MATEMÁTICA DISCRETA

Primera parte - Combinatoria

Grado en Matemáticas

2020 - 2021

1. BLOQUE I: COMBINATORIA

1.1. Tema 1. Técnicas de conteo. Introducción a la combinatoria, factoriales, binomiales y multinomiales. Teorema del binomio.

Técnicas de conteo

Averiguar cuántos objetos existen que se ajustan a determinadas características puede no ser fácil. Con frecuencia, la única alternativa es indirecta y consiste en comparar la colección dada con otra colección de objetos (cuyo número se conoce) y comprobar, si fuera el caso, que tienen el mismo número de objetos. Se tienen diferentes definiciones para el concepto de contar:

i.) Numerar o computar las cosas considerándolas como unidades homogéneas. (RAE)

ii.) Hacer, formar cuentas según reglas de aritmética. (RAE)

iii.) Calcular el número de unidades que hay de una cosa. (WordReference)

iv.) Es un proceso de abstracción que nos lleva a otorgar un número cardinal como representativo de un conjunto. (Wikipedia)

v.) Determinar una función biyectiva entre un conjunto y un subconjunto de $\mathbb{N}$ (si se supone que el conjunto es finito o de cardinal $\aleph_0$).

En este curso, solo se estudiarán conjuntos finitos.

Definición 1.1 *Se dice que un conjunto A tiene cardinal r si existe una función biyectiva del conjunto $\mathbb{N}_r = \{1, 2, \ldots, r\}$ en el conjunto A. Por convenio, el conjunto vacio tendrá cardinal cero.*

El cardinal de A se denota de cualquiera de estas tres formas $|A| = \#A = Card(A)$.

De la definición anterior se pueden deducir fácilmente relaciones entre los cardinales de dos conjuntos dependiendo del tipo de aplicación existente.

Teorema 1.2 *Si existe una aplicación inyectiva entre $\mathbb{N}_r$ y $\mathbb{N}_s$ entonces $r \leq s$.*

Teorema 1.3 *Si existe una aplicación sobreyectiva entre $\mathbb{N}_r$ y $\mathbb{N}_s$ entonces $r \geq s$.*

Consecuentemente

Corolario 1.4 (Principio de igualdad) *Si A y B son dos conjuntos y existe una aplicación biyectiva de A sobre B entonces $|A| = |B|$.*

Cuando se desea determinar el cardinal de un conjunto finito X, no siempre es posible dar de manera fácil una correspondencia entre los elementos del conjunto y $\mathbb{N}_r$ (con r el cardinal de X). Sin embargo existen diversas técnicas, que son ciertamente elementales, que ayudan a tal propósito.

A continuación se detallan algunas de ellas.

Teorema 1.5 (Adición) *Sean A y B dos conjuntos finitos y* **disjuntos***, entonces $A \cup B$ es un conjunto finito de cardinal*

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Teorema 1.6 (Producto) *Sean A y B dos conjuntos finitos, entonces $A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A, b \in B\}$ es un conjunto finito de cardinal*

$$|A \times B| = |A||B|.$$

Teorema 1.7 (Complementario) *Sea A un subconjunto de un conjunto finito X. Entonces A y $X - A$ son conjuntos finitos y su cardinal cumple que*

$$|A| = |X| - |X - A|.$$

Teorema 1.8 (Doble conteo) *Sean A, B dos conjuntos finitos. Sea S un subconjunto de $A \times B$. Para cada $a \in A, b \in B$ se definen $T_a = \{b,\ (a, b) \in S\}$, $U_b = \{a,\ (a, b) \in S\}$. Entonces:*

$$|S| = \sum_{a \in A} |T_a| = \sum_{b \in B} |U_b|.$$

Generalizando el resultado anterior se tiene

Teorema 1.9 (Multiconteo) *Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre dos conjuntos finitos, entonces*

$$|X| = \sum_{y \in Y} |\{f^{-1}(y)\}|.$$

Teorema 1.10 (Principio de inclusión/exclusión) *Sean $A_1, A_2, \ldots A_n$ subconjuntos finitos de un conjunto X. Entonces $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ es un conjunto finito y*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \alpha_j \, ,$$

donde α_j es la suma de los cardinales de todas las posibles intersecciones de j conjuntos distintos, es decir

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|, \\
&\alpha_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n|, \\
&\alpha_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|, \\
&\vdots \\
&\alpha_n = |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.
\end{aligned}$$

El siguiente resultado no es propiamente una técnica de conteo. No obstante, como aplicación de él puede deducirse que un conjunto dado tiene al menos un elemento o al menos un número concreto de elementos.

Teorema 1.11 (Principio del palomar, de Dirichlet) *Sean dos conjuntos X, Y tal que $|X| > |Y|$ y una aplicación $f : X \to Y$. Entonces:*

i.) Existen dos elementos de X, x_1, x_2 distintos tales que $f(x_1) = f(x_2)$.

ii.) Si además $|X| > r|Y|$ para un cierto $r \geq 1$, hay al menos $r+1$ elementos $x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}$ tales que $f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_{r+1})$.

Ejemplo 1.12 *En un conjunto cualquiera de 20 números naturales hay siempre dos números cuya diferencia es múltiplo de 19.*

Usando el principio del palomar tomando $X = \{$el conjunto de números$\}$, $Y = \{$restos módulo 19$\}$ y $f(x) = x \bmod 19$, existen dos elementos $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$, es decir $x_1 \equiv x_2 \bmod 19$ de lo que se deduce el resultado.

