XII Escuela Miguel de Guzmán
Descubriendo los sentidos en Matemáticas

Taller

Como puede ayudar GeoGebra a desarrollar el nuevo currículo de Matemáticas

Ejemplo 1 : La criba de Eratóstenes... ¿primer algoritmo computacional?

Álvaro Fernández, José Luis Muñoz y Pablo Triviño

Habitualmente la criba de Eratóstenes se representa de la siguiente forma, más o menos :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

http://geogebra.es/gauss/materiales_didacticos/primaria/actividades/aritmetica/naturales_y_enteros/criba_de_eratostenes/actividad.html

Pulsamos sobre el enlace de la línea de arriba para ver como se construye esta criba.

Seguro que Eratóstenes era un ser racional, ¿pero era un ser decimal?

Hace bastantes años, no recuerdo lugar ni autoría, vi una criba de Eratóstenes aproximadamente así :

6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180	186
5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	71	77	83	89	95	101	107	113	119	125	131	137	143	149	155	161	167	173	179	185
4	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100	106	112	118	124	130	136	142	148	154	160	166	172	178	184
3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75	81	87	93	99	105	111	117	123	129	135	141	147	153	159	165	171	177	183
2	8	14	20	26	32	38	44	50	56	62	68	74	80	86	92	98	104	110	116	122	128	134	140	146	152	158	164	170	176	182
1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	67	73	79	85	91	97	103	109	115	121	127	133	139	145	151	157	163	169	175	181

En la criba decimal los primos se reparten en cuatro columnas salvo el 2 y el 5, divisores propios de 10.

En la criba hexal los números primos se distribuyen en dos filas salvo el 2 y el 3, divisores propios de 6.

¿Cómo transmitimos esto al alumnado 1º de ESO, o de primaria?

¡¡¡ Enunciando triunfalmente !!! :

"La condición necesaria, no suficiente, para que un número sea primo es que sea congruente con 1 ó -1 módulo 6"

Y ni mil quinientas palabras más.

Adicionalmente, soy blando, reparto en todas mis clases esta hoja :

Cada persona debe colorear los múltiplos de dos hojas diferentes.

Yo se lo pido en clase. Si lo preferís podéis mandarlo para casa.

¿Hay errores? : !Siempre! Y son varias personas las que se equivocan.

Pero los errores son más fáciles de detectar porque los múltiplos se distribuyen de forma geométrica siguiendo un patrón regular.

Antes de conocer *GeoGebra*, superponía unas hojas sobre otras encima del cristal de una ventana de clase para buscar los múltiplos comunes a dos o más números.

O superponiendo todas las hojas se podrían ver los números primos.

Eso, utilizando hojas transparentes, con papel normal cuesta verlo.

En cada clase construimos.

