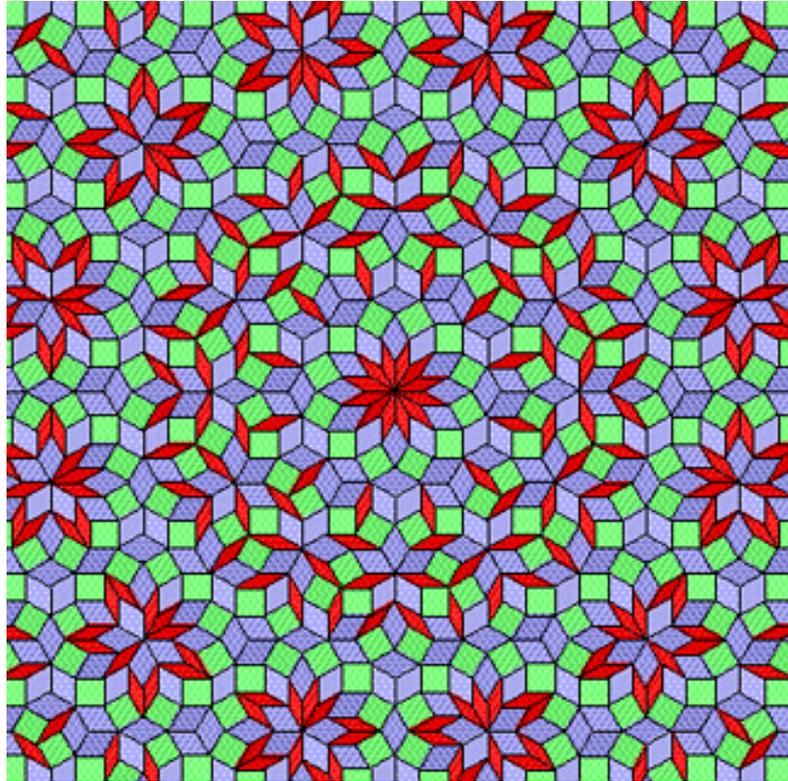
## Mosaico con un cuadrilátero

Con un cuadrilátero cualquiera se puede formar un mosaico periódico, tomando como vectores de traslación las diagonales del cuadrilátero:



## Mosaicos no periódicos

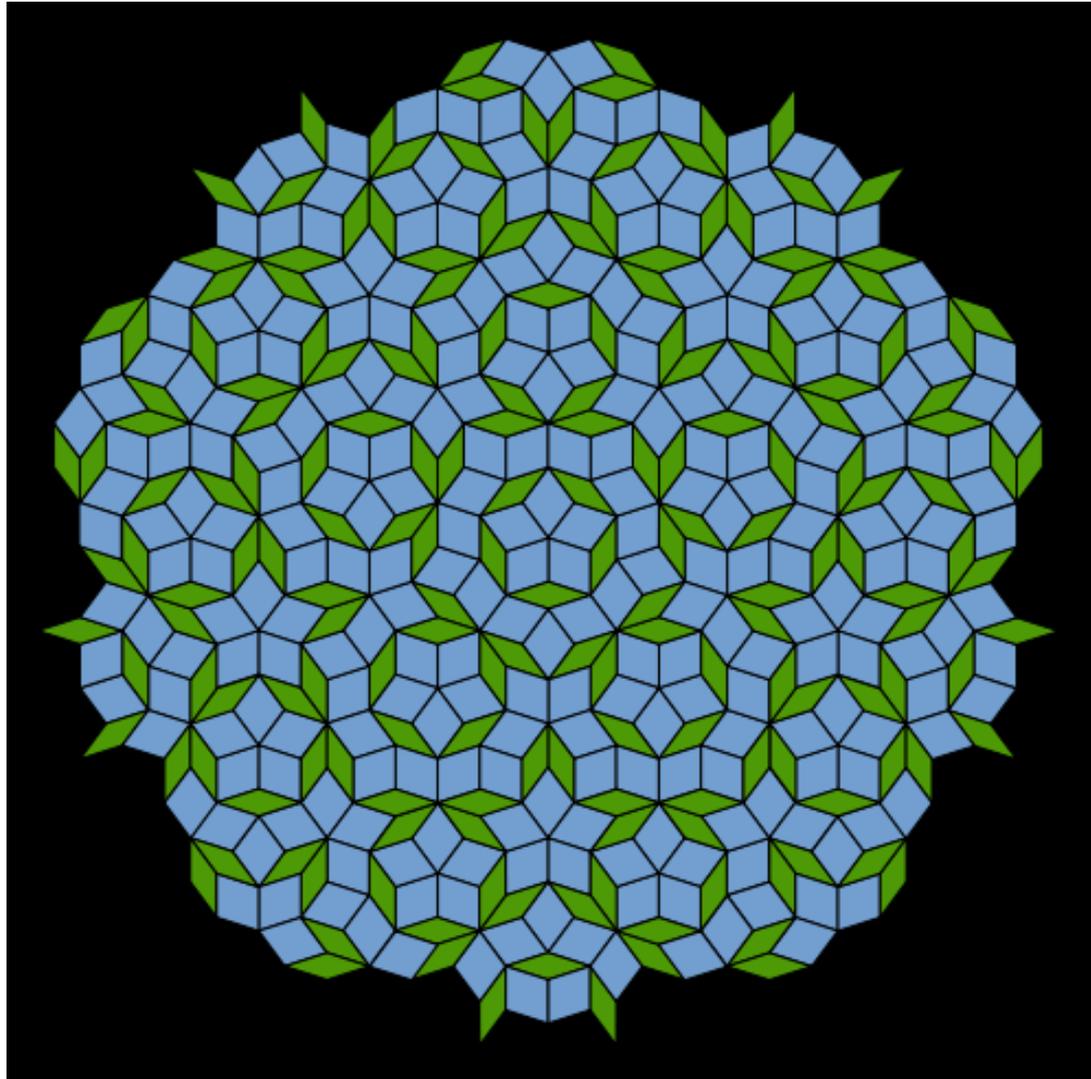
Un mosaico es *no periódico* si no tiene ninguna simetría de traslación.



Un conjunto de piezas se dice *aperiódico* si con esas piezas se pueden construir mosaicos que cubren el plano, pero ninguno de esos mosaicos es periódico.

## Mosaicos de Penrose

Roger Penrose construyó tres tipos de conjuntos aperiódicos.