Introducción a la combinatoria, factoriales, binomiales y multinomiales.

Un problema frecuente de la Combinatoria consiste en evaluar el número de listas (subconjuntos) de cierta longitud, por ejemplo k, en cuyas posiciones se pueden usar símbolos de un cierto conjunto (o ciertos conjuntos) tales que se cumplan ciertas restricciones. Las principales restricciones que se presentan suelen tener en cuenta la repetición, el orden de los símbolos y el número de símbolos.

Teniendo en cuenta las nociones anteriores se pueden definir los diferentes números que se usan en Combinatoria.

Definición 1.13 *Dados dos números naturales r y n se llama variaciones de un conjunto de n elementos tomados de r en r al número de listas ordenadas de r elementos distintos pertenecientes a un conjunto de cardinal n.*

$$V_r^n = n(n-1)\cdots(n-r+1).$$

Si el tamaño de la lista coincide con el número de elementos del conjunto se hablará de permutaciones.

Definición 1.14 *Dados dos números naturales r y n se llama permutaciones de un conjunto de n elementos al número de listas ordenadas de todos los elementos de un conjunto de cardinal n.*

$$P_n = n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$$

A este número se le denomina factorial de n.

Cualquiera de los anteriores pueden generalizarse si los elementos se pueden repetir.

Definición 1.15 *Dados dos números naturales r y n se llama variaciones con repetición de un conjunto de n elementos tomados de r en r, al número de listas ordenadas de r elementos con elementos de un conjunto de cardinal n:*

$$VR_r^n = n^r.$$

Definición 1.16 *Dados números naturales $r_1, r_2, \ldots, r_k$ y n se llama permutaciones de n elementos repetidos $r_1, r_2 \ldots, r_k$ veces (con $r_1+r_2+\ldots+r_k = n$) al número de listas ordenadas de n elementos con elementos de un conjunto de cardinal n, tales que existen r_i iguales entre si para cada i:*

$$PR^n_{r_1,r_2,\ldots,r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!}\,.$$

Finalmente si el orden de los elementos no es importante se hablará de combinaciones.

Definición 1.17 *Sea $r \leq n$, se llama combinaciones de n elementos tomados de r en r, al número de listas no ordenadas (subconjuntos diferentes) de r elementos distintos con elementos de un conjunto de cardinal n:*

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}\,.$$

Definición 1.18 *Sea $r \leq n$, se llama combinaciones con repetición de n elementos tomados de r en r al número de listas no ordenadas de r elementos con elementos de un conjunto de cardinal n tal que los elementos pueden repetirse:*

$$CR_r^n = \binom{n+r-1}{r}.$$

La siguiente tabla muestra las diferencias entre ellos.

	Selección	Orden	Repetición
P_n		X	
$PR^n_{r_1,r_2,\ldots,r_k}$		X	X
V_r^n	X	X	
VR_r^n	X	X	X
C_r^n	X		
CR_r^n	X		X

A los números $\binom{n}{r}$ y $\dfrac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$ se los denomina números binomiales y multinomiales, respectivamente. Estos últimos se representan por $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k}$.

El número de aplicaciones entre dos conjuntos finitos depende de estos números combinatorios.

Teorema 1.19 *Sean $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $Y = \{1, 2, \ldots, k\}$ dos conjuntos finitos.*

- *El número de aplicaciones $f : X \to Y$ es $VR_k^n = k^n$.*
- *Si $k > n$, el número de aplicaciones inyectivas $f : X \to Y$ es $V_k^n = \frac{k!}{(k-n)!}$. Si $k < n$ es 0.*
- *Si $k < n$, el número de aplicaciones sobreyectivas $f : X \to Y$ es $\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j \binom{k}{j}(k-j)^n$. Si $k > n$ es 0.*
- *El número de aplicaciones biyectivas (solo si $n = k$) $f : X \to Y$ es $P_n = n!$.*

Teorema del binomio

El cálculo de los números binomiales puede realizarse también de forma recursiva a partir del siguiente resultado.

Teorema 1.20 *Sean n, r enteros positivos con $1 \leq r \leq n$, entonces*

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}.$$

Si se conocen los números $\binom{n-1}{r}$ para cada $0 \leq r \leq n-1$ se pueden calcular los números $\binom{n}{r}$. Este hecho se suele representar por el conocido triángulo de Pascal (figura 1).

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Figura 1: Triángulo de Pascal

Los números binomiales, como se puede ver en el triángulo de Pascal, son en cierta forma simétricos, es decir $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$. Otra de las relaciones que se pueden escribir entre números binomiales es la siguiente:

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n-1}{r} + \binom{n-2}{r} + \ldots + \binom{r}{r}.$$

Los números binomiales $\binom{n}{r}$ tienen una interpretación geométrica; corresponden al número de caminos monótonos desde $(0,0)$ hasta $(r, n-r)$ en el retículo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. De esta forma se puede demostrar fácilmente una de las relaciones que satisfacen los números binomiales:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

Los números binomiales aparecen también en el desarrollo algebraico de $(a+b)^n$.