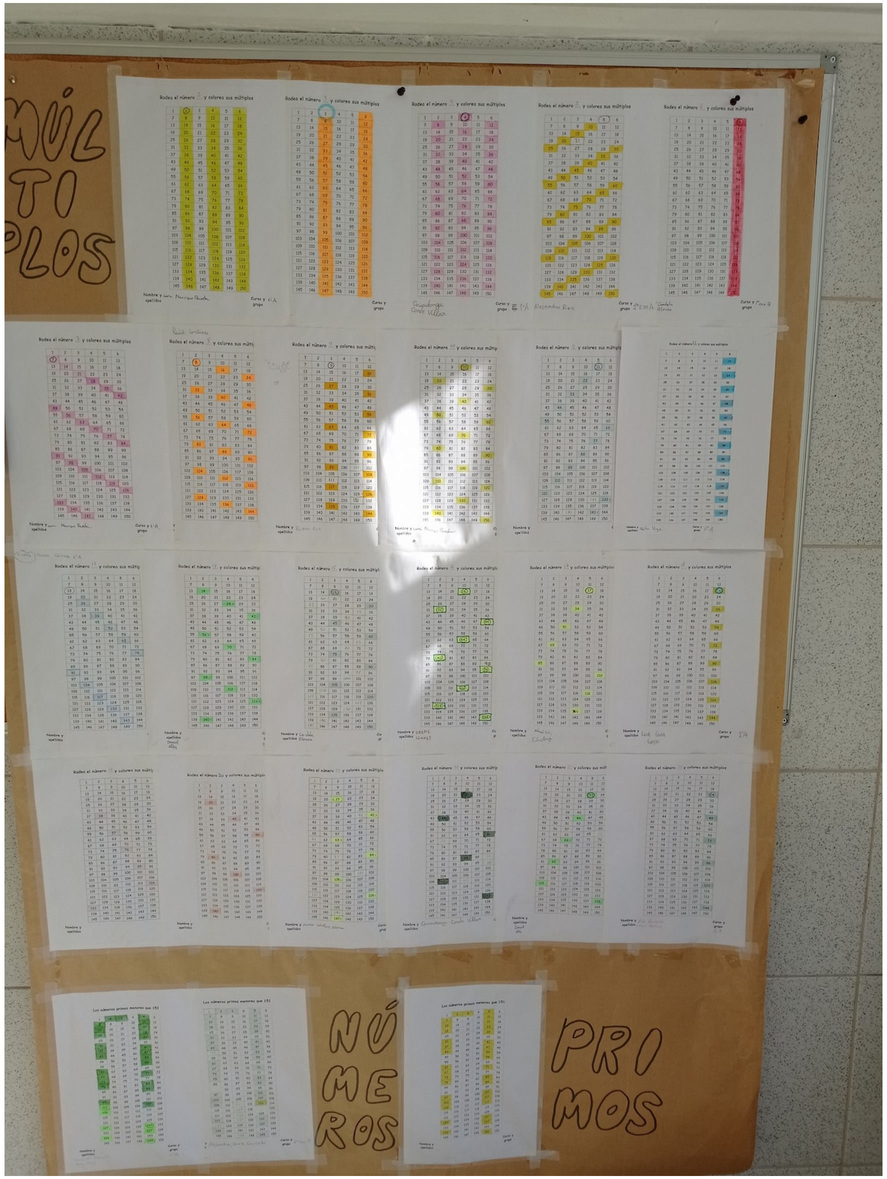
El gran chuletón

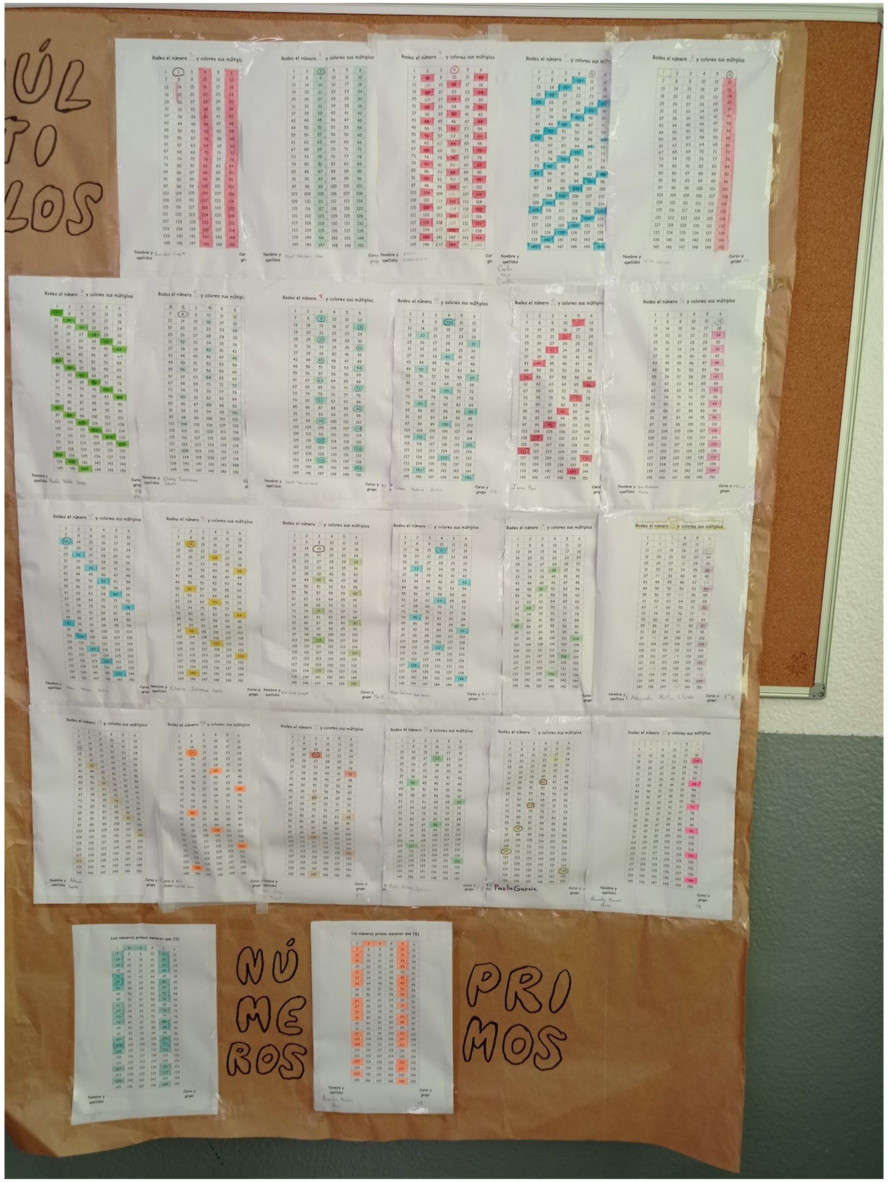
Tacha los múltiplos de ...