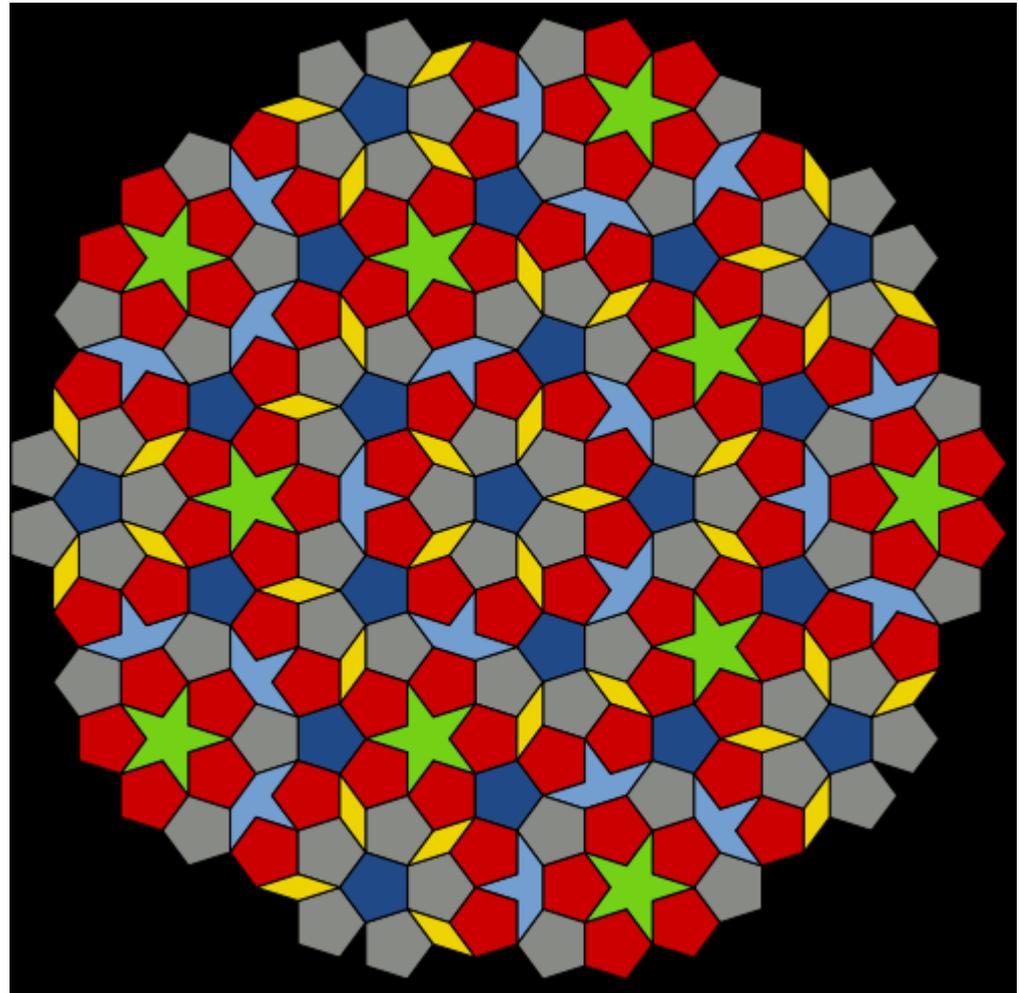


## Mosaicos de Penrose: P1

Ya en 1619, Kepler observó que si se intenta cubrir el plano con pentágonos regulares, quedan huecos que son de tres tipos: la estrella de cinco puntas, el barco de papel y el rombo estrecho.

Para garantizar que todos los mosaicos son no periódicos se establecen reglas de unión de las piezas.

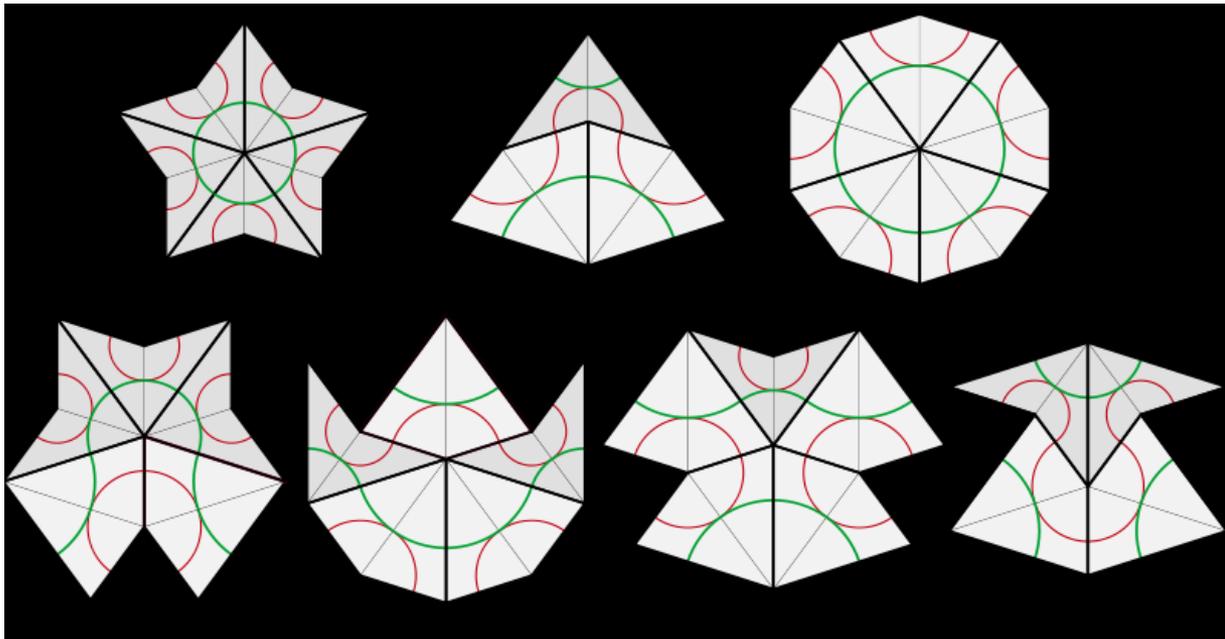
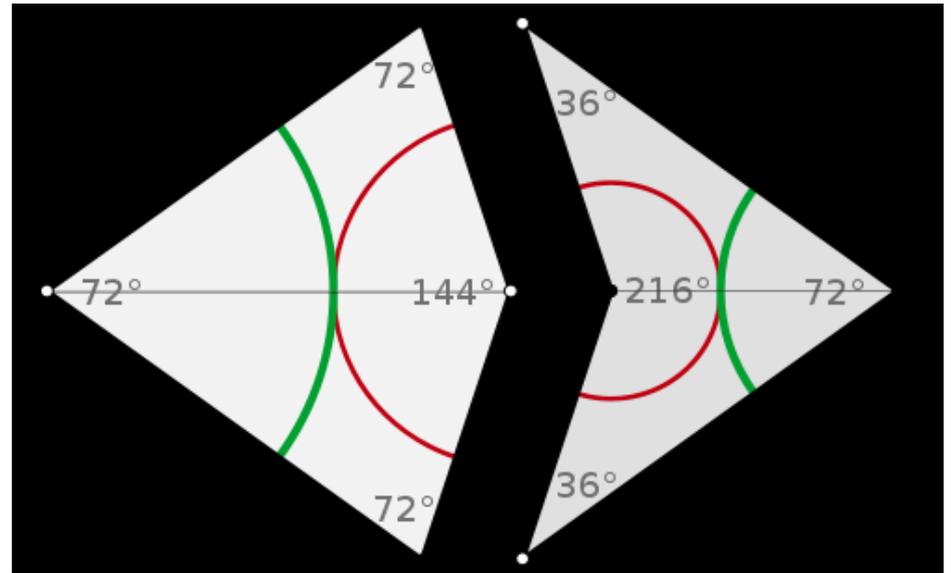
Hay tres clases de reglas para los pentágonos y esto se puede indicar coloreándolos de tres colores distintos.



## Mosaicos de Penrose: P2 Cometa y dardo

Tanto la cometa como el dardo están formados por dos triángulos isósceles iguales, cuyos lados están en razón áurea.

