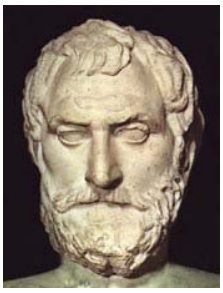
Geometría, arte y naturaleza

El objetivo de este curso es realizar un breve recorrido por algunas formas de la naturaleza y por algunas creaciones artísticas y arquitectónicas susceptibles de una visión geométrica. Veremos como, las figuras geométricas, sus propiedades y sus relaciones, aparecen en esas formas naturales y en esas creaciones humanas. Además, veremos que las ideas de la geometría permiten describir de forma sistemática los patrones y las simetrías que se observan en la naturaleza, en las construcciones y en el arte decorativo.

Orígenes de la geometría

Desde el punto de vista etimológico, la palabra Geometría se refiere a la "medida de la tierra". El origen de este término para designar a "la ciencia que estudia las propiedades del espacio y las figuras que se construyen en él" es consecuencia de los usos prácticos de la geometría que se produjeron en la antigüedad. Dichas prácticas tuvieron relación con la delimitación de terrenos o la medida de sus superficies. El historiador griego Herodoto atribuye a los agrimensores egipcios el comienzo de la Geometría, pero otras civilizaciones antiguas como los persas, los hindúes o los chinos, poseían conocimientos geométricos. Por ejemplo, en Babilonia se conocía de modo empírico el teorema de Pitágoras mucho antes de que naciera Pitágoras. En esa primera época los conocimientos tenían fines prácticos y se manejaban intuitivamente algunos casos sencillos de teoremas geométricos. Para las aplicaciones prácticas bastaba, en muchos casos, un resultado aproximado. En Babilonia, hacia el 2000–1600 a.C. consideraban la circunferencia como 3 veces el diámetro, es decir $\pi \approx 3$. Este mismo valor usaban los arquitectos romanos y aparece también en tratados chinos. Los egipcios aproximaban, hacia 1800 a.C., $\pi \approx (16/9)^2 \approx 3{,}16$.

Sin embargo, los pensadores griegos, comenzando por Tales de Mileto (~624 a.C. - 548 a.C.), fueron los primeros en obtener resultados geométricos mediante el razonamiento deductivo. Es Euclides, en el siglo IV a.C., quien tratando de recopilar y estructurar todos los resultados geométricos conocidos hasta ese momento construye la Geometría como teoría, con un método que se denomina *axiomático* y que aunque fue creado específicamente para la Geometría, actualmente es un método que se emplea en muchas ramas de las Matemáticas.



Tales de Mileto

Con el tiempo y especialmente a partir del siglo XVIII, la Geometría ha evolucionado y las ideas iniciales se han generalizado de un modo notable. Esta evolución ha dado lugar a nuevos conceptos y nuevas estructuras, al tiempo que la interrelación entre la Geometría y otras áreas de las matemáticas ha producido el descubrimiento de resultados matemáticos de gran profundidad.

Los Elementos de Euclides

En torno al 300 a.C., Euclides, el matemático griego discípulo de Platón, que enseñaba en Alejandría, escribió un tratado llamado *Los Elementos*, que recoge buena parte de los teoremas y construcciones de geometría conocidos hasta ese momento y los presenta de forma ordenada y lógica, con un nivel de rigor en las demostraciones muy alto para esa época. Los Elementos han constituido durante más de veinte siglos el principal libro de texto de matemáticas, tanto por el interés de sus contenidos de geometría, así como modelo de

Euclides de Alejandría

tratamiento axiomático de una teoría. En la actualidad siguen siendo una referencia esencial en la enseñanza de la geometría.

Los Elementos están divididos en 13 libros, que contienen en total 5 nociones comunes, 5 postulados, 130 definiciones, 465 proposiciones, 19 porismas y 17 lemas. Las nociones comunes son las siguientes:

Primera página de Los Elementos, en la primera edición impresa en latín en 1492, con traducción de Campanus

1. Cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.
2. Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, los totales son iguales.
3. Si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.
4. Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.
5. El todo es mayor que su parte.

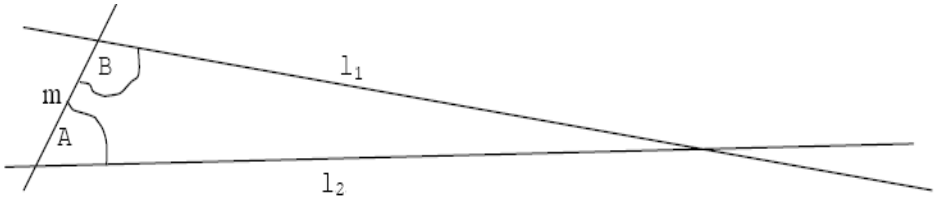
Los postulados son:

1. Postúlese que se pueda trazar una única recta entre dos puntos distintos cualesquiera.
2. Y que un segmento rectilíneo pueda ser siempre prolongado.

3. Y que haya una única circunferencia con un centro y un radio dados.

4. Y que todos los ángulos rectos sean iguales.

5. Y que si una secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores cuya suma es menor que dos rectos, las dos rectas, prolongadas indefinidamente, se cortan en el lado en que están los ángulos menores que dos rectos.



Tanto los postulados como las nociones comunes se admiten sin demostración. Son la base sobre la que se construye el resto de la teoría, usando los principios de la lógica.

Las proposiciones son los enunciados o teoremas que van seguidos de su demostración. Muchas proposiciones van acompañadas de explicaciones y dibujos.

