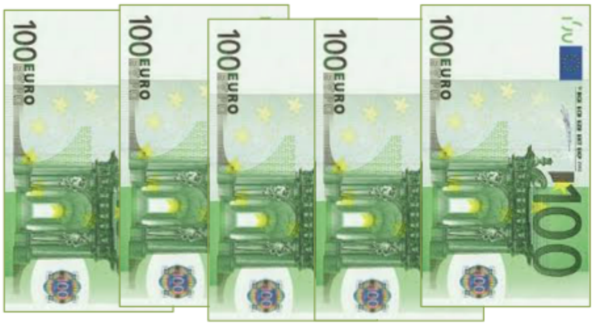
Tema 3. Divisibilidad

500

5 x 100



5 x 2 x 50

5 x 2 x 5 x 10

¿  ?

0. Introducción

En el Segundo Ciclo de Primaria los estudiantes se inician en la resolución de problemas en los que implícitamente aparece el concepto de división. Un enunciado posible en Tercero de Primaria es el siguiente

P.1. Andrés desea colocar 126 libros en cajas. Si en cada caja sólo caben 9 libros, ¿cuántas cajas necesitará? ¿Y que sucederá en el caso de tener que colocar 128 libros?

Se insta al lector a que tome el papel de un alumno de Tercero de Primaria, piense formas distintas de abordar ese problema y anote la idea básica de cada una de ellas.

¿Los métodos seguidos coinciden con algunos de los enumerados a continuación?

- Usando el algoritmo de la división:

$$\begin{array}{r|l} 126 & 9 \\ \cline{2-2} 36 & 14 \\ 0 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 128 & 9 \\ \cline{2-2} 38 & 14 \\ 2 & \end{array}$$

- En cualquiera de los dos casos vamos restando 9 a la cantidad dada hasta que no podamos más. El efecto de restar nueve representa llenar una caja. La cantidad de veces que hayamos restado 9 coincide con el número de cajas que se ha podido llenar.
- Pensamos que el número de cajas es mayor que 10 y menor que 20 puesto que las cantidades dadas están comprendidas entre 90 y 180. Después vamos efectuando las siguientes operaciones: 9·11, 9·12, 9·13, … hasta conseguir
  - una cantidad que alcance el valor pedido, como sucede con 126 puesto que $126 = 9 \cdot 14$
  - o bien obtener dos cantidades que dejen en medio a la dada, como sucede con 128: $9 \cdot 14 < 128 < 9 \cdot 15$

Otra cuestión posible relacionada con el enunciado anterior puede ser la siguiente:

P.2. Los 126 libros, ¿de qué otras formas pueden ser metidos en cajas iguales de manera que se utilicen un número de cajas completas?

En los apartados de este tema iremos viendo con qué aspectos teóricos están relacionadas los enunciados anteriores.

1. División euclídea

Por cualquiera de los caminos seguidos en el apartado anterior para resolver el enunciado P.1., lo que se está efectuando es lo que se conoce como *división euclídea* de 126 entre 9 y de 128 entre 9 respectivamente, porque dividir un número entero positivo a entre otro entero positivo b (siempre que este sea distinto de 0) es hallar dos números q y r de manera que, siendo r menor que b, a coincida con $b \cdot q + r$. Que no es otra cosa que lo que se ha realizado por cualquiera de las vías indicadas en la resolución del enunciado P.1. En cada una de ellas se concluye que:

$$126 = 9 \cdot 14$$
$$128 = 9 \cdot 14 + 2$$

y por tanto en todos los casos se ha dividido. Hemos de advertir pues que no debe identificarse el concepto de división con el algoritmo de la división. El ejemplo del apartado anterior quiere ilustrar que para dividir un número entre otro es posible seguir diferentes métodos, aunque unos sean más efectivos que otros. Reescribiendo la idea de división:

División euclídea

Dados dos números enteros positivos a y b con $b \neq 0$, existen dos números enteros q y r verificando

$$a = b \cdot q + r \text{ con } 0 \leq r < b. \qquad (*)$$

Los números q y r con esas condiciones son únicos y son llamados cociente y resto respectivamente. Cuando el resto de una división es 0, la división se dice exacta. Si el resto no es 0, suele decirse entera.

EJEMPLO

Consideremos las siguientes igualdades:

- $977 = 26 \cdot 37 + 15$
- $8532 = 1060 \cdot 8 + 52$

Sin necesidad de hacer operación alguna, pero teniendo en cuenta que el cociente y el resto son únicos con las condiciones $(*)$, podemos afirmar que si dividimos 977 entre 26, el cociente es 37 y el resto es 15 puesto que 15 es menor que 26. Asimismo si dividimos 977 entre 37, el cociente es 26 y el resto es 15 puesto que 15 es menor que 37.
Si consideramos la segunda igualdad, podemos asegurar que 8 es el cociente de dividir 8532 entre 1060 y 52 es el resto, ya que 52 < 1060. Y podemos decir que 1060 no es el cociente de dividir 8532 entre 8 puesto que 52 no es menor que 8.

Antes de continuar, recordar al lector que lo que se dice en $(*)$ no es otra cosa que lo que en Primaria se expresa diciendo

$$Dividendo \;=\; divisor \times cociente \;+\; resto$$

Propiedades relacionadas con la división euclídea

1) Si en una división el dividendo y el divisor se multiplican por un mismo número, el cociente no varía y el resto queda multiplicado por ese número.
2) Si en una división el dividendo y el divisor se dividen (de forma exacta) por un mismo número, el cociente no varía y el resto queda dividido (de forma exacta) por ese número.

EJEMPLO

De

$$8532 = 1060 \cdot 8 + 52$$

se deduce, como se ha dicho más arriba, que 8 es el cociente de dividir 8532 entre 1060 y 52 es el resto. A partir de ahí, y usando la segunda de las propiedades anteriores, podemos afirmar que al dividir 4266 entre 530 se obtiene cociente igual a 8 y resto 26.

EJERCICIOS

Los tres primeros se han visto en http://www.clarionweb.es/5_curso/matematicas/tema504.pdf. El 5 es de los Concursos de Primavera de la Comunidad de Madrid.