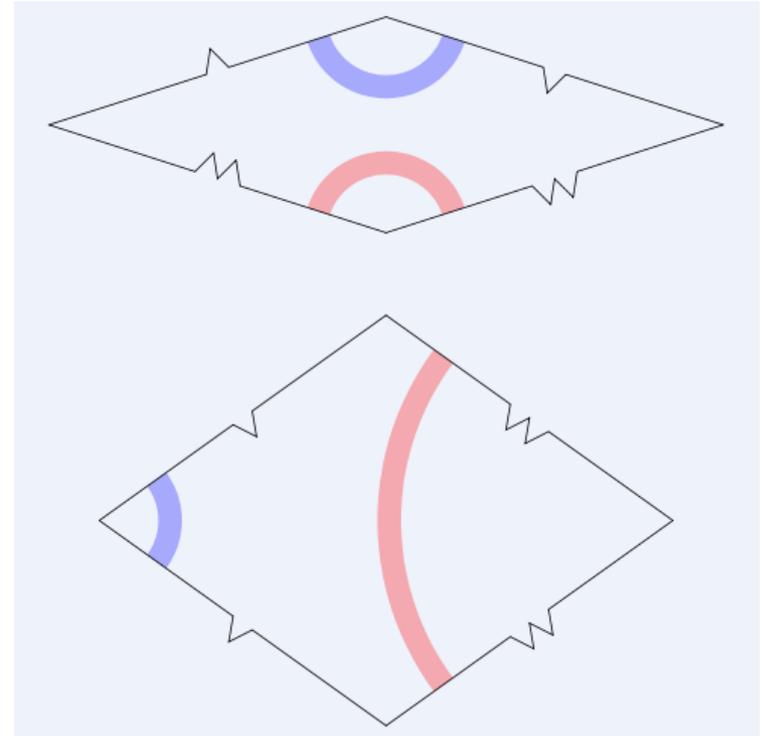
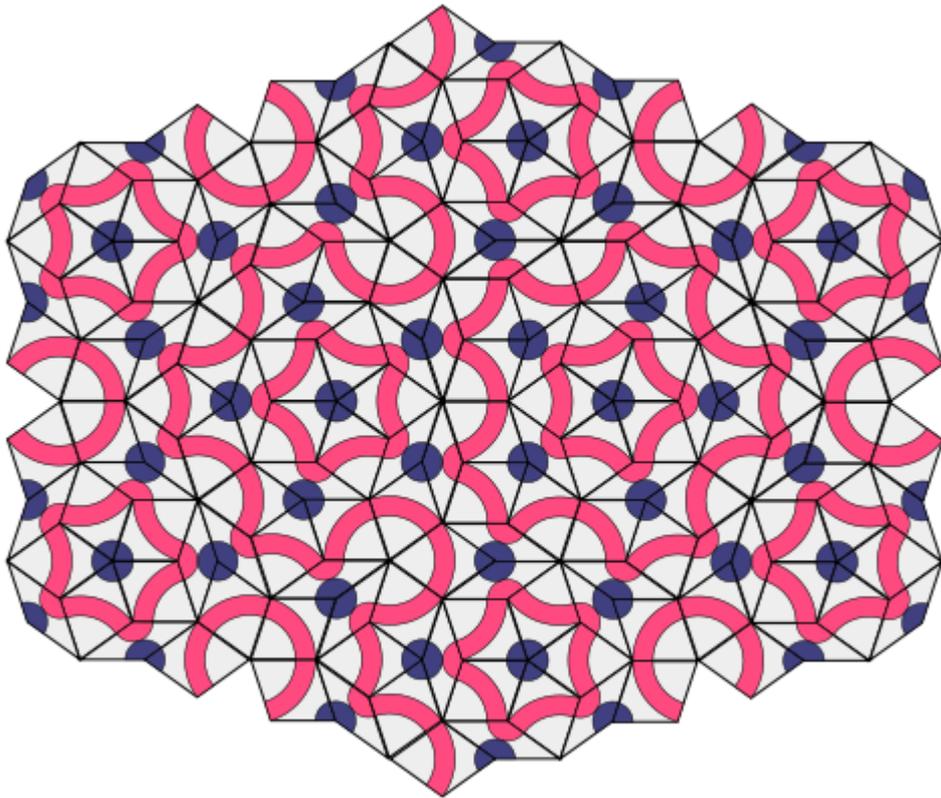
Las reglas de unión se pueden indicar de distintas maneras; por ejemplo, mediante arcos de colores.



Hay solamente siete formas posibles de unir piezas en un vértice

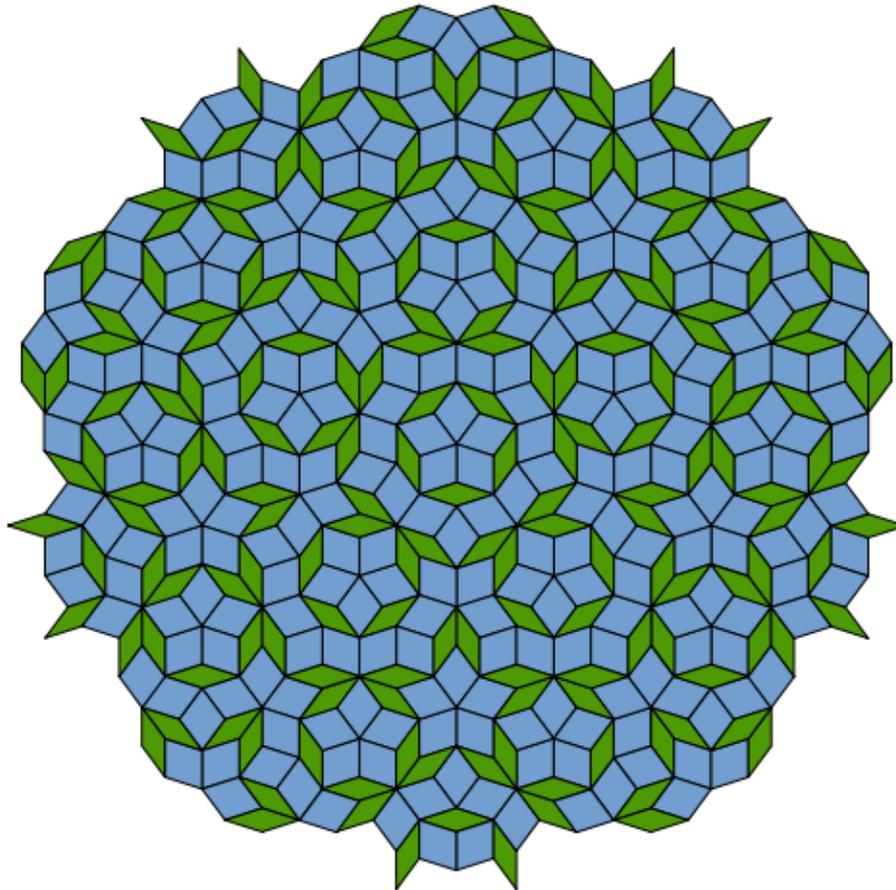
## Mosaicos de Penrose: P3 Rombos

Este conjunto aperiódico está formado por un rombo estrecho y un rombo ancho. El primero tiene ángulos de  $36^\circ$ ,  $144^\circ$ ,  $36^\circ$ ,  $144^\circ$ , y el segundo de  $72^\circ$ ,  $108^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $108^\circ$ .