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120

Nombre .... Grupo ....

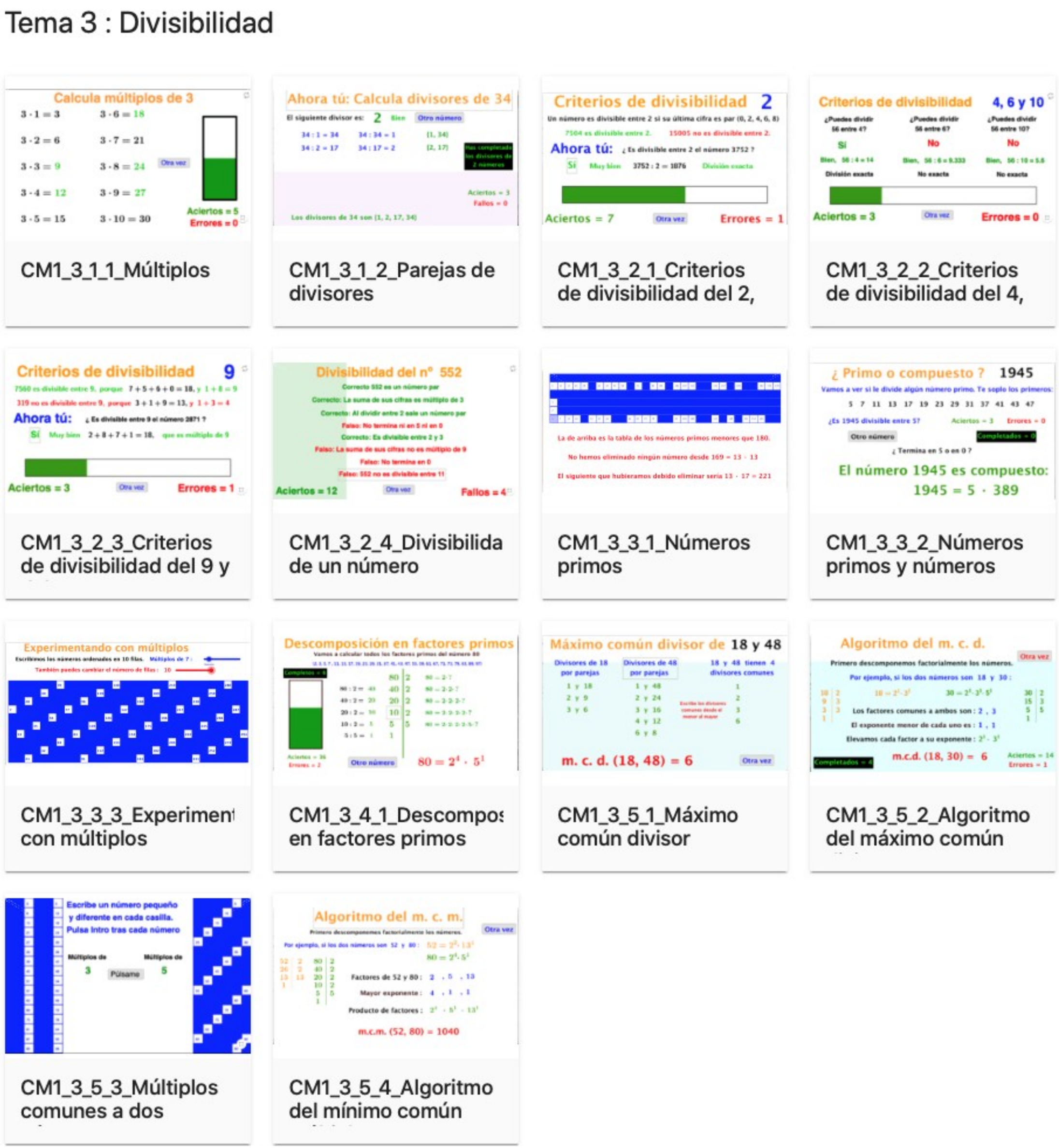
Ejemplos : 1ºA y 1ºB (2021-2022) IES Jesus de Monasterio (Potes)