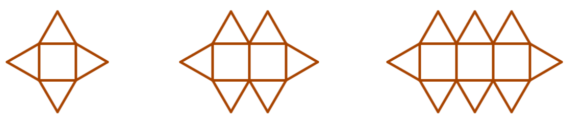
1. El profesor de gimnasia se ha gastado 495 € en una tienda de deportes. Ha comprado 15 raquetas a 23 € cada una y 30 botes de pelotas. ¿Cuánto ha pagado por cada bote?

2. Bruno quiere sustituir su vieja furgoneta. La nueva le cuesta 12.450€ y por la vieja le dan 1.650 €. Si desea pagar la diferencia en 36 plazos iguales, ¿cuánto dinero tiene que pagar en cada plazo?

3. Una granja avícola tiene 475 gallinas, que están distribuidas en 25 gallineros iguales.
   a) ¿Cuántas gallinas hay en cada gallinero?
   b) Si cada gallina pone cinco huevos a la semana, ¿cuántos huevos ponen entre todas en una semana?
   c) ¿Cuántas docenas completas son estos huevos?

4. Modifica las cantidades de los enunciados anteriores pero de manera que las soluciones de los nuevos enunciados sean iguales a las que se han obtenido al resolver los ejercicios 1, 2 y 3 respectivamente.

5. Juanje se ha jubilado y dedica su tiempo a hacer construcciones con palillos siguiendo la pauta que ves en la figura.



Una tarde construyó una inmensa, batiendo su propio récord. Francisco le preguntó: *¿Cuántos palillos has utilizado para batir tu récord?* Juanje, socarrón, le contestó: *Adivínalo tú mismo, es uno de los siguientes números*.

7165   176   3514   2483   10 000

2. Divisor y múltiplo

Imagina una tabla de multiplicar que, en vez de tener diez filas y diez columnas, tuviera infinitas filas e infinitas columnas. ¿Cuántas veces aparecería en los resultados de la tabla el número 360?

*Definición de **divisor** y de **múltiplo**:*

Dados dos números naturales *a* y *b* decimos que ***a* es un divisor de *b*** si existe un número natural *n* que multiplicado por *a* da *b*.

$$n \cdot a = b$$

En este caso, decimos que ***b* es múltiplo de *a***.

Observar que si a≠0, decir que a es divisor de b es equivalente a que la división de a entre b sea una división exacta.

Revisa la tabla anterior. ¿Quiénes son los divisores de 360? ¿cuántos hay? ¿ves algún método rápido de calcularlos?

PARA PENSAR

Trata de dar una justificación a las afirmaciones siguientes:

a) El 0 es múltiplo de cualquier otro número natural, es decir, cualquier número natural es divisor de 0.

b) El 0 tiene un único múltiplo, luego ningún número distinto de 0 es múltiplo de 0.

   Resumiendo, el 0 tiene infinitos divisores (todos los números naturales) y sin embargo tiene un único múltiplo (el propio número).

c) Cualquier número natural es múltiplo del 1, esto es, el 1 es divisor de cualquier número natural.

d) Cualquier número es múltiplo de sí mismo, o lo que es equivalente, cualquier número natural es divisor de si mismo.

   Resumiendo, cualquier numero natural distinto de 0 y de 1, tiene al menos dos divisores: el 1 que es el divisor más pequeño y el propio número que es el más grande. El 1 solamente tiene un divisor, el propio número.

e) Si un número es distinto de 0, entonces tiene un número infinito de múltiplos.

f) Si $m = a \cdot c$, entonces *m* es múltiplo de *a* y de *c*. Esto es, si $m = a \cdot c$, entonces a y c son divisores de m.

3. Terminología y notaciones útiles

Las siguientes expresiones son equivalentes:

a es un divisor de *b*

b es un múltiplo de *a,*

a divide a *b*,

b es divisible por *a*,

a es un factor de *b*.

a es divisor de *b* se denota abreviadamente por $a|b$

b es múltiplo de *a* se denota abreviadamente por $b = \dot{a}$

El primer método que a uno se le ocurre para determinar los divisores de un número *a* es dividir *a* entre *1, 2, 3,…,* *a* y quedarse con aquellos valores para los cuales la división es exacta.

PARA PENSAR

Pon en práctica el método anterior para determinar los divisores de 24.

¿El proceso ha resultado largo? ¿Has realizado 24 divisiones?

El método descrito anteriormente para determinar los divisores de un número *a* es, a simple vista, mejorable. ¿Por qué bastaría dividir *a* entre *1, 2,…, b* siendo *b* el primer entero que produce un cociente menor que él? Teniendo en cuenta eso, ¿podemos afirmar que bastaría dividir hasta llegar al menor número entero mayor que $\sqrt{a}$?

Si dividimos los números naturales por 2 obtenemos una partición en dos subconjuntos:

- **los divisibles por dos: números pares,**
- **los no divisibles por 2: los números impares. Los números impares dan resto 1 al dividirlos por 2,**

Indica cuáles de las siguientes expresiones te parece correcta para denotar un número par y un número impar; añade otras que te parezcan oportunas:

Par: 2n, n/2, 2n + 2, an + 2, n^2, 4n, ...

Impar: 2n -1, 2n + 1, 2n + 3, n^2 + 1, n(n + 1), ...

Si dividimos los números naturales por tres obtenemos tres subconjuntos:

- los números divisibles por 3,
- los que dan resto 1 al ser divididos por 3, y
- los que dan resto 2 al ser divididos por 3.

Elige notaciones para estos tres tipos de números.

De modo análogo podríamos encontrar notaciones para los números que se obtienen al dividir por cuatro, cinco, etc.

Aplicaciones. El cálculo de los divisores de un número es útil en situaciones en las que interesa saber de cuántas formas distintas se puede repartir una cantidad (en partes iguales y sin que sobre nada).