Se establecen las reglas de unión correspondientes, indicadas mediante muescas y puntas en los lados, o mediante arcos de distinto color.

- Algunos mosaicos de Penrose tienen simetría de rotación o simetría de reflexión.
- Cualquier región finita de un mosaico de Penrose se repite una infinidad de veces en el mosaico.



# Simetrías de un mosaico

Hay 17 grupos de simetría posibles para un mosaico periódico, dependiendo de la simetría de rotación, de las simetrías de reflexión y de las simetrías deslizantes que tenga. En inglés se conocen como [wallpaper groups](#).

Forma larga	Forma abreviada	Orbifold	Tipo de red
<b>p111</b>	<b>p1</b>	<b>o</b>	Paralelogramo
<b>p211</b>	<b>p2</b>	<b>2222</b>	Paralelogramo
<b>p1m1</b>	<b>pm</b>	<b>**</b>	Rectángulo
<b>p1g1</b>	<b>pg</b>	<b>xx</b>	Rectángulo
<b>c1m1</b>	<b>cm</b>	<b>*x</b>	Rombo
<b>p2mm</b>	<b>pmm</b>	<b>*2222</b>	Rectángulo
<b>p2mg</b>	<b>pmg</b>	<b>22*</b>	Rectángulo
<b>p2gg</b>	<b>pgg</b>	<b>22x</b>	Rectángulo
<b>c2mm</b>	<b>cmm</b>	<b>2*22</b>	Rombo
<b>p411</b>	<b>p4</b>	<b>442</b>	Cuadrado
<b>p4mm</b>	<b>p4m</b>	<b>*442</b>	Cuadrado
<b>p4gm</b>	<b>p4g</b>	<b>4*2</b>	Cuadrado
<b>p311</b>	<b>p3</b>	<b>333</b>	Hexágono
<b>p3m1</b>	<b>p3m1</b>	<b>*333</b>	Hexágono
<b>p31m</b>	<b>p31m</b>	<b>3*3</b>	Hexágono
<b>p611</b>	<b>p6</b>	<b>632</b>	Hexágono
<b>p6mm</b>	<b>p6m</b>	<b>*632</b>	Hexágono

1. **p** indica red de paralelogramos, rectángulos o cuadrados.

**c** indica red de rombos.

2. Orden máximo de rotación **n**: puede ser **1** (sin simetría de rotación), **2**, **3**, **4** o **6**.

3. **m** indica un eje de simetría vertical.

**g** indica que no hay ejes de simetría, pero si simetría deslizante vertical.

**1** en otro caso.

4. Eje de simetría formando un ángulo  $\alpha$  con el eje  $x$ .

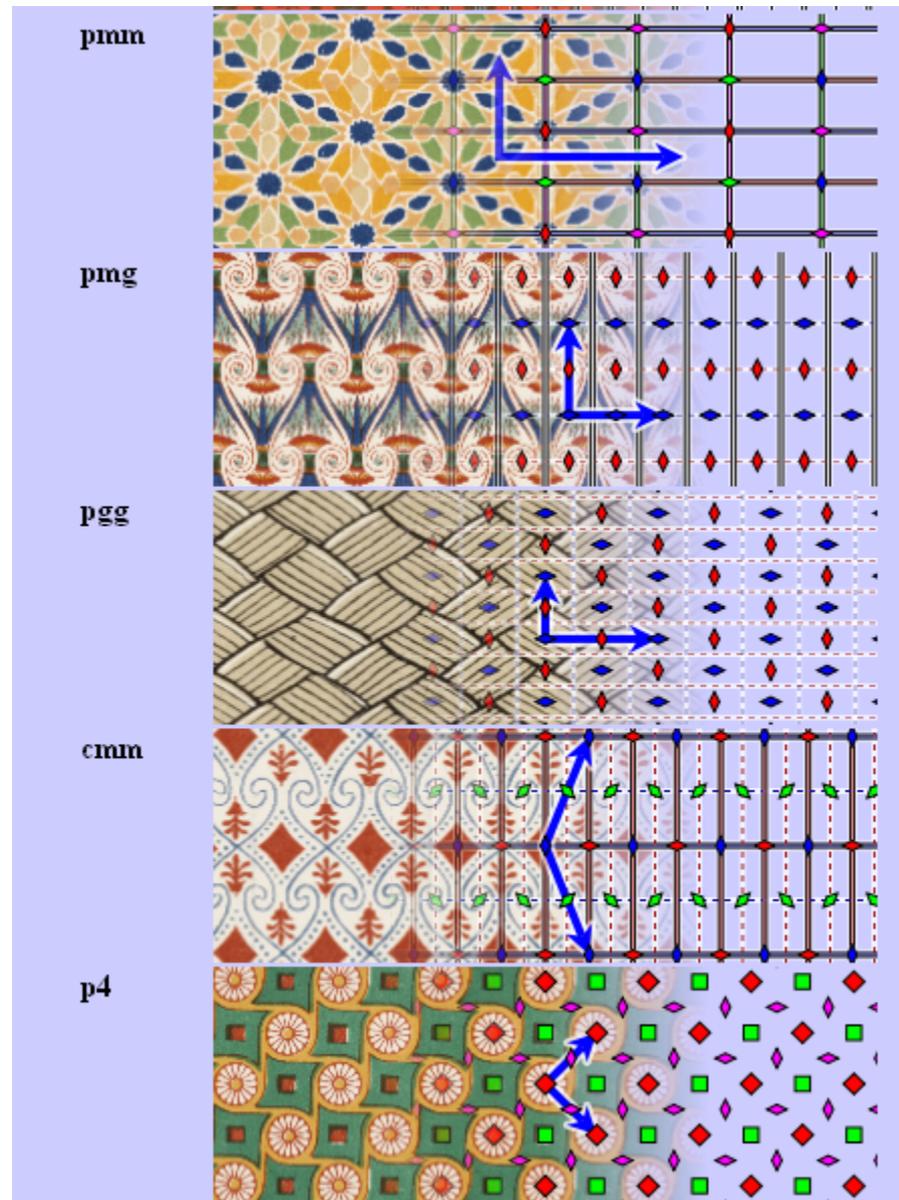
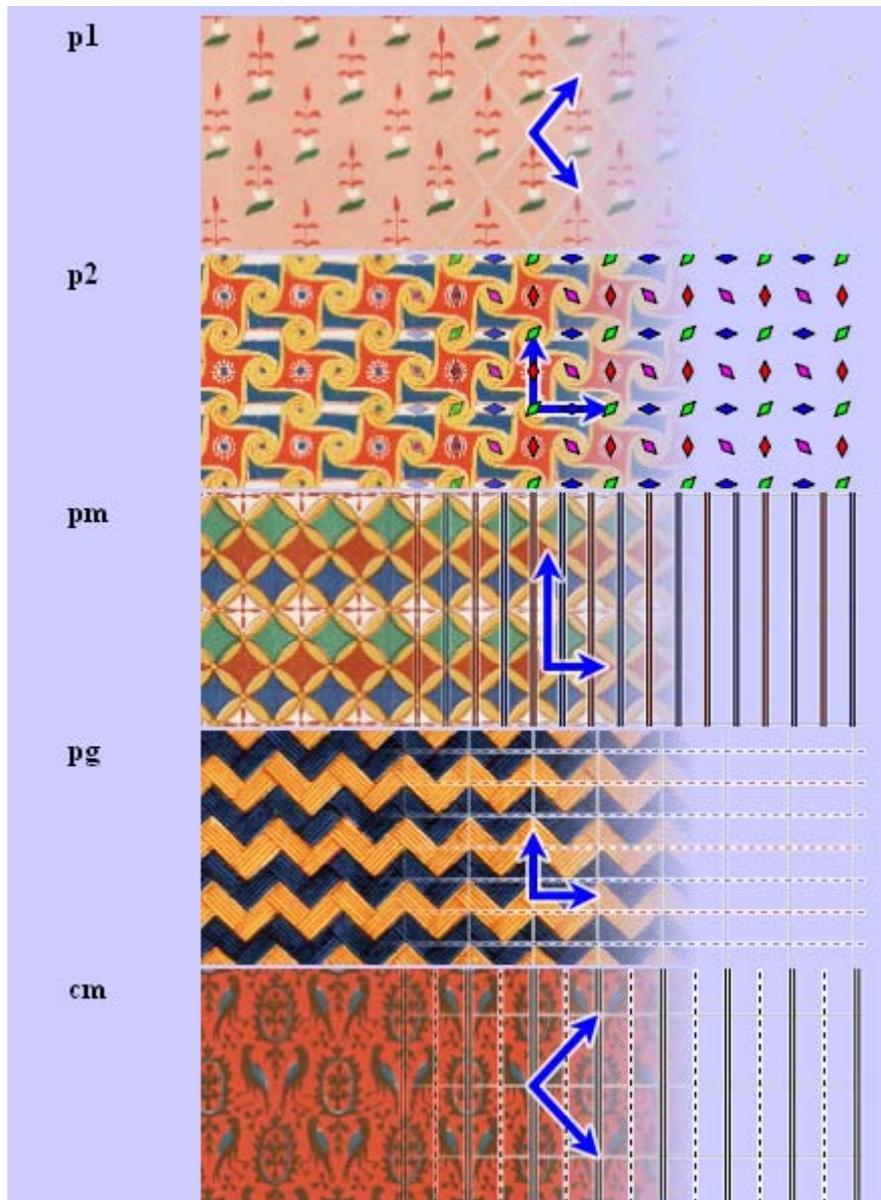
$\alpha = 180^\circ$  si **n** = 1 o 2,