Teorema 1.21 (Teorema del binomio) *Sea n un entero positivo. El coeficiente del término $a^{n-r}b^r$ en el desarrollo de $(a+b)^n$ es precisamente el número binomial $\binom{n}{r}$. Es decir:*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Consecuentemente se tienen diversas fórmulas involucrando números binomiales.

i) $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} = 0$.

ii) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$.

iii) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

Las fórmulas trigonómetricas que determinan $cos(n\alpha)$ a partir de $cos\,\alpha$, $sin\,\alpha$ son también consecuencia directa del teorema del binomio pues

$$cos(n\alpha) = Re((cos\,\alpha + \boldsymbol{i}\,sin\,\alpha)^n).$$

Los números multinomiales $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k}$ son una generalización de los números binomiales. Si $k = 2$ cualquier número multinomial es igual a un número binomial, de hecho

$$\binom{n}{r_1, r_2} = \binom{n}{r_1}.$$

De hecho, se pueden calcular a partir de los números binomiales.

Teorema 1.22 *Sean $r_1, r_2, \ldots r_k$ números no negativos tales que $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$. Entonces:*

$$\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k} = \binom{n}{r_1}\binom{n - r_1}{r_2}\cdots\binom{n - r_1 - r_2 - \cdots - r_i}{r_{i+1}}$$
$$\cdots\binom{n - r_1 - r_2 - \cdots - r_{k-1}}{r_k}.$$

Existe también una generalización del teorema del binomio involucrando números multinomiales.

Teorema 1.23 *Para cualquier par n, k de números enteros positivos se tiene que*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum \binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}$$

1.2. Tema 2. Descomposiciones de un número. Particiones de conjuntos. Particiones de un entero positivo.

Descomposiciones de un número.

Los números binomiales también responden al problema de determinar el número de descomposiciones de un número, es decir calcular el número de soluciones de ciertas ecuaciones diofánticas del tipo $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$.

Dado un número natural $n \geq 1$, se dice que se tiene una descomposición de n si se escribe como suma de otros números naturales mayores o iguales que 1 (el orden de presentación de estos sumandos será relevante). La longitud de la descomposición será el número de sumandos. Para los primeros valores de n se tienen las siguientes descomposiciones:

$$\begin{array}{cccc}
n=1 & n=2 & n=3 & n=4 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\{1\} & \left\{\begin{array}{c} 1+1 \\ 2 \end{array}\right\} & \left\{\begin{array}{c} 1+1+1 \\ 1+2 \\ 2+1 \\ 3 \end{array}\right\} & \left\{\begin{array}{c} 1+1+1+1 \\ 2+1+1 \\ 1+2+1 \\ 1+1+2 \\ 2+2 \\ 3+1 \\ 1+3 \\ 4 \end{array}\right\}
\end{array}$$

Hay que observar que las descomposiciones $4 = 2+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2$ son diferentes, porque se considera el orden de los sumandos. Una forma de entender esta diferencia es reformular el problema de la siguiente forma; repartir n caramelos iguales entre diferentes niños. No todos los niños recibirán siempre caramelos (por eso el número de sumandos varía) y no es lo mismo que el primer niño reciba tres caramelos y el segundo uno que ésta distribución sea al contrario.

Su valor se puede deducir estableciendo una biyección con otro conjunto.

Lema 2.1 *El número de descomposiciones de un número n está en biyección con el número de listas de tamaño $n-1$ formadas por dos símbolos (por ejemplo $\{+, |\}$).*

De lo que se determina su cantidad.

Teorema 2.2 *El número de descomposiciones distintas de un número n es 2^{n-1}.*

El razonamiento anterior no es correcto si el orden de presentación de los sumandos no fuera relevante.

Si se quiere determinar el número de estas descomposiciones que tengan exactamente longitud k (número de sumandos), lo que se quiere es conocer cuántas soluciones positivas tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k = n, \quad x_i \geq 1.$$

De la misma forma que antes se puede establecer la siguiente biyección.

Lema 2.3 *El número de descomposiciones de tamaño k de un número n está en biyección con el número de listas de tamaño $n-1$ formadas por dos símbolos (por ejemplo $\{+, |\}$) tales que uno de ellos aparece $k-1$ veces.*

Teorema 2.4 *El número de descomposiciones distintas de tamaño k de un número n es $\binom{n-1}{k-1}$.*

Usando este resultado y el número total de descomposiciones de un número se demuestra también el valor de la suma de los números binomiales:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}.$$

Con este resultado se deduce también el número de soluciones no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k = n,$$

haciendo el cambio $y_i = x_i + 1$.

Teorema 2.5 *El número de soluciones de la ecuación $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_k = n$ con $x_i \geq 0$ es*

$$\binom{n+k-1}{k-1}.$$

Generalizando el resultado anterior se tiene que

Teorema 2.6 *El número de soluciones de la ecuación $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_k = n$ con $x_i \geq a_i$ es*

$$\binom{n+k-1-a_1-a_2-\ldots-a_k}{k-1}.$$

Esta fórmula incluye las dos anteriores, tomando $a_i = 1, 0$ para todo i. Utilizando el principio de inclusión/exclusión y las técnicas anteriores es posible determinar también el número de soluciones de

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k = n, \quad a_i \leq x_i \leq b_i.$$

Asimismo, se puede calcular el número de soluciones en que las ecuaciones sean una desigualdad.