Un problema:

María ha montado una empresa de pinturas. Dispone de grandes bidones de 60 litros a partir de los cuales se rellenan los envases que finalmente salen a la venta. Hoy ha recibido información sobre los precios de los envases vacíos: el precio en céntimos de cada envase se calcula usando la fórmula:

$$80+10k^2$$

donde k es la capacidad, en litros, del envase. Así, por ejemplo, un envase de 1 litro vale 90 céntimos, y un envase de 5 litros vale 330 céntimos.

Cada bidón de 60 litros debe repartirse en envases del mismo tamaño y es importante que no sobre pintura para no desperdiciarla ya que cada bidón se limpia antes de realizar la mezcla siguiente.

¿Cuál es el tamaño de envase que le resulta más rentable?

4. Propiedades de la divisibilidad

En muchas aplicaciones de los aspectos que venimos tratando se emplean algunas de las propiedades que vienen a continuación, de ahí el interés de su conocimiento y manejo.

a) Si un número es divisor de otros dos entonces es divisor de su suma y de su diferencia.

b) Si un número a es divisor de otro m entonces es divisor de cualquiera de los múltiplos de m. Que expresado de otra manera es decir que si *m* es múltiplo de *a*, entonces cualquier múltiplo de *m* es múltiplo de a.

En particular, si un número es divisor de otro entonces es divisor de cualquiera de sus potencias de exponente natural mayor o igual que uno.

c) Si un número es divisor de otro y multiplicamos los dos números por una misma cantidad la relación de divisibilidad se sigue conservando.

EJERCICIO

Escribe cada frase anterior con notación matemática.

PARA PENSAR

Decir si es verdadera o falsa cada una de las afirmaciones siguientes:

1. Si un número divide a la suma de otros dos, entonces divide a cada uno de ellos.
2. Si un número divide al producto de otros dos, entonces al menos divide a uno de ellos.
3. Si dos números dividen a un tercero, entonces su producto también divide a ese tercero.
4. Si un número d es divisor de a, de b y de c, entonces d es divisor de $ka + lb + mc$, donde k, l y m representan números naturales cualesquiera.

El número 12 tiene seis divisores: 1, 2, 3, 4, 6 y 12. Cuatro de ellos son pares y dos son impares.

a) Describe cómo son los números cuyos divisores son todos pares (excepto el 1).

b) Describe cómo son los números que tienen exactamente la mitad de sus divisores pares.

Un número natural se dice que es primo si tiene exactamente dos divisores.

De la definición anterior se desprende que el 0 no es primo (tiene infinitos divisores) y que el 1 tampoco es primo (sólo tiene un divisor).

Un número natural se dice que es compuesto si es distinto de 0 y de 1 y no es primo.

EJERCICIO

1. Escribe los diez primeros números primos.
2. El menor divisor, distinto de 1, de un número, ¿cómo es, primo o compuesto?
3. Si a es un número menor que 29^2, ¿por qué para saber si es a es o no primo basta dividirlo por 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 y 29?

5. Criterios de divisibilidad

En general, para saber si un número es divisible por otro se efectúa la división entera y se comprueba si el resto es cero, pero, en algunos casos, existen reglas -criterios de divisibilidad- que permiten averiguar si un número es divisible por otro sin necesidad de efectuar la división. Vamos a enunciar y justificar algunas de ellas.

a) *Divisibilidad por 2, 5 o 10*

Si descomponemos el número n en decenas y unidades, $n = 10b + a$, se observa que el término $10b$ es siempre divisible por 2, 5 y 10. Por tanto, la divisibilidad de n por esos números depende de la de la cifra de las unidades, a, y, en general, podemos decir que:

Un número es divisible por 2, 5 o 10 si, y sólo si, la cifra de las unidades es divisible por 2, 5 o 10, respectivamente. O de forma equivalente, un número

- *es divisible por 2 si la cifra de las unidades es par (el cero es par),*
- *es divisible por 5 si la cifra de las unidades es 0 o 5 y*
- *es divisible por 10 si la cifra de las unidades es 0.*

b) *Divisibilidad por 4, 20, 25, 50 o 100*

Si descomponemos el número *n,* supuesto de tres o más cifras, en centenas por un lado y decenas y unidades por el otro, $n = 100c + ba$, se observa que el término $100c$ es siempre divisible por 4, 20, 25, 50 y 100. Por tanto, la divisibilidad de *n* respecto a esos números depende de la divisibilidad de *ba* que representa las decenas y unidades de *n.* Podemos decir entonces que:

> *Un número es divisible por 4, 20, 25, 50 o 100 si, y sólo si, el número formado por la cifra de las decenas y la de las unidades es divisible por 4, 20, 25, 50 o 100, respectivamente*.

> Intenta dar un criterio de *divisibilidad por 8, 40, 125, 200, 250, 500 o 1000,* generalizando lo anterior.

> Intenta buscar qué condiciones deben de cumplir las cifras de un número de un número de dos cifras para que sea múltiplo de 4. Análogamente para un número de tres cifras para que sea múltiplo de 8.

c) *Divisibilidad por 3 o 9*

Si descomponemos en todas sus cifras un número *n* de, por ejemplo, 4 cifras, obtenemos:

$$n = 1000d + 100c + 10b + a = 999d + d + 99c + c + 9b + b + a$$
$$= (999d + 99c + 9b) + (d + c + b + a) = 9(111d + 11c + b) + (d + c + b + a).$$

Como el primer paréntesis va multiplicado por 9, ese término será siempre divisible por 3 y por 9 y, por tanto, la divisibilidad de *n* respecto a 3 o 9 depende de la divisibilidad de $d + c + b + a$. Esta demostración es generalizable a números con un número cualquiera de cifras. Por tanto, podremos decir que:

> *Un número es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus cifras es divisible por 3.*
>
> *Un número es divisible por 9 si y sólo si la suma de sus cifras es divisible por 9.*

d) Divisibilidad por 11

Un número es divisible por 11 si sumando, por un lado, las cifras que ocupan lugar par y, por otro, las que ocupan lugar impar, y restando el menor de los números obtenidos al mayor se obtiene un múltiplo de 11.

> Trata de justificar esta afirmación.