En Los Elementos un porisma es una conclusión interesante que se deduce de una proposición demostrada, pero que no es necesaria para el desarrollo posterior del libro. En algunas versiones se les llama corolarios. Los lemas son teoremas que se enuncian dentro de la demostración de una proposición y luego se demuestran por separado.

Aunque con los conocimientos actuales el tratado de Euclides es incompleto, pues en él se dan por válidas algunas proposiciones que no se demuestran, es sin duda un trabajo admirable y de gran valor.

En toda teoría se trata de utilizar el menor número posible de postulados (o axiomas). El quinto postulado de Euclides es más complejo que los otros y durante siglos se sospechó que podía ser demostrado usando los otros postulados. Muchos matemáticos importantes intentaron demostrarlo y se escribieron muchas demostraciones que luego se vio que eran erróneas o incompletas.

La imposibilidad de demostrar el quinto postulado se descubrió en el siglo XIX cuando tres matemáticos ilustres, Gauss, Bolyai y Lobachevsky, obtuvieron, de forma simultánea e independiente, modelos de geometría completamente coherentes y rigurosos, que verificaban los cuatro primeros postulados pero no el quinto.

Puntos, rectas y planos

Los elementos básicos sobre los que construiremos la geometría son los puntos, las rectas y los planos. El espacio está formado por todos los puntos. Una recta tiene infinitos puntos. Como convención, usaremos letras griegas minúsculas para nombrar los planos, letras latinas minúsculas para nombrar las rectas y letras latinas mayúsculas para nombrar los puntos.

Dos puntos distintos determinan una única recta. La recta que pasa por los puntos A y B, la indicaremos por AB.

Dos rectas distintas, o no se cortan, o tienen un único punto en común.

Diremos que tres o más puntos están *alineados* o son *colineales* si los tres pertenecen a la misma recta. Por tres puntos no alineados pasa un único plano.

Diremos que cuatro o más puntos son *coplanares* si pertenecen al mismo plano. Dos o más rectas son coplanares si están en el mismo plano.

Dos rectas se dicen *secantes* si tienen un punto en común. Dos rectas coplanares se dicen *paralelas* si no se cortan. Se dice que dos rectas *se cruzan* si no son coplanares.

Por un punto pasan infinitas rectas y por una recta pasan infinitos planos.

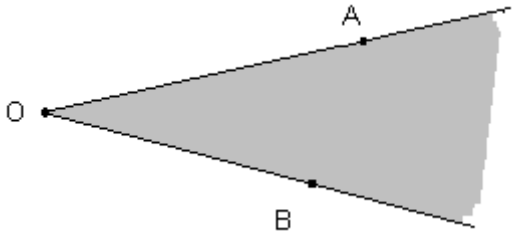
Semirrectas, segmentos y semiplanos

Un punto A situado en una recta la divide en dos partes llamadas *semirrectas*, y el punto A se llama origen de cada semirrecta. Estas semirrectas determinadas por A en la recta se llaman *semirrectas opuestas* o *complementarias*. La semirrecta de origen A que contiene el punto B la indicaremos por A_B.

Dados dos puntos *A* y *B*, llamamos *segmento* de extremos A y B al conjunto de puntos de la recta *AB* que están entre *A* y *B*. Lo indicamos por $\overline{AB}$. Dos segmentos se dicen congruentes o iguales si tienen la misma longitud. El punto medio de un segmento $\overline{AB}$ es el punto *M* tal que $\overline{AM} = \overline{MB}$.

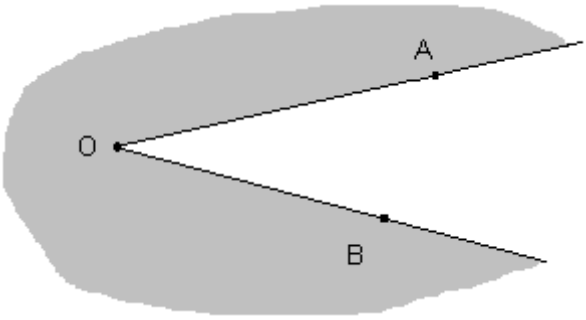
Una recta r contenida en un plano α divide a éste en dos regiones no vacías llamadas *semiplanos*.

Dadas dos semirrectas OA y OB que no son opuestas, la siguiente figura representa el *ángulo convexo* $A\hat{O}B$. El punto O se llama el vértice del ángulo y las semirrectas los lados.



Si las semirrectas O_A y O_B coinciden, se dice que el ángulo $A\hat{O}B$ es nulo. Si las semirrectas O_A y O_B son opuestas, se dice que forman un ángulo llano.

A cada ángulo convexo $A\hat{O}B$ corresponde un ángulo cóncavo, que es la región del plano formada por los puntos que no están en $A\hat{O}B$, ni en las semirrectas que lo determinan, ni son el vértice.



Dos ángulos se dicen *consecutivos* si tienen el mismo vértice y un lado común. Dos ángulos se dicen *adyacentes* si son consecutivos y sus lados no comunes son semirrectas complementarias. Dos ángulos se dicen *opuestos por el vértice* si tienen el mismo vértice y los lados de uno son semirrectas opuestas de los lados del otro.

La medida (en grados) de un ángulo convexo $A\hat{O}B$ es un número entre 0 y 180. La medida de un ángulo nulo es 0 y la medida de un ángulo llano es 180.

Dos ángulos se dicen *congruentes* o *iguales* si tienen la misma medida. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes. La suma de las medidas de dos ángulos adyacentes es 180º.

Un ángulo de vértice A contiene una semirrecta de vértice A, llamada *bisectriz*, que divide el ángulo en dos ángulos congruentes.