Particiones de conjuntos.

Un problema similar al del número de soluciones de ecuaciones del tipo $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ es el de partición de un conjunto. Partir un conjunto en subconjuntos (disjuntos dos a dos), para luego aplicar la regla de la suma, es una de las técnicas básicas de la Combinatoria.

Definición 2.7 *Dado un conjunto X, una partición de X es una familia $\{X_i, | \, i \in I\}$ de subconjuntos* **no vacios** *de X tales que:*

i.) *X es la unión de los conjuntos X_i,*

ii.) *Dos subconjuntos distintos tienen intersección vacia.*

Otra forma de definir una partición es decir que cada uno de los elementos de X pertenece a uno y solo a uno de los subconjuntos X_i. El orden de los subconjuntos y el orden que ocupan los elementos dentro de un subconjunto dado es irrelevante.

Ejemplo 2.8 *Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$, los siguientes ejemplos son particiones distintas de X.*

i.) $X_1 = \{a\}, X_2 = \{b, c\}, X_3 = \{d, e\}$.

ii.) $X_1 = \{a, b\}, X_2 = \{c\}, X_3 = \{d, e\}$.

iii.) $X_1 = \{a, c\}, X_2 = \{b, e\}, X_3 = \{d\}$

Como se ve en este ejemplo, el conjunto de cardinales de los subconjuntos de particiones distintas puede ser el mismo (al igual que ocurría con las descomposiciones de un número).

Se define $S(n, k)$ como el número de posibles particiones de un conjunto de n elementos en k subconjuntos. A estos números se los conoce como números de Stirling de segunda especie. Alternativamente $S(n, k)$ cuenta también el número de posibles distribuciones de n bolas numeradas (antes, los elementos del conjunto) en k cajas indistinguibles (los bloques de la partición), de manera que ninguna caja quede vacía.

El número total de particiones de un conjunto de n elementos en subconjuntos se obtendrá clasificando las particiones según el número de bloques que contengan, es decir, en total existirán

$$B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$$

particiones distintas del conjunto. Estos números $B(n)$ se denominan números de Bell.

Los siguientes valores se obtienen de forma inmediata

$$S(n,n) = S(n,1) = 1, \qquad S(n,n+k) = 0,\ k \geq 1$$

que corresponden a los casos extremos en los que la partición tiene n subconjuntos, un único subconjunto y más subconjuntos que elementos respectivamente.

Otros valores de $S(n,k)$ se pueden obtener simplemente a partir del estudio de los elementos de cada subconjunto.

Teorema 2.9 *Para todo entero positivo n,*

- $S(n,n-1) = \binom{n}{2}$.
- $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$.

El cálculo del valor exacto de $S(n,k)$ puede realizarse a partir de un argumento combinatorio que depende del entero k. De la misma forma que ocurre con los números binomiales, los números de Stirling de segunda especie satisfacen una relación de recurrencia.

Teorema 2.10 *Para todo par de enteros positivos n, k tal que $2 \leq k \leq n$ se tiene que*

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k).$$

Puede construirse de este modo el análogo al triángulo de Pascal cuyas filas suman los números de Bell.

							$B(n)$
1							1
1	1						2
1	3	1					5
1	7	6	1				15
1	15	25	10	1			52
1	31	90	65	15	1		203
1	63	301	350	140	21	1	877

Una fórmula explícita para los números de Stirling de segunda especie puede deducirse relacionándolos con las aplicaciones sobreyectivas de un conjunto de X de n elementos en un conjunto de Y de k elementos. Dada una partición del conjunto X en k subconjuntos $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ y una ordenación de Y, $y_1, y_2, \ldots, y_k$, se tiene una aplicación sobreyectiva

$$f : X \to Y \, , f(x) = y_j \ \text{ si } \ x \in X_j.$$

Recíprocamente, dada una aplicación sobreyectiva $f : X \to Y$, entonces $\{f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2), \ldots, f^{-1}(y_k)\}$ es una partición de X.

Por lo tanto, el nº M de aplicaciones sobreyectivas $X \to Y$ es

$$M = k!S(n, k).$$

Usando el teorema 1.19:

Teorema 2.11 *Para todo par de enteros positivos n, k tal que $2 \leq k \leq n$,*

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j} (k - j)^n.$$

Utilizando la relación con las aplicaciones entre conjuntos puede deducirse la siguiente identidad:

$$k^n = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} j!S(n, j).$$

Particiones de un entero positivo

Al determinar el número de descomposiciones de un número n o el número de soluciones de ecuaciones diofánticas del tipo $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ el orden de los sumandos es relevante. En algunas situaciones el orden de los sumandos no es importante, por ejemplo al distribuir objetos indistinguibles en recipientes indistinguibles. En este caso la diferencia principal entre una solución u otra es la cantidad que hay de cada tipo.

Definición 2.12 *Para cada entero positivo n, $p(n)$ es el número de formas en las que n puede expresarse como suma de enteros positivos, donde el orden no es relevante. Cada una de estas sumas se denomina partición de n.*

Si se desea explicitar el número de sumandos, se denota por $p_k(n)$ al número total de particiones de n con k sumandos. Lógicamente se tiene que $p(n) = \sum p_k(n)$.