Indicaciones:

- Escribe el número $m=a_n \ldots a_n$ en forma polinómica (como potencias de 10):

$$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} \ldots + a_0 10^0$$

- Divide cada uno de estos sumandos por 11. ¿Cuál es el resto de dividir 10^k entre 11, según k sea par o impar?
- Recoloca los sumandos y observa lo que ocurre.

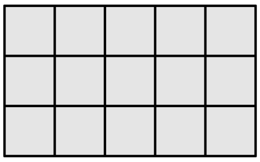
> ¿Qué cifras puedes escribir a la derecha del número 18 para obtener un número de 3 cifras que sea divisible por 2?
>
> ¿y para que sea divisible por 3?
>
> ¿y por 4?
>
> ¿y por 11?
>
> ¿y para que sea múltiplo de 3?

6. Múltiplos comunes y divisores comunes

Consideremos las dos situaciones siguientes.

Situación 1. Tres socios de un gimnasio coinciden en él el día 5 de septiembre. Si uno va cada dos días, otro cada tres y otro cada cuatro, ¿qué otros días coinciden los tres a lo largo del mes?

Situación 2. Se desea azulejar una pared rectangular de 3,6 m. de alto por 4,8 m. de largo. La forma de llevarlo a cabo es siguiendo el esquema de la figura. Los azulejos a emplear (cuadrados) tienen de lado un número entero de cm. ¿Cuál puede ser la medida de ese lado si sólo es posible emplear unidades completas de azulejos (como en la figura)? ¿Cuál debería ser la longitud de dicho lado si queremos emplear el menor número posible de azulejos?



Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

Tras estudiar la primera situación y resolverla se observa que han intervenido múltiplos comunes de 2, 3 y 4 y con un papel especial el menor de ellos. En el caso de la segunda situación han aparecido los divisores comunes a 36 y 48, y en la última parte el mayor de ellos.

Se define *mínimo común múltiplo* de dos números (mcm) como el menor de los múltiplos comunes distintos de 0 de ambos números.

- Un método para determinar el mcm de ambos números es ir escribiendo los múltiplos no nulos de ambos números hasta encontrar el primero que sea común.
- De manera similar se define y se determina el mínimo común múltiplo de tres o más números.
- Cuando un número $a \neq 0$ es múltiplo de otro b, el mínimo común múltiplo de ambos es a.

Se define *máximo común divisor* de dos números (mcd) como el mayor de los divisores comunes de ambos números.

- Un método para determinar el mcd de ambos números es ir escribiendo los divisores de ambos números, quedarse con los comunes y elegir el mayor de ellos (luego veremos otros métodos).
- De manera similar se define y se determina el máximo común divisor de tres o más números.
- Cuando un número a es divisor de otro b, el máximo común divisor de ambos es a.

Dos números no nulos se dicen primos entre sí, relativamente primos o coprimos si el máximo común divisor de ambos es 1.

EJERCICIO

Se tienen tres piezas de tela de igual ancho cuyas longitudes son 180 metros, 45 metros y 60 metros. Se quiere trocear todas las piezas en retales de igual longitud con el menor número de cortes en cada tela. ¿Cuál es esa longitud? ¿Cuál es el número de cortes en total que se da?

PARA PENSAR

- Da ejemplos de números a y b tales que el mcm$\{a,b\} = a \cdot b$ y calcula el mcd$\{a,b\}$.
- Da ejemplos de números a y b tales que el mcm$\{a,b\} \neq a \cdot b$ y calcula el mcd$\{a,b\}$.
- ¿Puedes conjeturar alguna relación entre mcm$\{a,b\}$, mcd$\{a,b\}$, a y b?
- ¿Por qué no se definirá máximo común múltiplo y mínimo común divisor?

7. Algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor de dos números

7.1. DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO

La obtención del máximo común divisor de dos números mediante la determinación de todos los divisores de uno y otro número y la elección del mayor de los comunes se vuelve impracticable en el momento en que los números de partida son relativamente grandes. Por ello se diseñan otros métodos para el cálculo de ese máximo común divisor, como sucede con el algoritmo indicado en el título de la sección. Este método fue propuesto inicialmente por el matemático griego Euclides de Alejandría, que vivió entre los años 325 y 265 a.c., aproximadamente. El algoritmo, junto con otros teoremas importantes de la teoría de números, aparece en su famoso tratado *Los Elementos*.

Antes de seguir hemos de establecer la siguiente propiedad, en la que se basa dicho algoritmo.

> Los divisores comunes de dos números a y $b \neq 0$ coinciden con los divisores comunes de b y de r siendo r el resto de dividir a entre b. Deduciéndose por tanto que mcd$\{a,b\}$ = mcd$\{b,r\}$.

A continuación vamos a mostrar el proceso para el caso de querer determinar el máximo común divisor de 264 y 156.

Paso 1. Dividimos 264 entre 156:

$$264 = 156 \cdot 1 + 108 \quad \text{(cociente 1 y resto 108)}$$

Como el resto anterior no es 0, 156 no es divisor de 264.

Paso 2. Dividimos 156 entre 108:

$$156 = 108 \cdot 1 + 48 \quad \text{(cociente 1 y resto 48)}$$

Como el resto anterior no es 0, 108 no es divisor de 156.

Paso 3. Dividimos 108 entre 48:

$$108 = 48 \cdot 2 + 12 \quad \text{(cociente 2 y resto 12)}$$

Como el resto anterior no es 0, 48 no es divisor de 108.

Paso 4. Dividimos 48 entre 12

$$48 = 12 \cdot 4 \quad \text{(cociente 4 resto 0)}$$

Como el resto anterior es 0, 12 es divisor de 48.

Al llegar a este punto podemos decir que el mcd{48,12}=12.

Apoyándonos en la propiedad del comienzo del párrafo, podemos decir que

$$\text{mcd}\{264,156\} = \text{mcd}\{156,108\} = \text{mcd}\{108,48\} = \text{mcd}\{48,12\} = \text{mcd}\{12, 0\} = 12$$

Es decir, el mcd{264,156} coincide con el último resto no nulo del proceso anterior.

La tabla siguiente recoge todo el proceso anterior. Cada número de la primera fila es el cociente de dividir entre el número que está debajo de él, el número que está a la izquierda de ese. Cada número de la tercera fila es el resto de dividir el número que está por encima de él entre el número que está a la derecha de ese.