Un ángulo convexo se dice *recto* si mide 90º, *agudo* si mide menos de 90º y *obtuso* si mide más de 90º. Dos rectas secantes se dicen *perpendiculares* si al cortarse forman ángulos rectos.

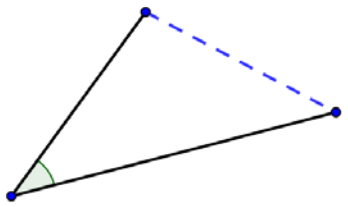
Triángulos

Dados tres puntos no alineados A, B y C, el *triángulo* ΔABC está formado por los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$. Los puntos A, B y C se llaman *vértices* del triángulo. El *interior* del triángulo es la intersección de los tres semiplanos AB_C, AC_B y BC_A. Los ángulos interiores del triángulo son $A\hat{B}C$, $B\hat{A}C$ y $B\hat{C}A$.

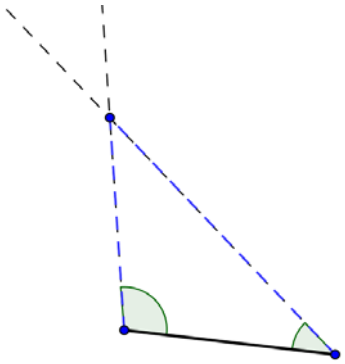
La geometría que desarrollaremos es la geometría euclídea, es decir, que verifica el quinto postulado de Euclides. Demostraremos que, como consecuencia de dicho postulado, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º.

Cómo se construye un triángulo

1. Un triángulo se puede construir a partir de tres puntos del plano no alineados.
2. Un triángulo se obtiene a partir de tres rectas, de las cuales no hay dos paralelas.
3. Un triángulo se construye a partir de dos segmentos con un extremo en común y el ángulo que forman.



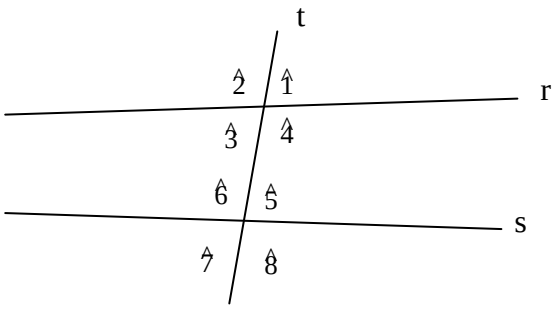
4. Un triángulo se forma a partir de un segmento y dos ángulos que sumen menos de 180º.



5. Un triángulo se construye a partir de tres segmentos, de los cuales, el más grande mide menos que la suma de los otros dos.

Diremos que dos triángulos ΔABC y $\Delta A_1B_1C_1$ son *congruentes* o *iguales* si sus lados y sus ángulos son congruentes, es decir, si $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$, $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$, $\hat{A} = \hat{A}_1$, $\hat{B} = \hat{B}_1$, $\hat{C} = \hat{C}_1$. Esta definición lleva implícita una correspondencia entre los vértices, lo que determina de forma coherente las igualdades entre lados y ángulos.

Ángulos formados por dos rectas y una transversal



Los ángulos $\hat{4}$ y $\hat{5}$ se llaman *correspondientes internos*. Lo mismo ocurre con $\hat{3}$ y $\hat{6}$.

Los ángulos $\hat{3}$ y $\hat{5}$ se llaman *alternos internos*. Lo mismo ocurre con $\hat{4}$ y $\hat{6}$.

De forma análoga, se definen los ángulos correspondientes externos y alternos externos.

Los ángulos $\hat{1}$ y $\hat{5}$ se llaman *correspondientes alternos*. Lo mismo ocurre con $\hat{4}$ y $\hat{8}$, $\hat{2}$ y $\hat{6}$, $\hat{3}$ y $\hat{7}$.

Hasta aquí no hemos usado el quinto postulado de Euclides. Recordemos que una de sus versiones es la siguiente:

Postulado V: Dada una recta r y un punto P exterior a la recta, hay una única recta que pasa por P y es paralela a r.

Otras versiones equivalentes son (con referencia a la figura anterior):

1. r || s si y solo si los ángulos correspondientes internos suman 180º.
2. r || s si y solo si los ángulos alternos internos son iguales.
3. r || s si y solo si los ángulos $\hat{1} = \hat{5}$.
4. r || s si y solo si los ángulos $\hat{1} + \hat{8} = 180º$.

Teorema: La suma de los tres ángulos de un triángulo es 180º.

Dem.: Dado ΔABC, sea r la recta paralela a AB que pasa por C. Sea D un punto de r que está en BCA y sea E un punto de r que está en ACB. Como r || AB entonces $B\hat{A}C = A\hat{C}D$ y $A\hat{B}C = B\hat{C}E$. Luego, la suma de los ángulos del triángulo:

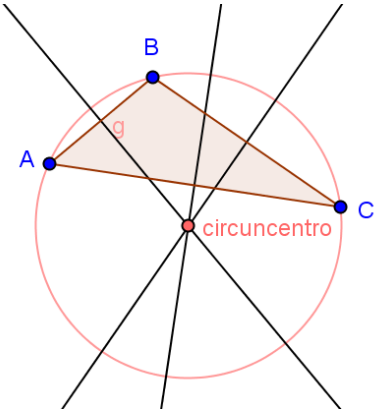
$$B\hat{A}C + A\hat{B}C + A\hat{C}B = A\hat{C}D + A\hat{C}B + B\hat{C}E = D\hat{C}E = 180º. \square$$

Esta demostración se puede visualizar muy bien mediante plegado de papel.