La diferencia entre descomposiciones y particiones de un número es precisamente la importancia o no del orden. Mientras $3+2+1$ y $3+1+2$ son dos descomposiciones distintas, ambas corresponden a la partición $3+2+1$. Por convenio, una partición se tomará en orden decreciente.

De esta forma $p_k(n)$ es el número de soluciones positivas de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k = n$, tal que $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_k \geq 1$.

A partir de la definición de $p_k(n)$ se deducen algunos de sus valores.

Teorema 2.13 *Para todo entero n,*

$$p_1(n) = 1, \qquad p_n(n) = 1,$$

$$p_{n-1}(n) = 1, \qquad p_2(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

Se denota por $p_{\leq k}(n)$ al número de particiones de n en, a lo sumo, k enteros positivos.

Proposición 2.14 *El valor $p_{\leq k}(n)$ es el número de soluciones enteras de la ecuación*

$$n = 1z_1 + 2z_2 + \ldots + kz_k, \qquad 0 \leq z_i\,.$$

Una manera de representar una partición de un entero es mediante el diagrama de Ferrers

Definición 2.15 *Sea $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k = n$ con $x_i \geq x_{i+1} \geq 1$ para todo $1 \leq i \leq k-1$, una partición de n en k sumandos. El diagrama de Ferrers asociado a ella consiste en un diagrama de k filas donde cada fila tiene x_i puntos (o marcas).*

Ejemplo 2.16 *El diagrama de Ferrers correspondiente a la partición* $12 = 1+3+3+5$ *es*

$$\begin{array}{ccccc} X & X & X & X & X \\ X & X & X & & \\ X & X & X & & \\ X & & & & \end{array}$$

A partir de los diagramas de Ferrers puede deducirse la siguiente relación entre particiones.

Teorema 2.17 *Sean n y k enteros positivos. El número de particiones de n con a lo sumo k partes coincide con el número de particiones de $n+k$ con exactamente k partes. Es decir:*

$$p_{\leq k}(n) = p_k(n+k).$$

De este resultado se obtiene una primera fórmula recurrente que permite calcular el valor de $p_k(n)$ si conocemos ciertos valores del número de particiones con parámetros más bajos.

Corolario 2.18

$$p_k(n) = \sum_{j=1}^{k} p_j(n-k).$$

Se puede construir de esta forma un triángulo (a lo Pascal) con los valores de $p_k(n)$ cuyas filas suman $p(n)$.

La recurrencia así obtenida puede agruparse de la forma siguiente más simple.

Teorema 2.19 *Dados $n \geq 1$ y un entero $1 \leq k \leq n$,*

$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k).$$

Si en el diagrama de una partición de n se intercambian filas por columnas, se obtiene de nuevo una partición de n, que se denomina partición conjugada. Utilizando esta transformación se demuestra que $p_k(n) = p(n|$ su parte mayor es $k)$.

Todas estas técnicas resuelven algunos problemas de distribución como se muestra en la tabla siguiente en la que se distribuyen n objetos en k recipientes.

1														$p(1) = 1$
1	1													$p(2) = 2$
1	1	1												$p(3) = 3$
1	2	1	1											$p(4) = 5$
1	2	2	1	1										$p(5) = 7$
1	3	3	2	1	1									$p(6) = 11$
1	3	4	3	2	1	1								$p(7) = 15$
1	4	5	5	3	2	1	1							$p(8) = 22$
1	4	7	6	5	3	2	1	1						$p(9) = 30$
1	5	8	9	7	5	3	2	1	1					$p(10) = 42$
1	5	10	11	10	7	5	3	2	1	1				$p(11) = 56$
1	6	12	15	13	11	7	5	3	2	1	1			$p(12) = 77$
1	6	14	18	18	14	11	7	5	3	2	1	1		$p(13) = 101$
1	7	16	23	23	20	15	11	7	5	3	2	1	1	$p(14) = 135$

Objetos	Recipientes	Recipientes vacios	Distribuciones distintas
Distintos	Distintos	Si	k^n
Distintos	Distintos	No	$k!S(n,k)$
Distintos	Iguales	Si	$S(n,1) + S(n,2) + \ldots + S(n,k)$
Distintos	Iguales	No	$S(n,k)$
Iguales	Distintos	Si	$\binom{n+k-1}{k-1}$
Iguales	Distintos	No	$\binom{n-1}{k-1}$
Iguales	Iguales	Si	$p_k(n)$
Iguales	Iguales	No	$p_k(n) - p_{k-1}(n)$

1.3. Tema 3. Funciones generatrices. Recurrencias lineales homogéneas y no homogéneas.

Funciones generatrices

En algunos problemas combinatorias que se han visto anteriormente se ha tratado de determinar el tamaño de un conjunto que dependía de un entero n. De manera general, la respuesta a la cuestión se traduce en una sucesión de valores $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Las funciones generatrices son una herramienta útil para representar sucesiones codificando los términos de la sucesión como los coeficientes de las distintas potencias de una serie de potencias formal. Además, estas funciones generatrices pueden usarse también para resolver problemas de conteo o resolver ecuaciones en recurrencia.

Antes de entrar en detalle, es necesario mencionar algunos resultados básicos sobre series formales.