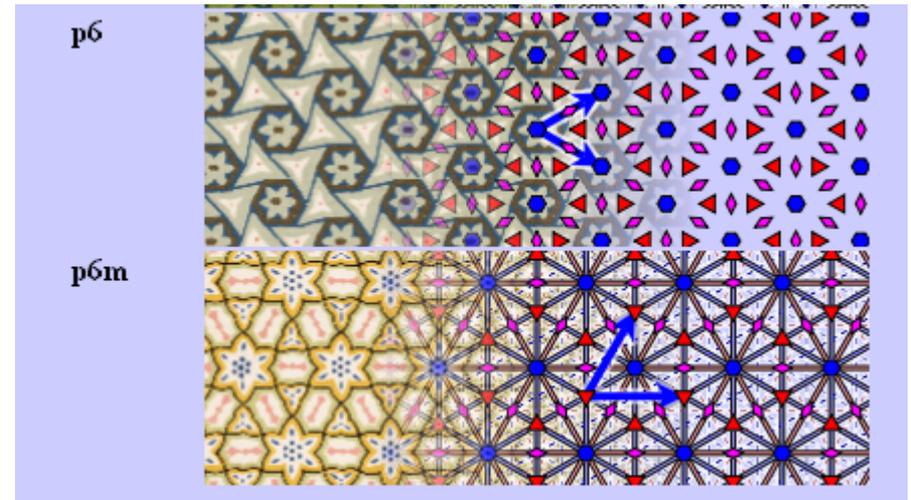
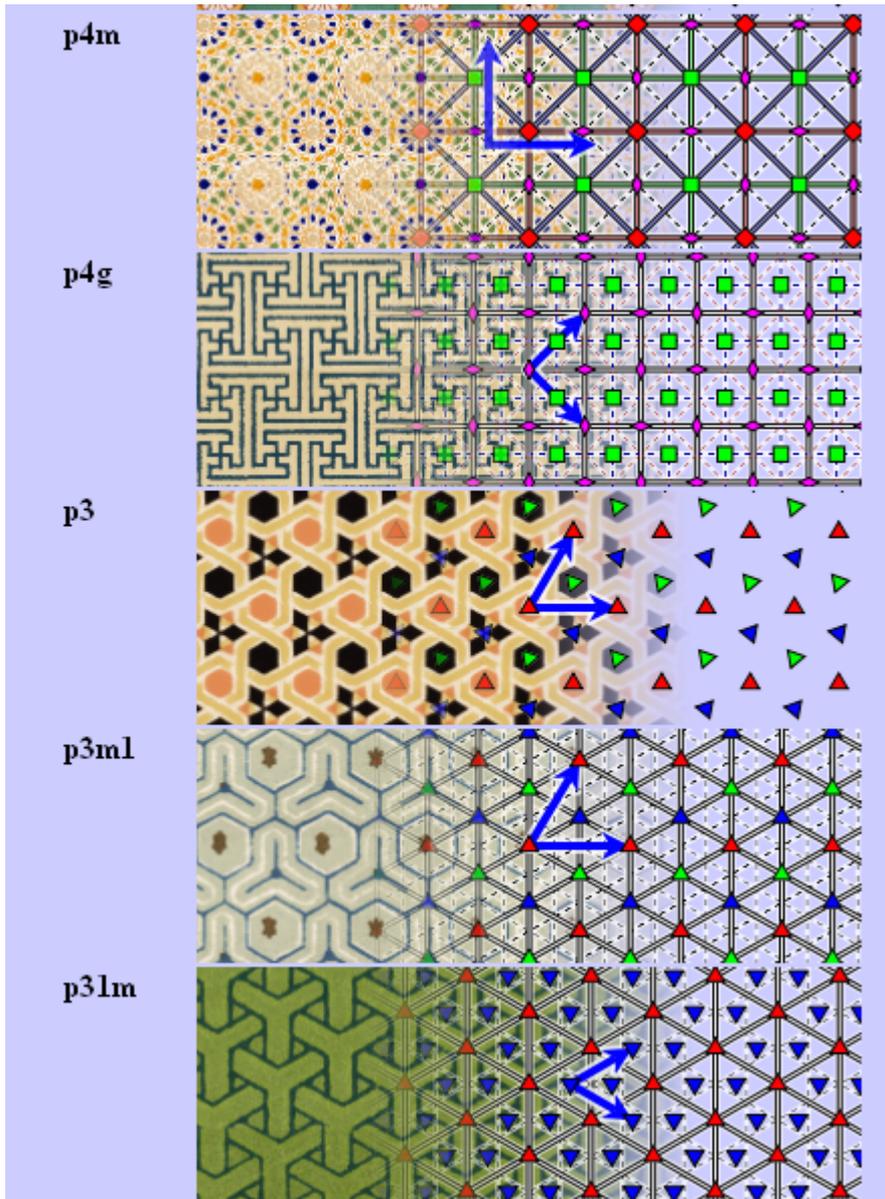
$\alpha = 45^\circ$  si **n** = 4,

$\alpha = 60^\circ$  si **n** = 3 o 6.