Puntos notables de un triángulo

Una *mediana* de un triángulo es un segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Por lo tanto, cada triángulo tiene tres medianas. Sorprendentemente, las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto, ¿por qué? Este punto se llama *baricentro*.

La *mediatriz* de un segmento es la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio. Los puntos que forman la mediatriz son, precisamente, los puntos que están a la misma distancia de los dos extremos del segmento.

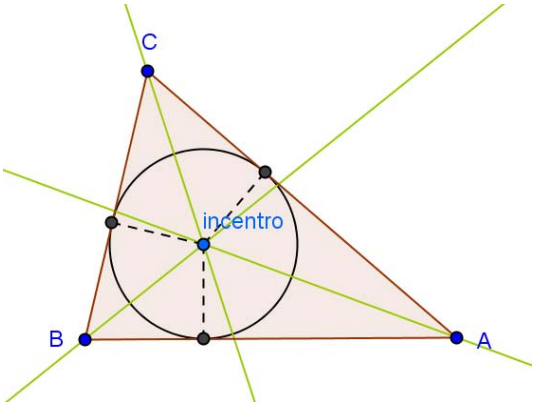


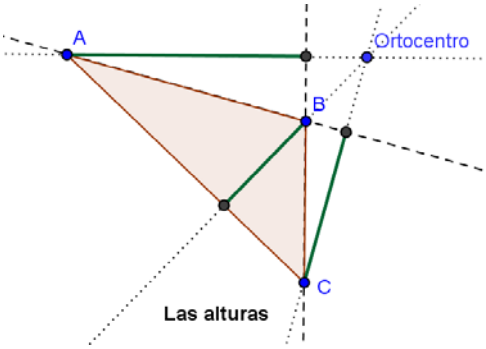
Dado un triángulo, se puede trazar la mediatriz de cada uno de los lados. Las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto llamado *circuncentro*. El circuncentro está a la misma distancia de los tres vértices. Entonces se puede dibujar una circunferencia con centro en el circuncentro y que pasa por los tres vértices.

La distancia entre un punto y una recta es la medida del segmento perpendicular a la recta que une el punto con la recta.

Dado un triángulo, se puede trazar la bisectriz de cada uno de sus ángulos. Nuevamente, las tres bisectrices se cortan en un punto. Esto se debe a que todos los puntos de la bisectriz están a la misma distancia de los lados del ángulo.

El punto de corte de las bisectrices se llama *incentro*, porque es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo, es decir, la circunferencia que es tangente a los tres lados del triángulo.





Una altura de un triángulo es un segmento que es perpendicular a un lado y que va desde el vértice opuesto hasta dicho lado o hasta la recta que lo contiene.

El ortocentro, el baricentro y el circuncentro están alineados. La recta que los contiene se llama recta de Euler.

Clasificación de los triángulos

Por sus lados: Un triángulo que tiene sus tres lados congruentes se dice que es *equilátero*. Un triángulo que tiene dos lados iguales se dice que es *isósceles*. Un triángulo equilátero es un caso particular de triángulo isósceles. Un triángulo que tiene todos sus lados distintos se dice que es *escaleno*.

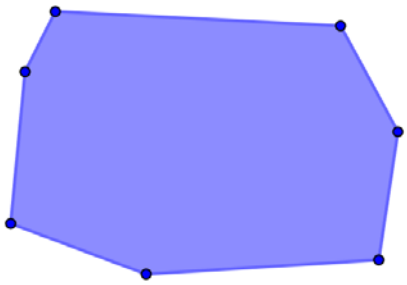
Intenta descubrir propiedades de los triángulos equiláteros y de los triángulos isósceles. Por ejemplo, qué relación existe entre los puntos notables de un triángulo equilátero, o cómo son los ángulos de un triángulo isósceles.

Por sus ángulos: Un triángulo puede tener, como máximo, un ángulo recto o un ángulo obtuso, y siempre tiene, al menos, dos ángulos agudos, ¿por qué?

Un triángulo que tiene un ángulo obtuso se dice que es obtusángulo. Un triángulo que tiene un ángulo recto se dice que es rectángulo. Un triángulo que tiene los tres ángulos agudos se dice que es acutángulo.

Cuadriláteros y polígonos

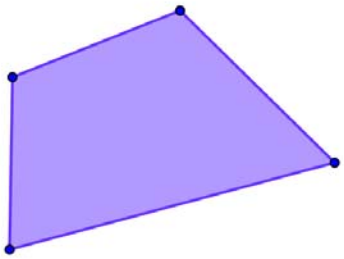
Un polígono es una figura plana formada por una poligonal cerrada, es decir, una sucesión de segmentos, tales que cada uno está unido al siguiente por un vértice y el último segmento se une por el vértice con el primero; además se requiere que la poligonal no se corte a si misma.



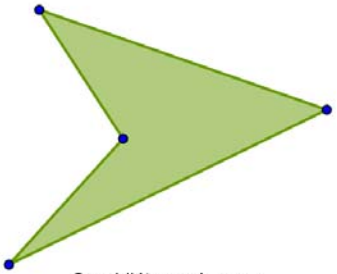
Un polígono con *n* lados tiene *n* vértices.

Cuadriláteros convexos y cóncavos

Un cuadrilátero (o un polígono) es *convexo* si dados dos puntos cualesquiera del cuadrilátero, el segmento que los une está completamente contenido en le cuadrilátero. Un cuadrilátero (o un polígono) es *cóncavo*, si hay algún par de puntos del cuadrilátero tales que le segmento que los une tiene una parte fuera del cuadrilátero.