Con GeoGebra uso esta criba en varios cursos y diversos objetivos. Espero que con sentido matemático.

Para 1° de ESO



Buscando los números primos

5	11	17	23	29		41	47	53	59		71		83	89		101	107	113			131	137		149			167	173	179
3																													
2																													
1	7	13	19		31	37	43			61	67	73	79			97	103	109			127		139		151	157	163		

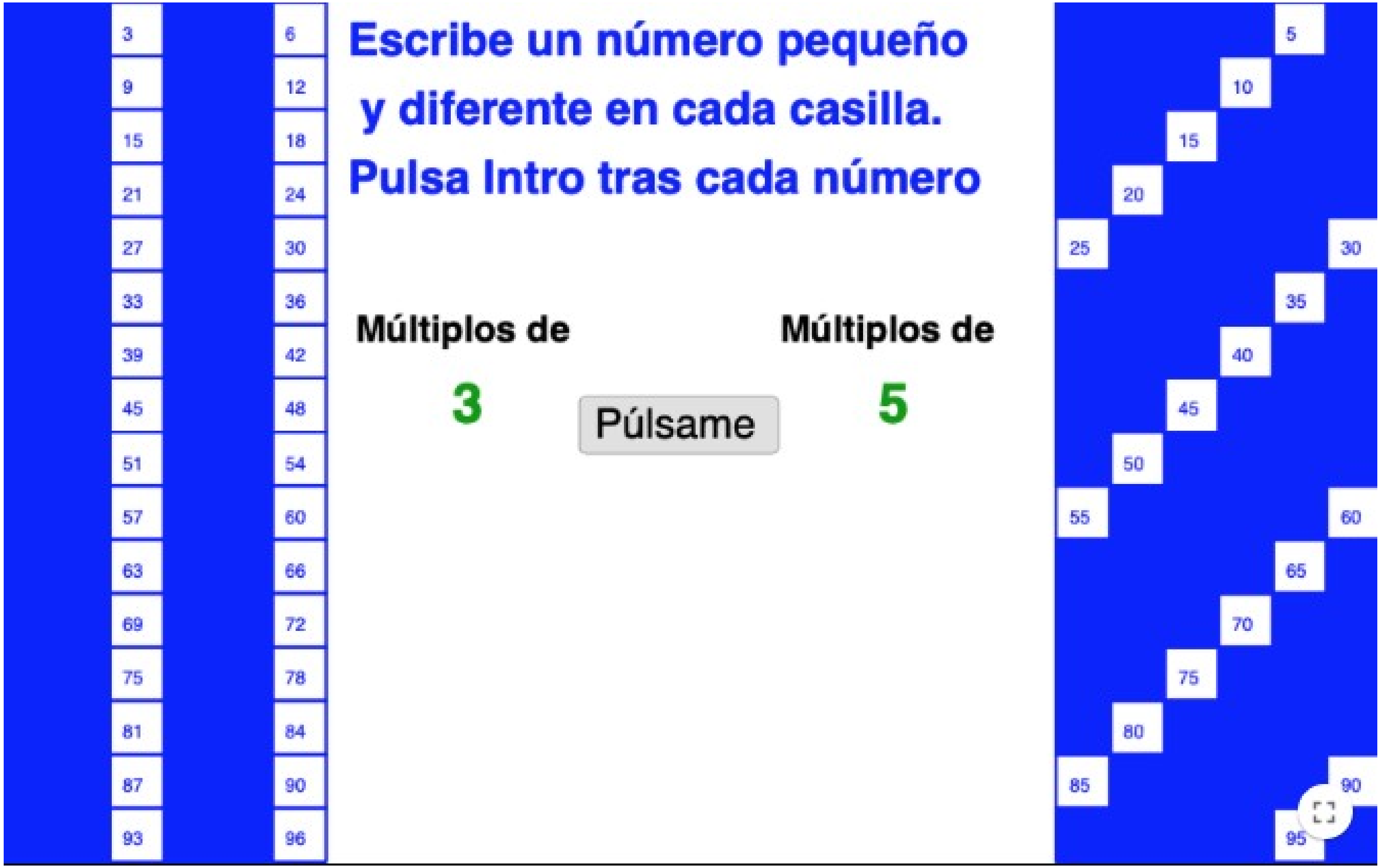
La de arriba es la tabla de los números primos menores que 180.