Definición 3.1 *Sea K un cuerpo, una serie de potencias formal sobre K es una expresión de la forma*

$$u_0 + u_1x + u_2x^2 + \ldots + u_kx^k + \ldots ,$$

donde $(u_0, u_1, u_2, \ldots)$ es una sucesión en K.

El conjunto de series formales sobre un cuerpo es un anillo $K[[x]]$ con la siguientes operaciones de suma y producto:

$$\begin{aligned} &(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots) = \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad a_0b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots , \\ &(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots) = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad +(a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + \ldots \end{aligned}$$

Aunque las series formales no son funciones, a veces puede resultar cómodo pensar en ellas como si fueran funciones en la variable x. Por ejemplo, para todo $|x| < 1$, se tiene que $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$ (suma de la serie geométrica de razón x). Esta manera de trabajar ayuda a la hora de realizar operaciones.

Teorema 3.2 *El elemento $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots \in K[[x]]$ tiene inverso en $K[[x]]$ si y solo si $a_0 \neq 0$.*

Dada una serie formal $\sum a_ix^i$, el cálculo de su inversa $\sum b_ix^i$ se puede realizar igualando coeficientes en $(\sum a_ix^i)(\sum b_ix^i) = 1$.

Definición 3.3 *Dada una sucesión $a = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, la función generatriz asociada a a es la función*

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i.$$

Ejemplo 3.4 *Algunas funciones generatrices básicas.*

i.) *Utilizando el teorema del binomio, se puede escribir para cada entero* n,

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i,$$

y $(1+x)^n$ *representará la función generatriz de los números binomiales.*

ii.) *Utilizando el desarrollo de Taylor, es fácil comprobar*

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

y $1/(1+x)$ *es la función generatriz asociada a la sucesión* $a_n = (-1)^n$.

iii.) $\frac{1}{1-x}$ *es la función generatriz asociada a la sucesión constante* $a_n = 1$.

iv.) $\frac{x}{(1-x)^2}$ *es la función generatriz asociada a la sucesión de los enteros positivos* $a_n = n$.

Algunas operaciones entre funciones generatrices se traducen en sus sucesiones asociadas; o viceversa. Sean dos funciones generatrices $f(x)$ y $g(x)$, asociadas a dos sucesiones (a_n) y (b_n), respectivamente, y sean α, β dos números cualesquiera, entonces $\alpha f(x) + \beta g(x)$ es la función generatriz de $(\alpha a_n + \beta b_n)$. Así que al sumar (y/o multiplicar por constantes) funciones generatrices, se suman (y/o multiplican por constantes) las sucesiones asociadas.

En algunas ocasiones puede interesar considerar la sucesión de números que se obtiene de una dada desplazando los coeficientes hacia la derecha o hacia la izquierda.

Proposición 3.5 *Sea* $f(x)$ *la función generatriz asociada a la sucesión* (a_n). *Entonces, para cada entero positivo* k, $x^k f(x)$ *es la función generatriz asociada a* $(a_{n-k})_{n=0}^{\infty}$, *donde, por convenio, si el índice del coeficiente es negativo, entonces el coeficiente vale cero.*
Por otra parte la función generatriz $\frac{f(x)-(a_0 a_1 x + a_2 x^2 + a_{k-1} x^{k-1})}{x^k}$ *es la función generatriz correspondiente a la sucesión* $(a_{n+k})_{n=0}^{\infty}$.

Así como la suma de funciones generatrices es función generatriz, el producto de dos funciones generatrices es también una función generatriz.

Proposición 3.6 *Sean* $f(x), g(x)$ *dos funciones generatrices asociadas a las sucesiones* $(a_n), (b_n)$, *respectivamente. Entonces* $f(x)g(x)$ *es la función generatriz asociada a la sucesión* (c_n) *donde* $c_n = \sum_{k+j=n} a_k b_j$.

El resultado anterior tiene una interpretación combinatoria. Supóngase que se tienen objetos de dos tipos, A y B, de forma que para cada $n \in \mathbb{N}$ se conoce el número de listas de tamaño n con objetos de tipo A, que es a_n y el número de listas de tamaño n con objetos de tipo A, que es b_n. Si se desea conocer, para cada n el número de listas de tamaño n con objetos de ambos tipos el proceso para determinar ese cardinal es el siguiente:

i.) Sea k el tamaño del objeto de tipo A elegido ($0 \leq k \leq n$).

ii.) Se elige el objeto de tipo A de tamaño k. Esto se podrá hacer de a_k formas.

iii.) Se elige el objeto de tipo B, de tamaño $n-k$, se podrá hacer de b_{n-k} maneras.

Si c_n es el número de objetos que podemos construir con esas características $c_n = \sum_{k+j=n} a_k b_j$.

Utilizando la derivada es fácil determinar la función generatriz de las sucesiones del tipo $(n^k a_n)$ donde (a_n) es una sucesión de la que se conoce su función generatriz.

Proposición 3.7 *Sea $f(x)$ la función generatriz asociada a la sucesión (a_n). Para cada $k \geq 1$, la función $\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^k f(x)$ es la función generatriz asociada a la sucesión $(n^k a_n)$.*

Finalmente, utilizando el producto de funciones generatrices visto anteriormente, es posible obtener las sumas de los primeros n términos de una sucesión.