Si es simetría de reflexión: **m**

Si es simetría deslizante: **g**





Tomado de  
Martin von Gagern

<http://www.morenaments.de/gallery/exampleDiagrams/>

## Mosaicos de Escher

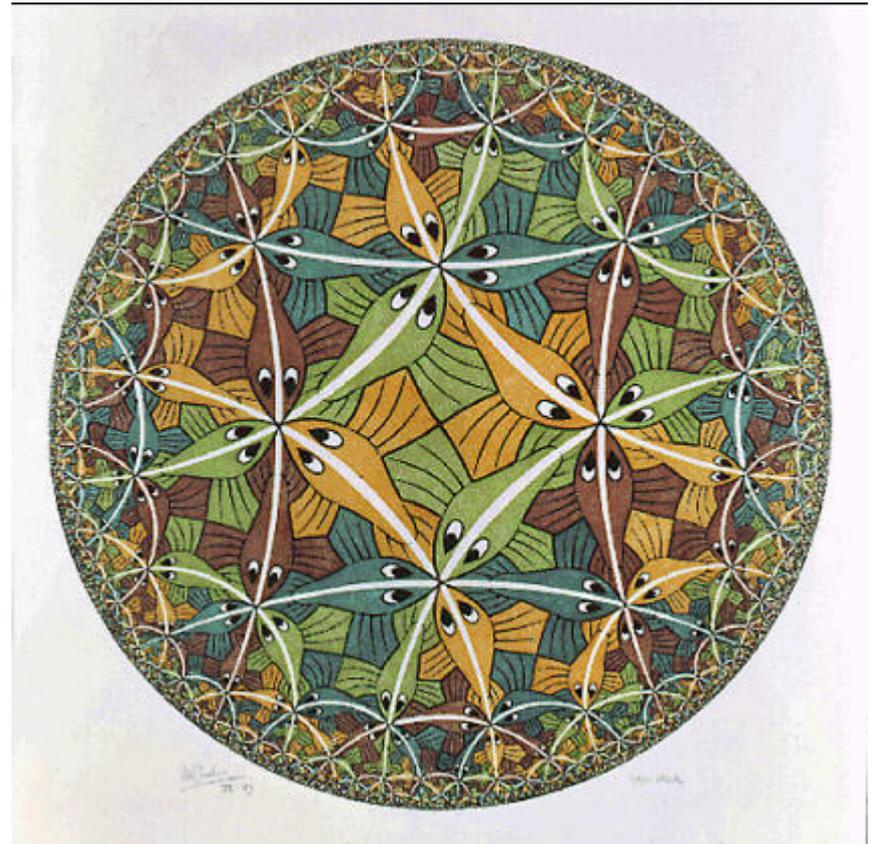
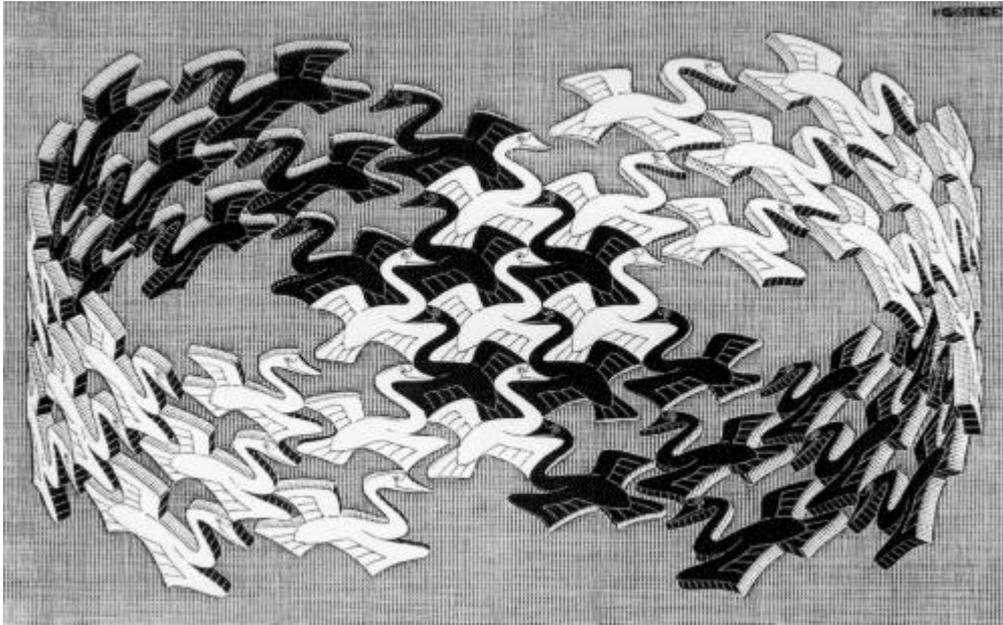
Maurits Cornelis Escher  
(1898-1972)