	1	1	2	4
264	**156**	108	48	12
108	48	**12**	0	

El procedimiento efectuado es generalizable a cualquier otro par de números.

Aplica el algoritmo de Euclides para calcular mcd{265,56}.

7.2. ALGUNAS PROPIEDADES QUE SE DEDUCEN DEL ALGORITMO ANTERIOR

Las propiedades que vamos a enunciar a continuación son de gran aplicabilidad, y se deducen de manera casi inmediata de lo visto en el algoritmo de Euclides y de alguno de los resultados vistos en relación a la división euclídea de dos números.

1) Si por D(a,b) denotamos el conjunto de divisores comunes a a y a b, y por D(mcd$\{a,b\}$) el conjunto de divisores del mcd$\{a,b\}$, se tiene

$$\mathrm{D}(a,b) = \mathrm{D}(\mathrm{mcd}\{a,b\})$$

2) $\mathrm{mcd}\{ta,tb\} = t\cdot \mathrm{mcd}\{a,b\}$

3) $\mathrm{mcd}\{a{:}\,d, b{:}\,d\} = \mathrm{mcd}\{a,b\} : d$, donde d representa un divisor común a a y a b.

Notar que una forma equivalente de expresar la propiedad anterior es

$$\mathrm{mcd}\{a,b\} = d\cdot \mathrm{mcd}\{a{:}\,d, b{:}\,d\}$$

Aplica las propiedades anteriores y el algoritmo de Euclides para calcular mcd{2650,280}.

En alguna sección precedente se ha definido lo que se conoce como números primos entre sí, también llamados coprimos. Recordemos, son aquellos cuyo máximo común divisor es 1. Pues bien, de 3) podemos deducir la siguiente propiedad

4) Si dos números se dividen por su máximo común divisor, los números obtenidos son primos entre sí.

$$\boxed{\mathrm{mcd}\left(\frac{a}{\mathrm{mcd}(a,b)},\frac{b}{\mathrm{mcd}(a,b)}\right)=1}$$

Observar que cada resto que aparece en el algoritmo de Euclides se puede expresar en función de los números iniciales, y en consecuencia, el máximo común divisor de ambos, que es el último resto no nulo aparecido en dicho algoritmo también:

5) El máximo común divisor de dos números siempre se puede expresar en función de dichos números.

Vamos a ilustrar esta propiedad, considerando de nuevo el ejemplo mostrado en el apartado 7.1.

Teniendo en cuenta el *Paso 1*:

$$108 = 264 - 1\cdot 156$$

Teniendo en cuenta el *Paso 2* y la relación anterior:

$$48 = 156 - 1\cdot 108 = 156 - 1\cdot(264 - 1\cdot 156) =$$
$$= 2\cdot 156 - 264$$

Teniendo en cuenta el *Paso 3* y las relaciones anteriores:

$$12 = 108 - 2\cdot 48 = (264 - 1\cdot 156) - 2\cdot(2\cdot 156 - 264) =$$
$$= 3\cdot 264 - 5\cdot 156$$

Por tanto

$$12 = \mathbf{mcd\{264,\ 156\} = 3\cdot 264 - 5\cdot 156}$$

El resultado enunciado en 5) nos permite garantizar la siguiente propiedad.

6) Si en número divide a un producto y es primo con uno de los factores, entonces divide al otro factor.

Usando la simbología propia del tema:

Si $a|bc$ y mcd$\{a,\ b\}= 1$, entonces $a|c$

La proposición anterior fue estudiada y demostrada por Euclides (ca. 325 - ca. 265 a.C.) y se conoce como teorema de Euclides.

Observación: Todas las condiciones del teorema son importantes. Por ejemplo:

$4 \mid 14 \times 22$ ya que $308 = 14 \times 22 = 4 \times 77$, pero 4 no es divisor de 14 ni de 22.

8. Relación entre dos números, su mcd y su mcm

A estas alturas el lector debe conocer ya a la perfección el concepto de máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números. Además debe saber determinar sin dificultad el máximo común divisor de dos números mediante el algoritmo de Euclides. Pues bien, las propiedades que se recogen en este apartado tienen como objetivo principal proveer de un primer método para el cálculo del mínimo común múltiplo de dos números.

1) Si por M(a, b) denotamos el conjunto de múltiplos comunes a a y a b, y por M(mcm$\{a, b\}$) el conjunto de múltiplos del mcm$\{a, b\}$, se tiene

$$\mathrm{M}(a, b) = \mathrm{M}(\mathrm{mcm}\{a, b\})$$

No vamos a dar aquí prueba alguna del resultado anterior, aunque podemos decir que dicha prueba se basaría, en parte, en la propiedad 6) del apartado 7.2. Y precisamente a lo largo de ese desarrollo aparecería la relación que se recoge a continuación

2) mcd$\{a, b\}\cdot$mcm$\{a, b\} = a\cdot b$

Sobre este resultado se volverá más adelante, cuando se hable de la descomposición en factores primos. Se hará una comprobación del mismo sobre algún ejemplo.

Más arriba has determinado el mcd{2650,280}. Usa lo obtenido y el resultado anterior para calcular el mcm{2650,280}.

3) Supongamos que a y b son números primos entre sí. En ese caso, un número m es divisible por el producto ab si y sólo si es divisible por a y por b.

Notar que ser múltiplo de 6 y de 4 no es equivalente a serlo de 6·4:

- Si un número es múltiplo de 6·4, es múltiplo de 6 y de 4.
- Sin embargo, si un número es múltiplo de 6 y de 4, no es necesariamente múltiplo de 24. Por ejemplo el 12.

9. Descomposición de un número en factores primos y aplicaciones

9.1. DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN FACTORES PRIMOS

La Algunos números se pueden descomponer como producto de otros de muchas formas:

12 = $2 \times 6 = 3 \times 4 = 2 \times 2 \times 3$

45 = $3 \times 15 = 5 \times 9 = 3 \times 3 \times 5$

60 = $2 \times 30 = 3 \times 20 = 4 \times 15 = 5 \times 12 = 6 \times 10 = 2 \times 2 \times 15 = 2 \times 3 \times 10 = 2 \times 5 \times 6 =$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 3 \times 4 \times 5$

Pero

- para cada número distinto de 0 y de 1 hay una sola descomposición en factores primos (sin tener en cuenta el orden).