No hemos eliminado ningún número desde $169 = 13 \cdot 13$

El siguiente que hubieramos debido eliminar sería $13 \cdot 17 = 221$

https://www.geogebra.org/m/dEV5qYNY#material/ejs2dnew

Visualizando el mcm de dos números



https://www.geogebra.org/m/dEV5qYNY#material/mraqfgeu

Jugando con varias cribas de Eratóstenes

https://www.geogebra.org/m/dEV5qYNY#material/ntfcs4yr

Una ligera modificación nos permite conectar con el Álgebra

Experimentando con múltiplos y filas

Cambio a múltiplos

Hemos marcado la segunda fila : Números que al dividirlos entre 9 tienen resto 2

9

Podemos expresarlos a todos a la vez como : 9x + 2

2

Para cada valor de x obtenemos un valor diferente : 9·18 + 2 = 164

18

9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207	216	225	234	243	252	261	270
8	17	26	35	44	53	62	71	80	89	98	107	116	125	134	143	152	161	170	179	188	197	206	215	224	233	242	251	260	269
7	16	25	34	43	52	61	70	79	88	97	106	115	124	133	142	151	160	169	178	187	196	205	214	223	232	241	250	259	268
6	15	24	33	42	51	60	69	78	87	96	105	114	123	132	141	150	159	168	177	186	195	204	213	222	231	240	249	258	267
5	14	23	32	41	50	59	68	77	86	95	104	113	122	131	140	149	158	167	176	185	194	203	212	221	230	239	248	257	266
4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112	121	130	139	148	157	166	175	184	193	202	211	220	229	238	247	256	265
3	12	21	30	39	48	57	66	75	84	93	102	111	120	129	138	147	156	165	174	183	192	201	210	219	228	237	246	255	264
2	11	20	29	38	47	56	65	74	83	92	101	110	119	128	137	146	155	164	173	182	191	200	209	218	227	236	245	254	263
1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100	109	118	127	136	145	154	163	172	181	190	199	208	217	226	235	244	253	2

https://www.geogebra.org/m/vya2gfjp

¿ Y en otros cursos ?   Y esta es vuestra tarea D1

En 3º de ESO lo utilizo para seguir estudiando patrones y regularidades en uno de los temas "malditos".