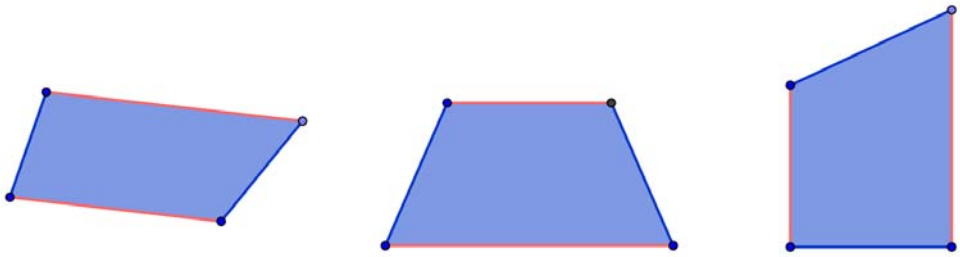


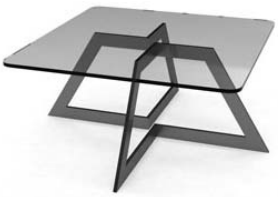
Cuadrilátero convexo



Cuadrilátero cóncavo

Trapecios: un trapecio es un cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos

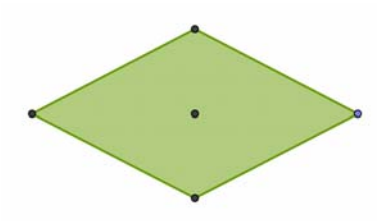


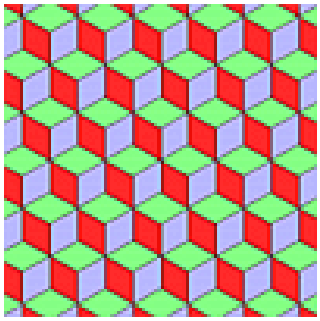


Machu - Pichu

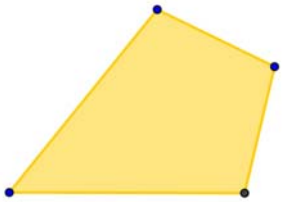
Trifurcation, Kanagawa, Japón

Rombos: un rombo es un cuadrilátero con sus cuatro lados iguales. Los ángulos opuestos de un rombo son iguales y sus lados opuestos son paralelos.





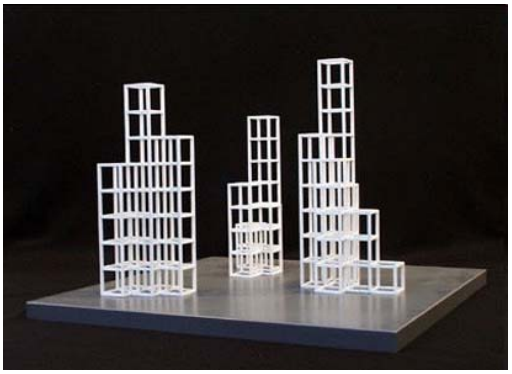
Cometas: Una cometa (a veces llamada romboide) es un cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos iguales.



Paralelogramos: Un paralelogramo es un cuadrilátero con lados paralelos dos a dos. Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales y los lados opuestos también.

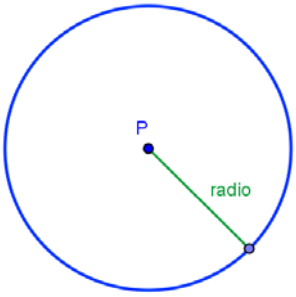
Rectángulos: Un rectángulo es un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos. Un rectángulo es un paralelogramo, pero no todos los paralelogramos son rectángulos.

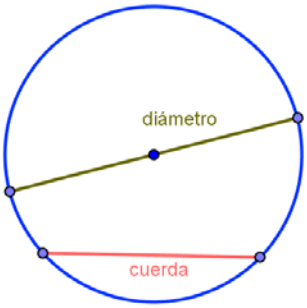
Cuadrados: Un cuadrado es un cuadrilátero con sus cuatro ángulos iguales y sus cuatro lados iguales. Un cuadrado es a la vez un rombo y un rectángulo.



La longitud de la circunferencia

Una circunferencia con centro en un punto P y radio r, está formada por los puntos del plano que se encuentran a la misma distancia r de P.





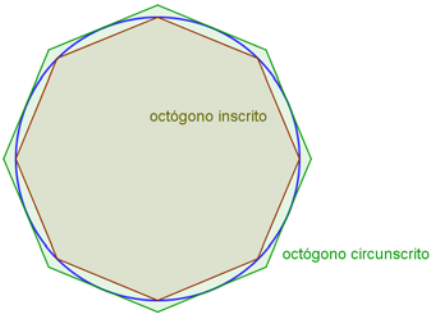
Un segmento que une dos puntos de la circunferencia se llama *cuerda*. Una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia es un *diámetro* y mide el doble que el radio.

La longitud de una circunferencia es proporcional al diámetro; la constante de proporcionalidad es un número irracional (tiene infinitas cifras decimales no periódicas) llamado π, es decir, si L es la longitud de la circunferencia y d es la medida del diámetro, entonces

$$L = \pi \cdot d$$

El método de exhausción de Arquimedes

En su libro *Medida de la circunferencia*, Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.) calculó una aproximación de la longitud de una circunferencia de radio dado. Esto equivale a obtener una aproximación del número π.



La idea de Arquímedes fue aproximar la circunferencia mediante polígonos regulares inscritos y circunscritos a la circunferencia.