Por ejemplo, para el 45:

Ejemplos: **1)**

345	3
115	5
23	23
1	

Así, la descomposición en factores primos de 145 es $3 \times 5 \times 23$. Se escribirá:

$$145 = 3 \times 5 \times 23$$

En el caso del 60 es $2 \times 2 \times 3 \times 5$, y se escribirá $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ y en el de 12 es $2 \times 2 \times 3$, que se expresará $12 = 2^2 \times 3$.

2) En algunos casos concretos, la factorización en factores primos resulta más cómoda si se tiene en cuenta alguna descomposición del número en factores, en principio no necesariamente primos, y a partir de ellos obtener la descomposición en primos. Ver los siguientes ejemplos:

$$2000 = 2 \cdot 10^3 = 2 \cdot (2 \cdot 5)^3 = 2 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^4 \cdot 5^3$$
$$45 = 5 \cdot 9 = 5 \cdot 3^2$$
$$120 = 12 \cdot 10 = 3 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

El hecho de que la descomposición de un número en factores primos sea única permite establecer algunas condiciones sobre sus divisores y sus múltiplos.

9.2. EXPRESIÓN DE LOS DIVISORES Y DE LOS MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO DESCOMPUESTO EN FACTORES PRIMOS

La descomposición en factores primos del número 3600, por ejemplo, es

$$3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$$

Si por *d* representamos un divisor de 3600, se tendrá

$$3600 = \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{c} = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$$

Al descomponer *d* y *c* en factores primos obtendremos (quizás en otro orden) $2^4 \times 3^2 \times 5^2$, por tanto la descomposición de *d* en factores primos será de la forma

$$\boldsymbol{d} = 2^k \times 3^l \times 5^m$$

donde *k* puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4; *l* puede ser 0, 1, 2; y *m* puede ser 0, 1, 2.

Cuando *m* es un múltiplo de *a*, *a* es divisor de m y un argumento similar al anterior permite decir que la descomposición de m en factores primos será de la forma

$$m = 2^r \times 3^s \times 5^t \times p_1 \times \cdots \times p_u$$

Donde $p_1, \ldots, p_u$ son primos distintos de 2, 3 y 5, *r* un número entero mayor o igual que 4, y *s* y *t* enteros mayores o iguales que 2.

En general,

- En la descomposición en factores primos de un divisor de un número aparecen a lo sumo los mismos factores primos de dicho número con menor o igual exponente.

- En la descomposición en factores primos de un múltiplo de un número aparecen al menos los factores primos de dicho número con igual o mayor exponente.

Una consecuencia de la primera afirmación de las anteriores es la que establece el número de divisores de un número, que aparece recogida en el siguiente apartado.

9.3. NÚMERO DE DIVISORES DE UN NÚMERO

Una vez más consideraremos como punto de arranque la factorización del número 3600:

$$3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$$

Tal descomposición puede ser utilizada para determinar la cantidad de divisores de dicho número (contando el 1 y el mismo 3600). A continuación se muestra cómo.

Se sabe que cada divisor *d* de 3600 es de la forma

$$d = 2^k \times 3^l \times 5^m$$

donde *k* puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4; *l* puede ser 0, 1, 2; y *m* puede ser 0, 1, 2.

Es claro que la cantidad de divisores coincide con el número de formas de combinar los valores de los distintos exponentes, esto es, con el número de ternas diferentes (*k, l, m*) que se pueden formar.

En la siguiente tabla se puede ver el número de ternas que es posible formar cuando *k* = 0. Obviamente, podrá formarse el mismo número cuando *k* = 1,…, *k* = 4.

k	*l*	*m*	*Nº de ternas*	*Divisor*
0	0	0 1 2	3	1 5 $5^2 = 25$
			+	
	1	0 1 2	3	3 $3 \cdot 5 = 15$ $3 \cdot 5^2 = 75$
			+	
	2	0 1 2	3	$3^2 = 9$ $3^2 \cdot 5 = 45$ $3^2 \cdot 5^2 = 225$
Para un valor de *k*	hay tres valores para *l*	y para cada valor de *l*, hay tres valores para *m*	En total hay 3 x 3 ternas que comienzan en 0	

Como para cada posible valor de *k* hay 3 x 3 posibilidades y *k* puede tomar cinco valores diferentes, se tiene que el número total de ternas, y en consecuencia, el número de divisores de 3600, es 5 x 3 x 3, que corresponde a

5 x 3 x 3 = nº de posibles valores de *k* x nº de posibles valores de *l* x nº posibles valores de *m*
= (4 +1)·(2+1)·(2+1)
= (exponente del factor 2 + 1) · (exponente del factor 3 + 1) · (exponente del factor 5 + 1)

En general,

- Si la descomposición de un número a en factores primos es

$$a = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r}$$

el número total de divisores de *a* es

$$(e_1+1) \cdot (e_2+1) \cdot \cdots \cdot (e_r+1)$$

¿Cuántos divisores distintos tiene el número 77320089? ¿4, 10, 120 o 144?

9.4. CÁLCULO DEL MCD Y MCM DE DOS NÚMEROS USANDO LA DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

Los resultados obtenidos en la sección anterior arrojan un método para el cálculo del mcd y mcm, de dos o más números, conocidas las descomposiciones en factores de dichos números.

Supongamos que queremos determinar D = mcd{3600, 525} y M = mcm{3600, 525} sabiendo que:

$$3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$$
$$525 = 3 \times 5^2 \times 7$$

Como D es divisor de 3600 y de 525, aplicando el apartado anterior tendremos que la descomposición en factores primos de D será, por un lado y por otro, de la forma

$$D = 2^k \times 3^l \times 5^m$$
$$D = 3^r \times 5^s \times 7^t$$

con $0 \le k \le 4$, $0 \le l \le 2$, $0 \le m \le 2$, $0 \le r \le 1$, $0 \le s \le 2$, $0 \le t \le 1$,

Pero como la factorización en primos es única, se deduce que en D sólo pueden aparecer los primos comunes a ambas expresiones:

$$D = 3^u \times 5^v$$

con $0 \le u \le 1$ y $0 \le v \le 2$.