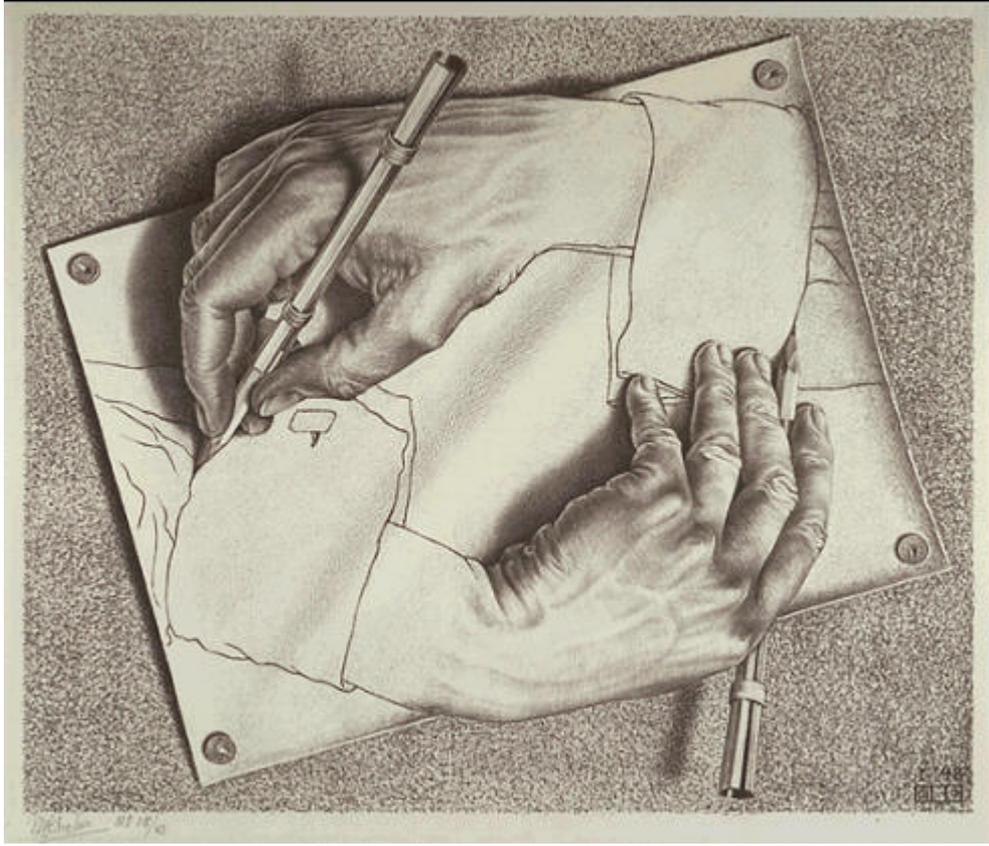
Dibujante y pintor holandés

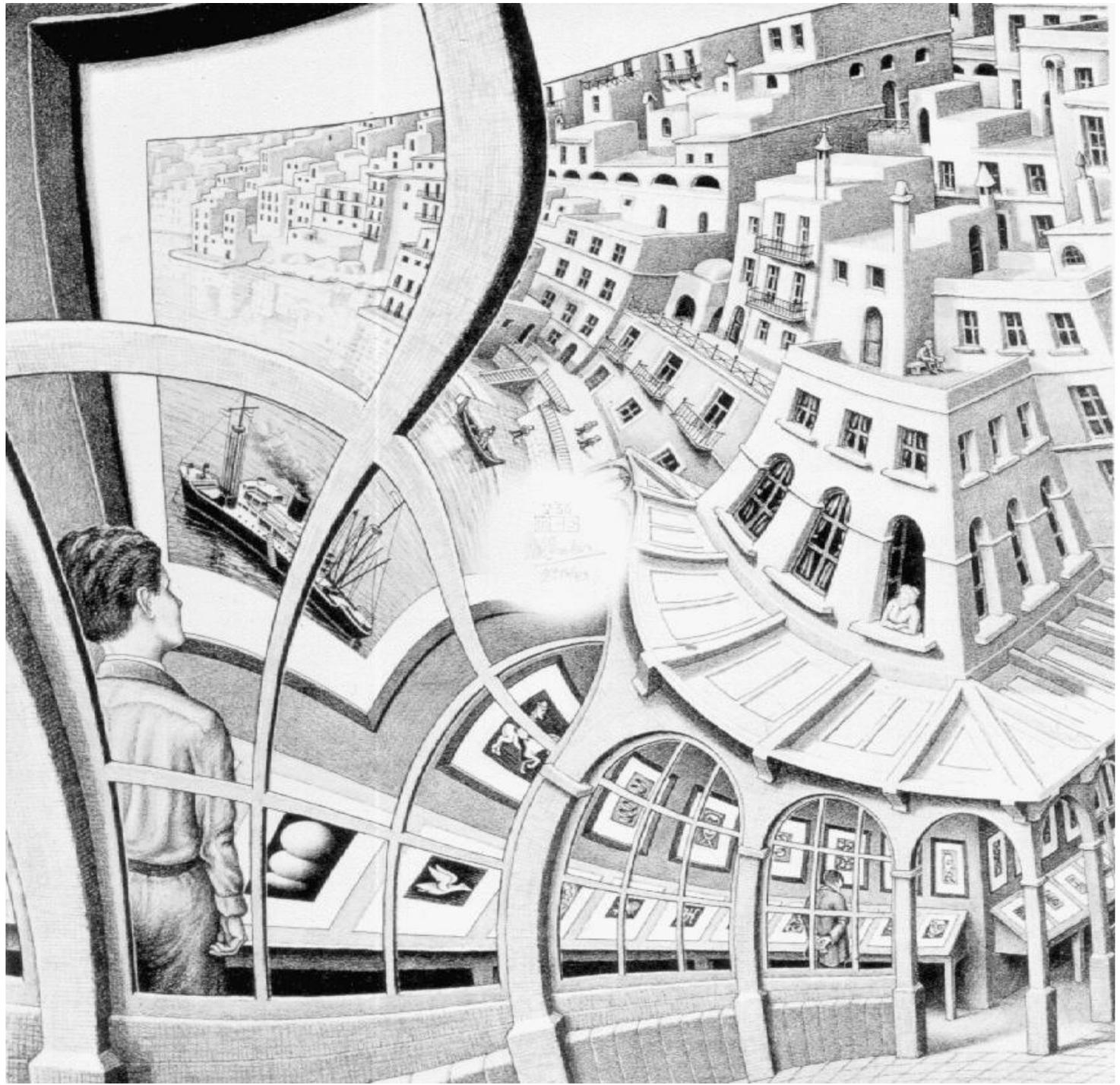


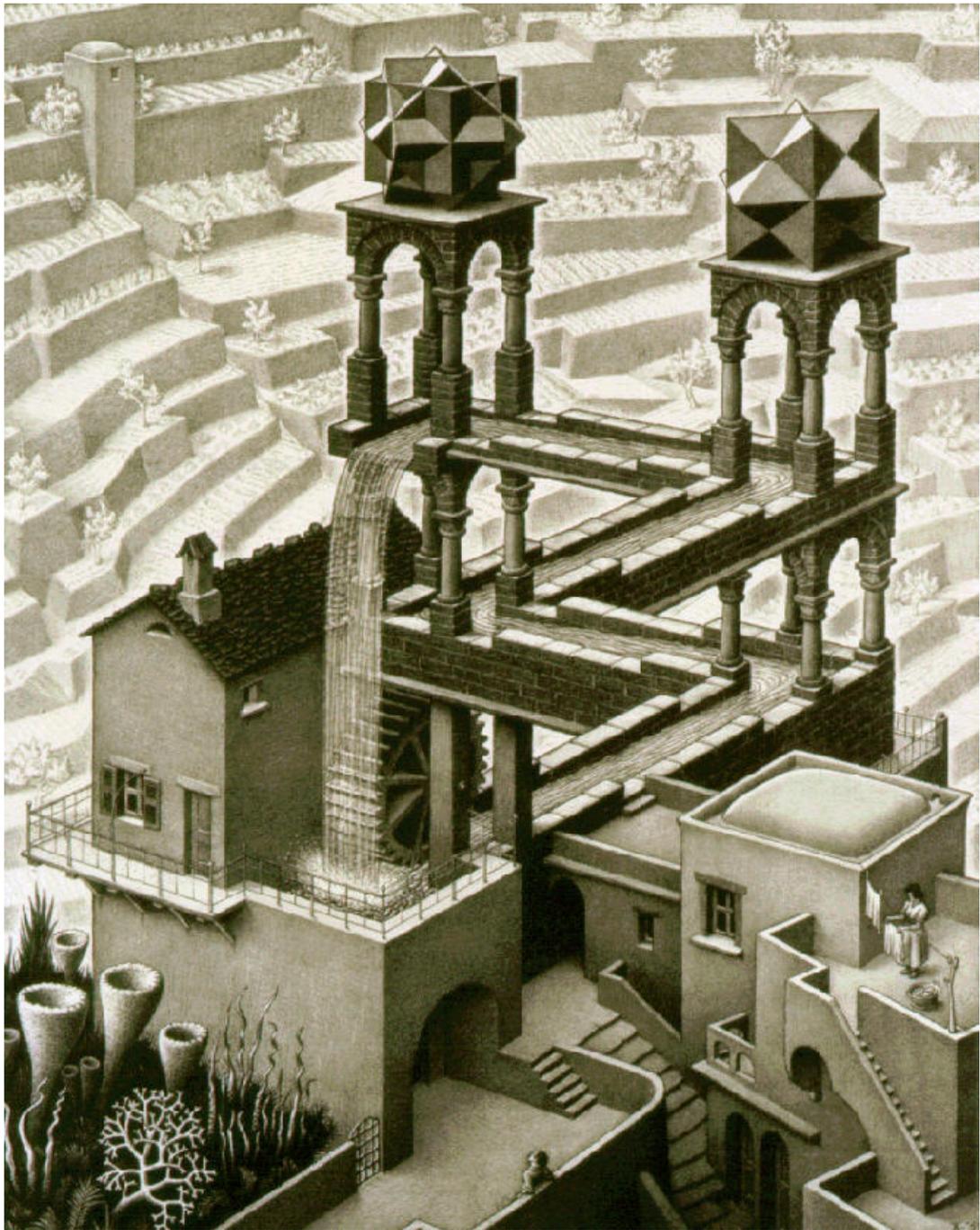
<http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/escher.htm>