Cuanto mayor es el número de lados de los polígonos, su perímetro se acerca más a la longitud de la circunferencia.

Si se toman polígonos de 2^n lados (4, 8, 16, 32, 64, etc.) y suponemos que la circunferencia tiene diámetro 1, en la siguiente tabla se recogen los perímetros de los polígonos inscrito y circunscrito:

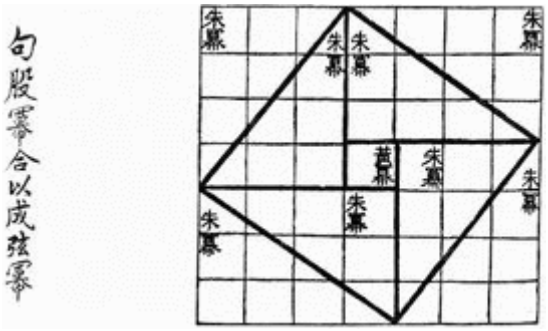
n	Perímetro del polígono inscrito	Perímetro del polígono circunscrito
2	2,828427124746	4,000000000000
3	3,061467458921	3,313708498985
4	3,121445152258	3,182597878075
5	3,136548490546	3,151724907429
6	3,140331156955	3,144118385246
7	3,141277250933	3,142223629942
8	3,141513801144	3,141750369169
9	3,141572940367	3,141632080703
10	3,141587725277	3,141602510257
11	3,141591421511	3,141595117750
12	3,141592345570	3,141593269629
13	3,141592576585	3,141592807600
14	3,141592634339	3,141592692092

Notar que el resultado obtenido para n = 14, coincide con π en las primeras siete cifras decimales.

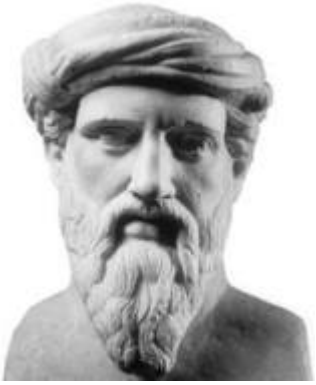
El teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras es uno de los teoremas más populares y es el que mucha gente recuerda de su educación escolar. Además es el teorema con mayor número de demostraciones: Elias Scott Loomis, publica a principios del siglo XX, un libro con 367 demostraciones del teorema.

Existen evidencias de que el teorema era conocido mucho tiempo antes de que viviera Pitágoras y no hay certeza de que Pitágoras demostrara el teorema. Por ejemplo, hay una demostración china del teorema, escrita hacia el siglo X a.C. Con el objeto de obtener ángulos recto, los antiguos egipcios utilizaban una cuerda para construir un triángulo de lados 3, 4 y 5 y así tenían la certeza de que su ángulo mayor era recto.



Demostración china del T. de Pitágoras

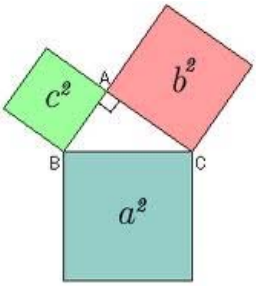


Sin embargo, Pitágoras y sus discípulos hicieron contribuciones fundamentales a la ciencia y la cultura de gran influencia en el desarrollo de las matemáticas y de otras materias. Pitágoras nació en Samos, hacia el 580 a.C. Con el fin de acrecentar sus conocimientos, viajó a Egipto, Fenicia y Babilonia. De regreso a Grecia, se instaló en Crotona (en el sur de Italia) fundó una sociedad secreta con intereses religiosos, filosóficos y matemáticos, cuyos miembros elaboraban y compartían conocimientos de estas disciplinas. Los Pitagóricos dividían el conocimiento en cuatro ramas: Música, Geometría, Aritmética y Astronomía y en todas ellas elaboraron ideas de gran profundidad, algunas de las cuales tienen vigencia en la actualidad. A ellos se debe la fundamentación aritmética de la escala musical. En matemáticas, introdujeron la "necesidad de demostrar" y el rigor era una de las normas de su sociedad. Finalmente,

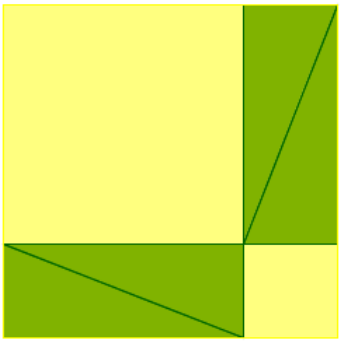
la orden Pitagórica fue disuelta y su casa fue incendiada, lo que obligó a sus miembros a dispersarse.

Teorema de Pitágoras: En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

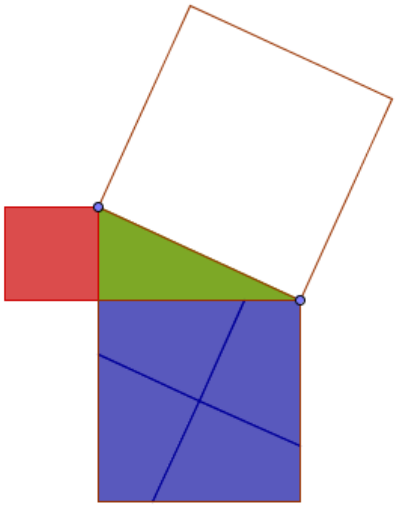
El cuadrado de la hipotenusa es igual al área de un cuadrado con lado en la hipotenusa y lo mismo ocurre con los cuadrados de los catetos, de manera que el teorema se puede también enunciar en términos de áreas. Esto ha dado lugar a muchas de las demostraciones gráficas que se conocen, de las cuales presentamos dos.