Proposición 3.8 *Sea $f(x)$ la función generatriz asociada a la sucesión (a_n). $\frac{f(x)}{1-x}$ es la función generatriz asociada a la sucesión $(\sum_{k=0}^{n} a_k)$.*

En general, las funciones generatrices que se van a utilizar se representarán como cocientes de dos polinomios. $\dfrac{a(x)}{b(x)}$ con $b_0 \neq 0$. Aunque la división de polinomios en el anillo de series formales puede usarse a la hora de determinar los coeficientes de la serie formal, este procedimiento no proporciona una fórmula para cada coeficiente. Descomponiendo $\dfrac{a(x)}{b(x)}$ en fracciones simples y utilizando funciones generatrices conocidas, será posible dar más fácilmente una fórmula general.

El teorema del binomio ha permitido determinar $(1+x)^n$ como la función generatriz de los números binomiales $\binom{n}{k}$ con $0 \leq k \leq n$. De la misma forma, se puede ver que $(1+x)^{-n}$ para todo entero n será la función generatriz de alguna sucesión. Se tiene así el teorema del binomio generalizado.

Teorema 3.9 (Teorema del binomio generalizado) *Para todo entero n se tiene que*

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i,$$

definiendo los números binomiales para enteros negativos

$$\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{i!}.$$

Como $\binom{-1}{i} = (-1)^i$ para todo $i \geq 0$ resulta la siguiente igualdad

$$\frac{1}{1-x^i} = 1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} + \ldots$$

El teorema del binomio generalizado también es cierto si el exponente n es cualquier número real. Con ayuda de la expresión anterior es posible dar la función generatriz para la sucesión $p(n)$ que representa el número de particiones de un entero n.

Teorema 3.10 *La función generatriz correspondiente a las particiones de un entero n cuyos sumandos son menores que m es*

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1-x^i}\,.$$

Teorema 3.11 (Euler) *El número de particiones de un entero n coincide con el coeficiente de grado n de la serie formal*

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}\,.$$

Aunque la expresión anterior viene dada por un producto infinito, para calcular $p(n)$ basta con tomar el desarrollo de las series hasta el término x^n con lo que el producto es realmente finito.

Otras funciones generatrices involucrando particiones pueden deducirse de la misma forma.

Teorema 3.12 *Las funciones generatrices correspondientes a*

$$p_d(n) = p(n|\text{los sumandos son distintos })$$

y

$$p_I(n) = p(n|\text{ con sumandos impares })$$

son

$$P_D = \prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i) \;\; y \;\; P_I = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2i-1}},$$

respectivamente. Además, $p_d(n) = p_I(n)$.

Recurrencias lineales homogéneas y no homogéneas.

Las funciones generatrices también se pueden usar para resolver recurrencias lineales, es decir, determinar la sucesión a_n que satisface una relación de la forma siguiente:

$$a_{n+k} + c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \ldots + c_k a_n = f(n),$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ dados y $f(n)$ una sucesión cualquiera. Si $f(n)$ es el polinomio nulo se dirá que la recurrencia es homogénea.

Cada recurrencia lineal de la forma anterior tiene un polinomio asociado que será de utilidad a la hora de resolverla. La recurrencia $a_{n+k} + c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \ldots + c_k a_n = f(n)$ tiene asociado el polinomio $1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_k x^k$.

Teorema 3.13 *La función generatriz de la sucesión* a_n *que satisface* $a_{n+k} + c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \ldots + c_k a_n = 0$ *con* $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ *dados viene definida por*

$$A(x) = \frac{p(x)}{1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_k x^k},$$

donde el polinomio $p(x)$ *tiene grado menor que* k *y está unívocamente determinado por los valores iniciales de la sucesión* $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$.

El conjunto de sucesiones que son solución de una recurrencia lineal homogénea es un espacio vectorial.

Teorema 3.14 *Sea* $a_{n+k} + c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \ldots + c_k a_n = 0$ *una recurrencia lineal homogénea y sean* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *dos soluciones. Para todo par de contantes* A, B, *la sucesión* $\{Ax_n + By_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es también una solución.*

Si el cuerpo es algebraicamente cerrado, todo polinomio factoriza como producto de polinomios lineales. Utilizando la descomposición en fracciones simples del polinomio asociado a una recurrencia, si $1+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_kx^k = (1-\alpha_1x)^{m_1}(1-\alpha_2x)^{m_2}\cdots(1-\alpha_rx)^{m_r}$ (α_i son las raíces de $x^k+c_1x^{k-1}+c_2x^{k-2}+\ldots+c_k$) entonces la función generatriz $A(x)$ de una sucesión a_n que satisface $a_{n+k}+c_1a_{n+k-1}+c_2a_{n+k-2}+\ldots+c_ka_n=0$ se puede escribir de la forma

$$A(x)=\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\gamma_{i,1}}{1-\alpha_ix}+\frac{\gamma_{i,2}}{(1-\alpha_ix)^2}+\ldots+\frac{\gamma_{i,m_i}}{(1-\alpha_ix)^{m_i}}\right),$$

donde $\gamma_{i,j}$, $1\leq i\leq r$, $1\leq j\leq m_i$, son constantes.