La condición de que D sea el mayor divisor común impone $u = 1$ y $v = 2$. Por tanto

$$D = 3 \times 5^2$$

En general,

- para calcular el mcd de dos números cuando se conoce la factorización en primos de los mismos, basta multiplicar los factores primos comunes elevados a sus menores exponentes.

Un tratamiento de características similares al realizado para D, puede efectuarse para M y concluir que

$$M = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$$

En general,

- para calcular el mcm de dos números cuando se conoce la factorización en primos de los mismos, basta multiplicar los factores primos comunes y no comunes elevados a sus mayores exponentes.

9.5. RELACIÓN ENTRE DOS NÚMEROS, SU MCD Y SU MCM; USANDO LA DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

Volvemos ahora a uno de los resultados vistos en el apartado 8, pero haciendo uso de la descomposición en factores primos de los números.

Consideremos de nuevo las factorizaciones de los números 3600, 525, D = mcd{3600, 525} y M = mcm{3600, 525}:

$$3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$$
$$525 = 3 \times 5^2 \times 7$$
$$D = 3 \times 5^2$$
$$M = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$$

Usando tales expresiones es fácil observar que 3600 · 525 = M · D.

Esta relación no es casual. Notar que D y M se pueden escribir como:

$$D = 2^{\text{menor}\{4,0\}} \times 3^{\text{menor}\{2,1\}} \times 5^{\text{menor}\{2,2\}} \times 7^{\text{menor}\{1,0\}}$$
$$M = 2^{\text{mayor}\{4,0\}} \times 3^{\text{mayor}\{2,1\}} \times 5^{\text{mayor}\{2,2\}} \times 7^{\text{mayor}\{1,0\}}$$

Por tanto:

$$D \cdot M = 2^{0+4} \times 3^{1+2} \times 5^{2'+2} \times 7^{0+1}$$

que coincide con:

$$3600 \cdot 525 = \boxed{2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^0} \times \boxed{2^0 \times 3 \times 5^2 \times 7}$$

Apoyándonos en técnicas similares, puede afirmarse, en general, que

Dados dos números no nulos *a* y *b*, se tiene la relación siguiente:

$$\text{mcd}\{a,b\} \cdot \text{mcm}\{a,b\} = a \cdot b$$

10. Resolución de algunos ejercicios tipo

Los problemas que involucran aspectos de la teoría de la divisibilidad pueden presentar enunciados muy diversos por eso resulta imposible elegir tres o cuatro que den una visión general de todos los posibles enunciados. Por esa razón los problemas que aquí se presentan resueltos deben ser tomados sólo como ejemplos representativos.

12.1. Halla el menor número de cuatro cifras que dividido por 4, 7 y 11 da de resto 3.

Solución

Llamemos, por ejemplo, m a cualquier número que dividido por $4, 7$ y 11 da de resto 3. Esto quiere decir que

$$\begin{aligned} m &= 4c + 3 \\ m &= 7c' + 3 \\ m &= 11c'' + 3 \end{aligned}$$

donde c, c' y c'' representan los respectivos cocientes de dividir m entre $4, 7$ y 11. En ese caso, podemos deducir que $m - 3$ es múltiplo de 4, múltiplo de 7 y múltiplo de 11, esto es, $m - 3$ es múltiplo del mínimo común múltiplo de $4, 7$ y 11. Puesto que $mcm\{4,7,11\} = 4 \cdot 7 \cdot 11 = 308$, se tiene que

$$m - 3 = 308 \cdot k$$

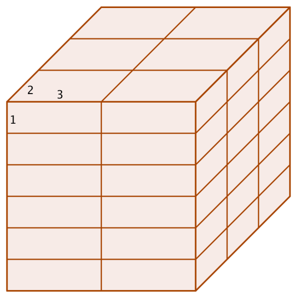
Por tanto, el número pedido es el menor número de cuatro cifras de la forma $308 \cdot k + 3$.
Con esta condición, el valor que toma k es el menor para el cual $308 \cdot k + 3 \geq 1000$.
Como

$$308 \cdot k + 3 \geq 1000 \Rightarrow k \geq 4,$$

el número pedido es $308 \cdot 4 + 3 = 1235$.

12.2. Se tienen ladrillos de medidas 12 x 10 x 15 cm. Se quiere construir un cubo apilando un número entero de ladrillos, todos en la misma posición. Hallar la medida de la arista del menor cubo que se puede construir si su volumen debe ser mayor que 3 m^3. ¿Cuántos ladrillos se necesitan para hacer dicho cubo?

Solución

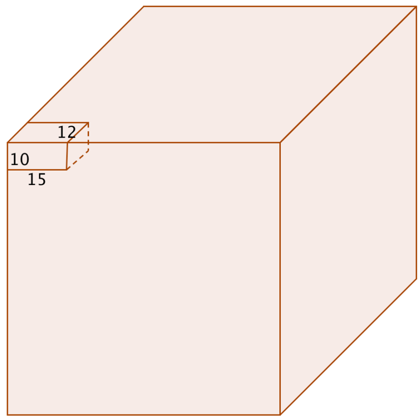


La figura muestra un cubo construido apilando un número entero de ladrillos de dimensiones 1 x 2 x 3 colocados todos en la misma posición. El cubo pedido en nuestro enunciado ha de tener características similares de construcción pero teniendo en cuenta que las medidas de los ladrillos son 12 x 10 x 15 cm y que debe ser el de menor arista cuyo volumen supere los 3 m^3.