Sucesiones y progresiones

Cambiando la expresión algebraica $9x + 2$ por la numérica $2 + (n-1)\cdot 9 = a_1 + (n-1)\cdot d = a_n$

Las sucesiones, como proceso iterativo, ayudan a desarrollar el

Pensamiento computacional

(A mí me gusta más "pensamiento algorítmico")

"... el alumnado debe aprender habilidades de pensamiento computacional. Estas habilidades incluyen el reconocimiento de patrones, el diseño y uso de abstracciones, la descomposición de patrones, la determinación de qué herramientas son adecuadas para analizar o solucionar un problema y definir algoritmos como parte de una solución. Su potencialidad está en ver el pensamiento computacional como un proceso de pensamiento que supone formular problemas y diseñar sus soluciones de manera que puedan ser ejecutadas por un ordenador, un humano o una combinación de ambos (PISA, 2021)."

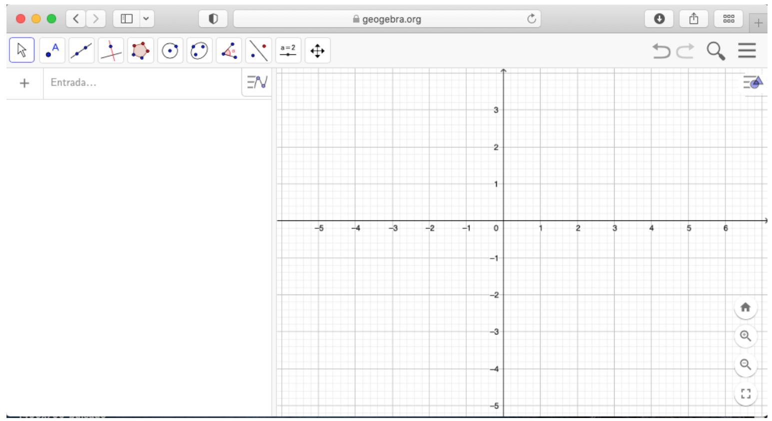
Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria (CEMAT,2021, pág. 11)

Os muestro lo que hago en 3º de ESO "destripando" la criba de Eratóstenes (versión GeoGebra)

En cualquier navegador abrimos GeoGebra :

Y pulsamos sobre GeoGebra Clásico :

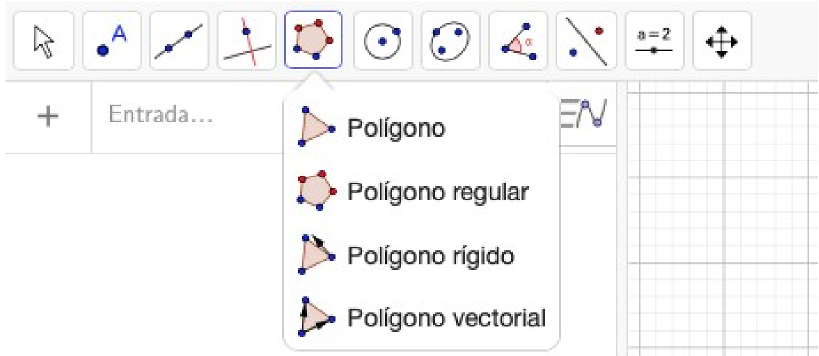
https://www.geogebra.org https://www.geogebra.org/classic



En la barra de herramientas, pulsamos la 5° ventana

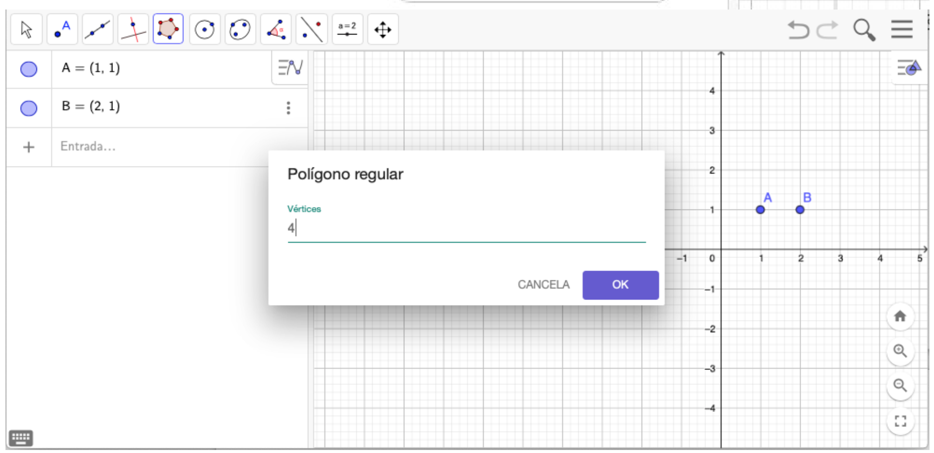
Esta ventana se despliega hacia abajo.