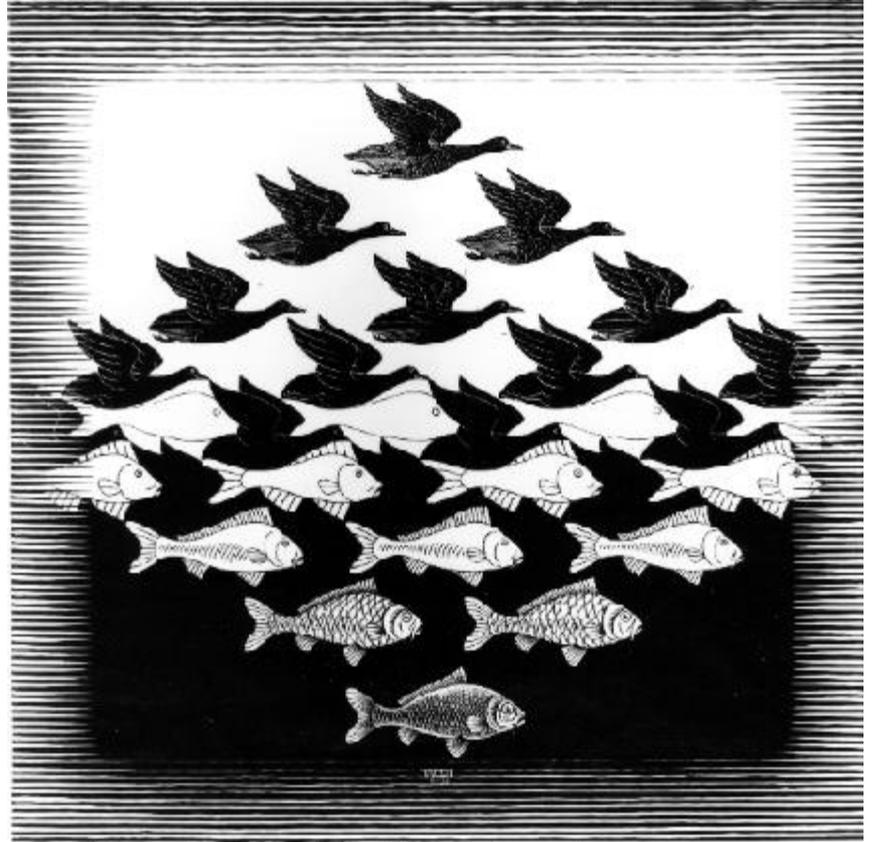
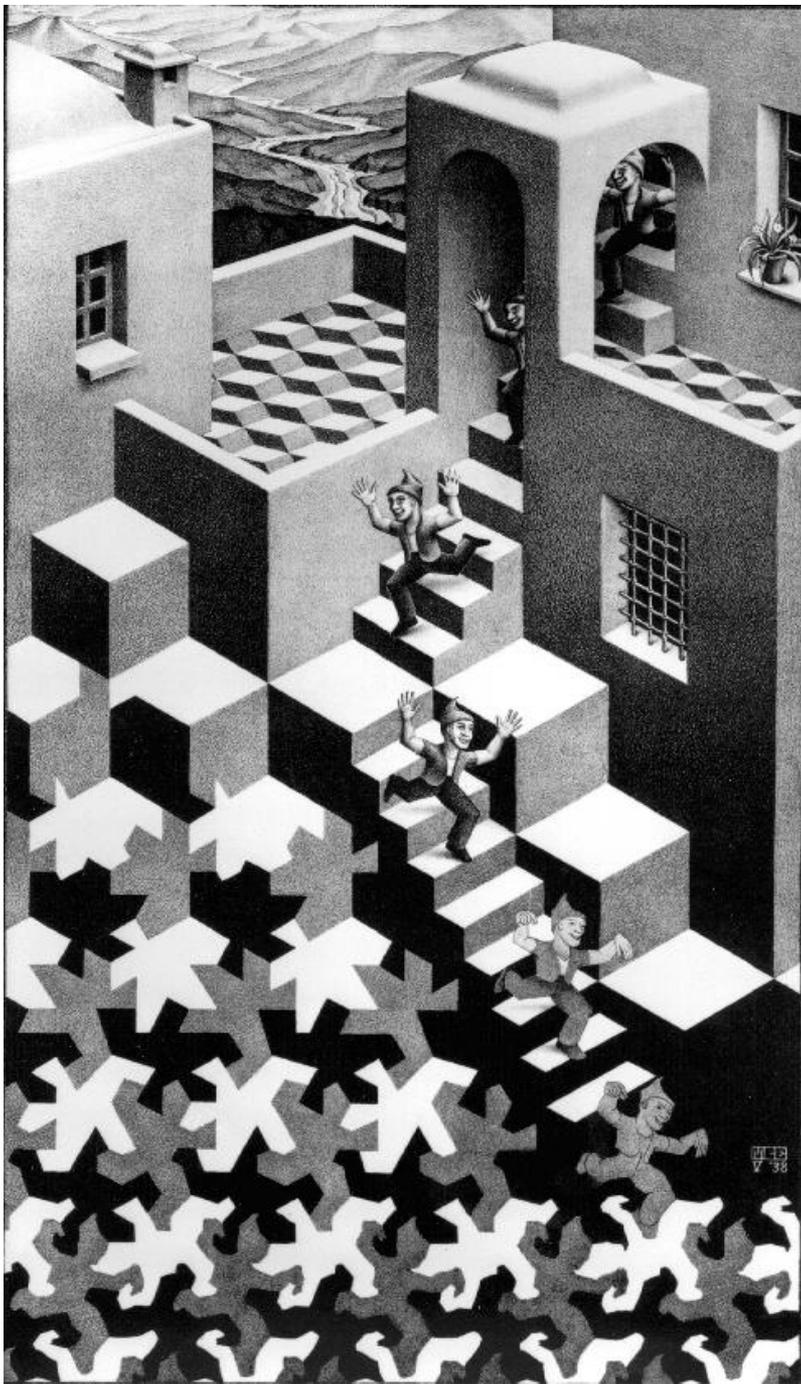
<http://www.mcescher.com/>













11-43  
MFB

## Referencias:

Symmetry, shape and space, L.C. Kinsey and T.E. Moore, Key College Publ., 2002

<http://usuarios.multimania.es/acericotri/index.htm>

<http://usuarios.multimania.es/acericotri/losebasi.htm>

<http://jmora7.com/Mosaicos/index.html>