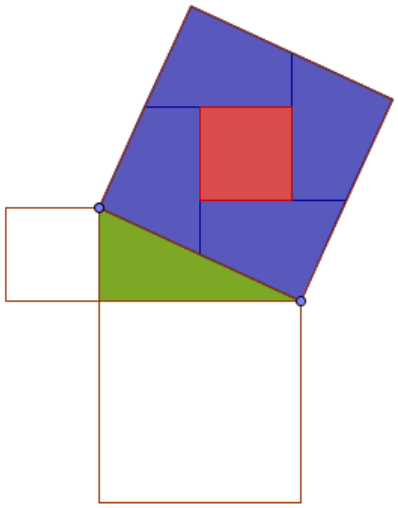


Una demostración: los cuadrados amarillos tienen por área el cuadrado de la hipotenusa y los cuadrados de los catetos.



Demostración de Perigal:





* Estas figuras son de Manuel Sada (http://docentes.educacion.navarra.es/~msadaall/geogebra/pitagoras.htm)

Más demostraciones se pueden ver en las siguientes páginas:
http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml
http://roble.pntic.mec.es/~jarran2/cabriweb/1triangulos/teoremapitagoras.htm
http://docentes.educacion.navarra.es/~msadaall/geogebra/pitagoras.htm

Un video muy interesante, titulado “Pitágoras, mucho más que un teorema”, se puede ver en:
http://www.rtve.es/mediateca/videos/20100922/universo-matematico-22-09-10/884344.shtml

Construcciones con regla y compás

Estos son problemas clásicos en los que se trata de construir una figura geométrica usando solamente la regla no graduada y el compás. La solución del problema consiste no tanto en la construcción de la figura como en explicar el modo de realizarla y en efectuar la demostración correspondiente. El problema se considera resuelto si se ha señalado el método de construcción de la figura y se ha demostrado que realizando los pasos indicados se obtiene efectivamente la figura con las propiedades pedidas.

La regla como instrumento de construcciones geométricas permite trazar

- una recta cualquiera,
- una recta cualquiera que pasa por un punto y
- una recta que pasa por dos puntos dados

Con la regla no se puede realizar ninguna otra operación: no se pueden construir segmentos, no pueden utilizarse simultáneamente ambos bordes de la regla, etc.

Con el compás podemos describir desde un centro la circunferencia de radio dado. En particular, el compás permite construir el segmento igual a un segmento dado, en una semirrecta dada y a partir de un punto dado.

Construcción de un segmento congruente a uno dado

Se tiene un segmento $\overline{AB}$ y una semirrecta con origen en un punto *O* y se quiere dibujar un segmento sobre la semirrecta, con un extremo en *O* y cuya longitud sea la de $\overline{AB}$. Con el compás se pincha en *A* y se abre hasta *B*. Manteniendo la abertura del compás, se pincha en *O* y se dibuja el corte *C* de la semirrecta con la circunferencia de centro *O* y radio igual a $\overline{AB}$. Entonces $\overline{OC}$ es el segmento buscado.

Construcción de un ángulo congruente a uno dado

Dado un ángulo $B\hat{A}C$, una semirrecta O_D y un semiplano α determinado por la recta OD, se quiere construir un ángulo con vértice O, un lado la semirrecta O_D, con medida igual a $B\hat{A}C$ y contenido en α.

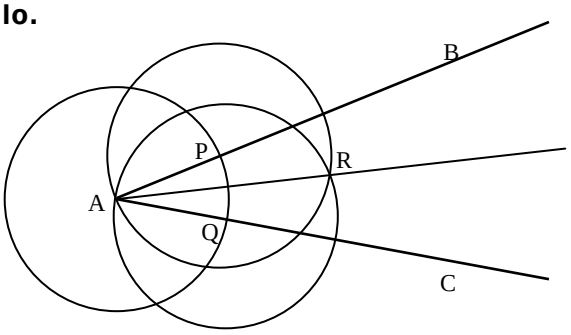
Con centro en A se dibuja una circunferencia, que cortará a los lados de $B\hat{A}C$ en puntos P_1 y P_2. Manteniendo la abertura del compás se dibuja una dibuja una circunferencia con centro en O y con el mismo radio que la anterior. Esta circunferencia corta a O_D en un punto Q_1. Se pincha el compás en P_1 y se abre hasta P_2. Con esta medida, se dibuja una circunferencia con centro en Q_1. Esta circunferencia corta a la circunferencia anterior en dos puntos. Uno de estos puntos está en el semiplano α y lo llamamos Q_2. Entonces $Q_2\hat{O}Q_1$ es el ángulo buscado.

Construcción del punto medio y de la mediatriz de un segmento.

Dado un segmento $\overline{AB}$ se quiere construir el punto medio M y la mediatriz. Se dibuja la circunferencia con centro en A y radio $\overline{AB}$, y luego la circunferencia con centro en B y radio $\overline{AB}$. Estas circunferencias se cortan en dos puntos P y Q. La recta PQ es la mediatriz de $\overline{AB}$ y la intersección de PQ con $\overline{AB}$ es el punto medio M.

Construcción de la bisectriz de un ángulo.

Dado un ángulo $B\hat{A}C$, trazamos una circunferencia de centro A, que cortará a los lados del ángulo en puntos P y Q, respectivamente. Con la misma abertura del compás se dibuja una circunferencia con centro en P y otra con centro en Q. Estas dos circunferencias se cortan en un punto R. La semirrecta A_R es la bisectriz del ángulo.