Elegimos la segunda opción : Polígono regular

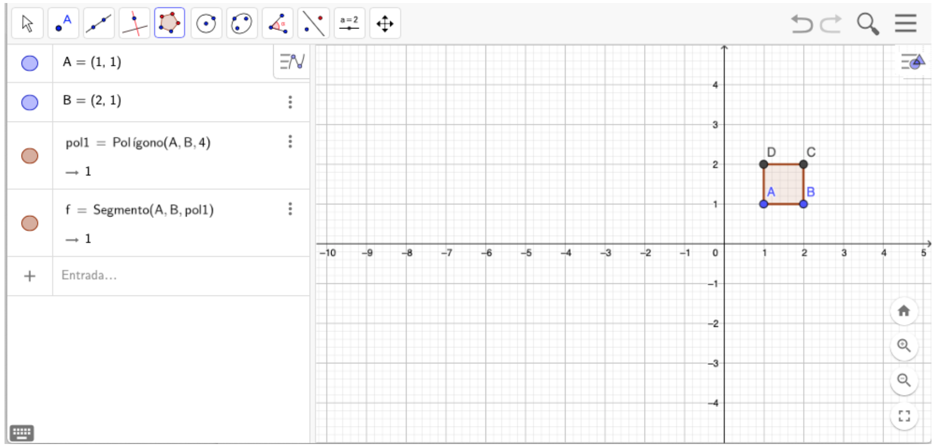


Pulsamos en dos puntos con la misma altura :

Elegimos 4 lados, aunque aparece por defecto :



A la izquierda y arriba podemos leer en la Vista Algebraica : pol1 = Polígono(A,B,4)



¿Cómo construimos el resto de la columna?

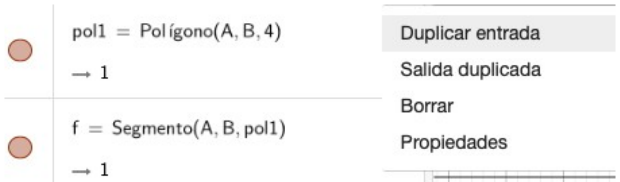
Por comodidad escribimos en la vista algebraica :

lado = x(B) – x(A)

En 3º ESO deben comprender las coordenadas.

En pol1 pulsamos sobre los tres puntos de la derecha y luego en Duplicar entrada

Aparece : Polígono(A,B,4)

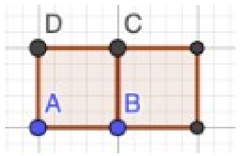


Pregunta : ¿Cómo modificamos esto para que aparezca otro cuadrado encima?

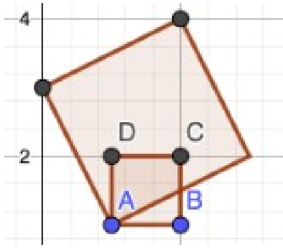
Es muy típica la respuesta : "¡Sumando uno". Hay que llevarles a : ¡Sumándole el lado!

Diferentes formas de escribirlo dan resultados diferentes. Esta suele ser la sucesión de propuestas:

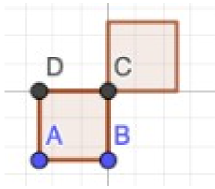
Polígono(A+lado,B,4)



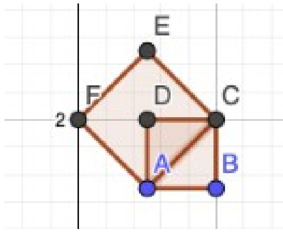
Polígono(A,B+lado,4)



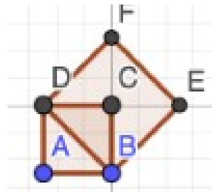
Polígono(A+lado,B+lado,4)