Para poder construir un cubo de las características pedidas debe verificarse que la arista a del cubo sea múltiplo de 12, múltiplo de 10 y múltiplo de 15. Por tanto la arista a será múltiplo del $mcm\{12, 10, 15\} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. Esto es, $a = 60 \cdot k$ de manera que

$$(60 \cdot k)^3 \geq 3 \cdot 100^3 \qquad (*)$$

La última desigualdad está justificada por el hecho de que el cubo de arista $a\ cm$ tiene volumen $a^3\ cm^3$ y debe ser superior a $3\ m^3 = 3 \cdot 100^3 cm^3$.



La expresión $(*)$ se puede escribir como

$$6^3 10^3 k^3 \geq 3 \cdot 10^6 \qquad (**)$$

Factorizando 6 y 10 en la expresión anterior y simplificando se obtiene

$$3^2 k^3 \geq 5^3$$

Dividiendo 5^3 entre 3^2: $125 = 9 \cdot 13 + 8$, se obtiene cociente 13 y resto 8, por tanto

$$k^3 \geq 14$$

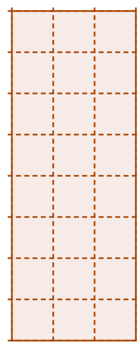
es decir $k \geq 3$.

Por tanto cualquier cubo de arista $a = 60 \cdot k$ con $k \geq 3$ puede ser construido con un número entero de ladrillos de dimensiones 12 x 10 x 15 cm colocados todos en la misma posición. Pero como se pide el cubo de menor arista con esa condición, el cubo ha de tener arista $60 \cdot 3 = 180\ cm$.

12.3. Un ebanista quiere cortar en cuadrados una plancha de madera de 256 cm de largo y 96 cm de ancho.

a) ¿Cuál puede ser la longitud del lado de cada cuadrado (suponiendo que dicho lado mide un número entero de centímetros)?

b) ¿Cuántos cuadrados se obtienen de la plancha de madera en cada caso?

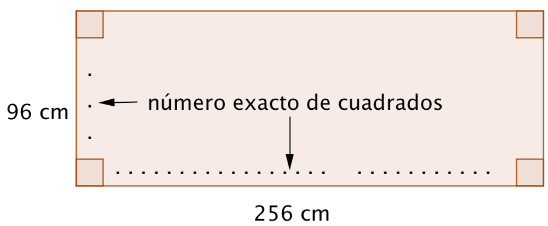


Solución

La figura derecha representa el caso en el que los cuadrados tienen $32\ cm$ de lado $(32 \times 8 = 256,\ 32 \times 3 = 96)$ pero ¿cómo podemos llegar a que esa es una de las posibilidades? y ¿cuáles son el resto de las posibles divisiones de la plancha?

a) Considerando que la plancha de manera ha de cortarse en cuadrados de manera que la longitud del lado del cuadrado "quepa" un número exacto de veces tanto a lo largo como a lo ancho, esa longitud ha de ser un divisor de 256 y un divisor de 96. Es decir, que el lado del cuadrado es cualquier divisor común de 256 y 96.

Puesto que el $mcd\{256{,}96\} = 32$, los divisores comunes de 256 y 96 son los divisores de $32 = 2^5$. Por tanto el lado del cuadrado puede ser $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$ y $32 = 2^5$.



b) Cuando el lado del cuadrado es 1, el número de cuadrados es $256 \times 96 = 24.576$.

Cuando el lado del cuadrado es 2, el número de cuadrados es $(256{:}\,2) \times (96{:}\,2) = 6.144$.

Cuando el lado del cuadrado es 4, el número de cuadrados es $(256{:}\,4) \times (96{:}\,4) = 1.536$.

Cuando el lado del cuadrado es 8, el número de cuadrados es $(256{:}\,8) \times (96{:}\,8) = 384$.

Los últimos dos casos se dejan para el lector.

12.4. Halla todas las combinaciones posibles de las cifras a, b, tales que el número capicúa

$$a\,9\,3\,9\,6\,b\,2\,3\,4\,a\,4\,3\,2\,b\,6\,9\,3\,9\,a$$

sea múltiplo de 36.

Solución

Para que el número dado sea múltiplo de $36 = 4 \cdot 9$, es necesario y suficiente que sea múltiplo de 4 y sea múltiplo de 9.
Aplicamos los criterios de divisibilidad correspondientes a 4 y 9.

- Un número es divisible por 4 si el número formado por la cifra de las decenas y la de las unidades del número dado (es decir, el número formado por las dos últimas cifras) es divisible por 4.
Por tanto, el número dado será divisible por 4 si lo es el número $9a$. Los valores posibles de a que satisfacen esa condición son $a = 2$ y $a = 6$.

- Un número es divisible por 9 si la suma de las cifras del número dado es múltiplo de 9.
Por tanto, el número dado será divisible por 9 si lo es el número

$$a + [9 + 3 + 9 + 6] + b + [2 + 3 + 4] + a + [4 + 3 + 2] + b + [6 + 9 + 3 + 9] + a$$

En la expresión anterior, las cantidades entre corchetes son múltiplos de 9, por tanto toda la expresión será múltiplo de 9 si lo es $3a + 2b$.

- Para el caso en que $a = 2$, el número $3a + 2b = 6 + 2b$ ha de ser múltiplo de 9.
  Puesto que $6 + 2 \cdot 0 \leq 6 + 2b \leq 6 + 2 \cdot 9$, los posibles valores que puede tomar $6 + 2b$ son
  $$6 + 2b = 9$$
  $$6 + 2b = 18$$
  Para la primera igualdad no existe valor posible para b y en la segunda es b=6.
  Una solución por tanto es
  $$2\,9\,3\,9\,6\,6\,2\,3\,4\,2\,4\,3\,2\,6\,6\,9\,3\,9\,2$$

- Para el caso en que $a = 6$, el número $3a + 2b = 18 + 2b$ ha de ser múltiplo de 9. Y para ello basta que lo sea $2b$. Por tanto los posibles valores son $b = 0$ y $b = 9$.
  El resto de las posibles soluciones es
  $$6\,9\,3\,9\,6\,0\,2\,3\,4\,6\,4\,3\,2\,0\,6\,9\,3\,9\,6$$
  $$6\,9\,3\,9\,6\,9\,2\,3\,4\,6\,4\,3\,2\,9\,6\,9\,3\,9\,6$$