Construcción de un triángulo de lados dados

Dados tres segmentos $\overline{AB}$, $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$, se quiere construir un triángulo ΔABC tal que, $\overline{AC} = \overline{PQ}$ y $\overline{BC} = \overline{RS}$. Se supone que $\overline{PQ} + \overline{RS} > \overline{AB}$. Se pincha con el compás en P y se abre hasta Q. Con esta abertura se traza una circunferencia con centro en A. Luego se pincha con el compás en R y se abre hasta S. Con esta abertura se traza una circunferencia con centro en B. Estas circunferencias se cortan en dos puntos. Si llamamos C a uno de ellos entonces ΔABC es el triángulo buscado.

Tres problemas clásicos

Los matemáticos griegos se interesaron por tres problemas de construcciones geométricas: la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo.

1. La duplicación del cubo. El problema consiste en calcular el lado de un cubo que tuviera doble volumen que otro dado previamente. El lado que se buscaba debía ser obtenido a partir del primitivo mediante la regla y el compás. Cuenta la tradición que una epidemia asoló Atenas hacia el 428 a.C. Para acabar con ella se consultó el oráculo de Apolo, en Delos, y el oráculo respondió que debían duplicar el volumen del altar de Apolo, que tenía forma de cubo. Los atenienses duplicaron las dimensiones del altar y entonces el volumen se multiplicó por 8. Ciertamente, la epidemia no desapareció. Varios geómetras ofrecieron soluciones matemáticas parciales y aproximadas del problema que, sin duda, contribuyeron al desarrollo de las matemáticas. Tuvieron que pasar muchos siglos para poder probar que el problema no tenía solución en la forma en que lo planteaban los griegos. En efecto, utilizando coordenadas cartesianas el problema se reduce a resolver la ecuación $x^3 = 2$, y se puede demostrar que, partiendo de un segmento de longitud *a*, no se puede construir con regla y compás un segmento de longitud $\sqrt[3]{2}\,a$ (Descartes, 1637).
2. La trisección del ángulo. Se pretendía dividir un ángulo en tres ángulos iguales, usando solo la regla y el compás. Esto no es posible en general y varios matemáticos introdujeron curvas auxiliares que les sirvieran de ayuda, como por ejemplo, la *trisectriz* de Hipias. El matemático francés Pierre Wantzel (1814-1848) demostró que un ángulo α es trisecable con regla y compás si el polinomio $4x^3 - 3x - \cos(\alpha)$ es reducible.
3. La cuadratura del círculo. Sorprendía a los griegos que dibujando, sólo con regla y compás, no se pudiese construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado. Este problema preocupó a muchas generaciones de matemáticos. A veces se ofrecieron soluciones aparentes, triviales y sin sentido. Hubo matemáticos que dedicaron una gran parte de su vida a intentar resolver el problema de la cuadratura del círculo (evidentemente sin conseguirlo). La imposibilidad de la cuadratura del círculo fue plenamente probada por Lindemann a finales del siglo XIX, al haber demostrado la transcendencia del número π; esto es, π no puede ser raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros.

Construcción de polígonos regulares

Un polígono es regular si tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos iguales. Hay tres maneras principales de plantear la construcción de polígonos regulares con regla y compás:

1. construir el polígono regular de n lados que tiene como lado un segmento dado,
2. construir el polígono regular de n lados inscripto en una circunferencia dada,
3. construir el polígono regular de n lados circunscrito a una circunferencia dada.

Los problemas 2 y 3 son equivalentes a dividir la circunferencia en n partes iguales.

La construcción de un triángulo equilátero (n = 3) o de un cuadrado (n = 4) se puede realizar en cualquiera de los tres casos. También se puede dividir la circunferencia en 5 partes iguales y así construir el pentágono inscripto, aunque la construcción es más complicada que las anteriores. Como 2/5 – 1/3 = 1/15, también se obtiene el polígono regular de 15 lados.

Si se puede dividir la circunferencia en n partes iguales, como se puede bisecar un ángulo, se puede dividir la circunferencia en 2n partes iguales. Aplicando esto a los casos anteriores, se deduce que se pueden construir polígonos regulares de:

3, 6, 12, 24, ...

4, 8, 16, 32, ...

5, 10, 20, 40, ...

15, 30, 60, 120, ...

Todo esto se sabía en tiempos de Euclides, pero hubo que esperar unos 2000 años para que Carl Fridrich Gauss (1777-1855) realizara la construcción del polígono regular de 17 lados, en 1796.

Pero ¿qué ocurre con los polígonos regulares de 7, 9, 11, 13, 14, 19, ... lados? Gauss demostró que un polígono regular de n lados se puede construir con regla y compás si n es el producto de una potencia de 2 y uno o más primos de Fermat distintos. Un primo de Fermat es un número primo de la forma $2^{2^k} + 1$. No todos los números de la forma $2^{2^k} + 1$ son primos: Son primos de Fermat 3, 5, 17, 257, 65537, spero $2^{2^5} + 1 = 4294967297$, no es primo. Por ejemplo, el polígono regular de 15 lados se puede construir porque 15 es el producto de dos primos de Fermat diferentes. Del mismo modo, el polígono de 204 = 22 x 3 x 17 se puede construir con regla y compás.

Gauss también afirmó que el recíproco del enunciado anterior era cierto, es decir, que esos eran los únicos polígonos que se podían construir, pero no escribió la demostración. Pierre Wantzel dio una demostración rigurosa en 1837.

Por lo tanto, los casos con n = 7, 9, 11, 13, 14, 19, 21, 22, 23, 25, etc., son imposibles.