Utilizando el teorema del binomio generalizado, se tiene que cada sumando $\frac{\gamma_{i,j}}{(1-\alpha_ix)^j}$ es la función generatriz de la sucesión $\{\gamma_{i,j}\alpha_i^n\binom{n+j-1}{n}\}_{n=0}^{\infty}$. Por tanto la solución será de la forma

$$\sum_{i=1}^{r}\left(\gamma_{i,1}\binom{n}{n}+\gamma_{i,2}\binom{n+1}{n}+\ldots+\gamma_{i,m_i}\binom{n+m_i-1}{n}\right)\alpha_i^n.$$

Las constantes se pueden calcular a partir de los términos iniciales $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ de la sucesión. Representando la sucesión de esta forma, es fácil ver que las constantes $\gamma_{i,j}$ son las coordenadas de la sucesión solución en el espacio vectorial de las sucesiones que satisfacen la ecuación en recurrencias homogénea. Lógicamente, existen otras bases de este espacio vectorial y una solución de la ecuación en recurrencias homogénea puede escribirse de la forma

$$\sum_{i=1}^{r}\left(g_{i,1}+g_{i,2}n+\ldots+g_{i,m_i}n^{m_i}\right)\alpha_i^n,$$

con $g_{i,j}$ constantes.

Recíprocamente, si se tiene una solución de esta forma, será solución de la recurrencia lineal homogénea cuyo polinomio asociado es $1+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_kx^k=(1-\alpha_1x)^{m_1}(1-\alpha_2x)^{m_2}\cdots(1-\alpha_rx)^{m_r}$.

Si la recurrencia lineal que satisface la sucesión no es homogénea, el conjunto de soluciones no forma en este caso un espacio vectorial.

Teorema 3.15 *Toda sucesión $\{a_n\}$ que satisface la recurrencia lineal no homogénea $a_{n+k}+c_1a_{n+k-1}+c_2a_{n+k-2}+\ldots+c_ka_n=f(n)$ es de la forma $\{x_n+y_n\}_{n=0}^{\infty}$ con $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ una solución particular de dicha recurrencia y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, una solución de la recurrencia lineal homogénea $a_{n+k}+c_1a_{n+k-1}+c_2a_{n+k-2}+\ldots+c_ka_n=0$.*

Por tanto, lo único que resta es encontrar una solución particular de la recurrencia lineal no homogénea. Esto será posible si se es capaz de encontrar una recurrencia lineal homogénea de forma que $f(n)$ sea solución, es decir, si $f(n)$ es de la forma $\sum_{i=1}^{s}\left(h_{i,1}+h_{i,2}n+\ldots h_{i,l_i}n^{l_i}\right)\beta_i^n$, para ciertos valores $\beta_i, h_{i,j}$.

De hecho, la solución particular puede calcularse como solución de otra ecuación en recurrencias lineal homogénea.

Teorema 3.16 *Sea* $a_{n+k}+c_1a_{n+k-1}+c_2a_{n+k-2}+\ldots+c_ka_n = f(n)$ *una recurrencia lineal no homogénea y sea*

$$a_{n+t}+b_1a_{n+t-1}+b_2a_{n+t-2}+\ldots+b_ta_n=0$$

la recurrencia lineal homogénea que satisface $f(n)$. *Entonces la función generatriz de una solución particular de la recurrencia no homogénea viene dada por*

$$A(x)=\frac{p(x)}{(1+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_kx^k)(1+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_tx^t)},$$

para cierto polinomio $p(x)$ *de grado menor que* $k+t$.

Si además

$$(1+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_kx^k)(1+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_tx^t)= \\ (1-\delta_1x)^{e_1}(1-\delta_2x)^{e_2}\cdots(1-\delta_px)^{e_p},$$

entonces una solución particular se puede encontrar en la familia

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\eta_{i,1}+\eta_{i,2}n+\ldots+\eta_{i,e_i}n^{e_i}\right)\delta_i^n,$$

para ciertos valores de $\eta_{i,j}$.

4. Bibliografía

Muchos de los tópicos de la asignatura se encuentran en casi cualquier libro de Matematica Discreta. Para el desarrollo de la asignatura se recomiendan los siguientes:

- N. L. Biggs, *Discrete Mathematics.* Oxford University Press. 2002.
- R. P. Grimaldi, *Discrete and combinatorial mathematics, an applied introduction.* Addison-Wesley. 1989.
- C. Munuera, J. Tena, *Codificación de la información.* Serv. Pub. U. de Valladolid. 1997.
- K. H. Rosen, *Discrete mathematics and its applications.* McGraw-Hill. 1999.

Además de la bibliografía ya mencionada, otras referencias utilizadas para la elaboración del proyecto docente son:

- R.B.J. Allenby, A. Slomson, *How to count, an introduction to Combinatorics.* CRC Press. 1991.
- M. Bóna, *A walk through combinatorics. An Introduction to Enumeration and Graph Theory.* World Scientific. 2006.
- P. Fernandez-Gallardo, J.L. Fernández Pérez. *Notas de Matemática Discreta.* Disponible en www.uam.es/pablo.fernandez. 2008.
- J. Gimbert, R. Moreno, J.M. Ribó, M. Valls, *Apropament a la teoria de grafs i als seus algorismes.* U. de LLeida. 1998.
- F. Harary, *Graph Theory.* Addison-Wesley. 1969.
- J. Matousek, J. Nesetril, *Invitation to Discrete Mathematics.* Clarendon Press, Oxford. 1998.