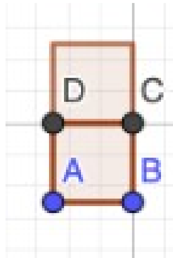
Polígono(A,B+(0,lado),4)



Polígono(A+(0,lado),B,4)



Polígono(A+(0,lado),B+(0,lado),4)



En la Vista Algebraica llegamos por fin a : pol2 = Polígono(A+(0,lado),B+(0,lado),4)

Nuestra siguiente pregunta puede ser : ¿Cómo escribimos pol3, pol4, pol5, pol6?

Suelen llegar a : Sumando 2 lados, sumando 3 lados, sumando 4 lados, sumando 5 lados.

Les matizamos esta "progresión" : 2 = 3-1 3 = 4-1 4 = 5-1 5 = 6-1

Multiplicamos la diferencia entre el orden de los términos, (n-1), por un patrón numérico constante, lado.

Esta columna es la “sucesión” :

pol1 = Polígono(A,B,4)

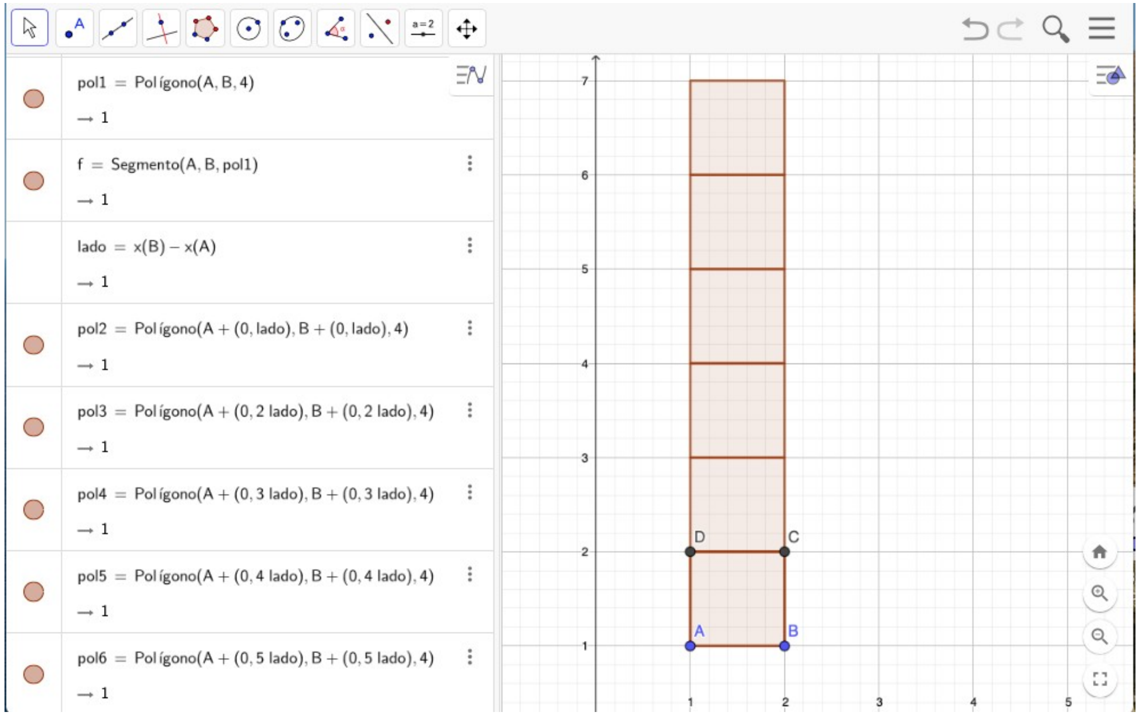
pol2 = Polígono(A+(0,lado),B+(0,lado),4)

pol3 = Polígono(A+(0,2 lado),B+(0,2 lado),4)

pol4 = Polígono(A+(0,3 lado),B+(0,3 lado),4)

pol5 = Polígono(A+(0,4 lado),B+(0,4 lado),4)

pol6 = Polígono(A+(0,5 lado),B+(0,5 lado),4)



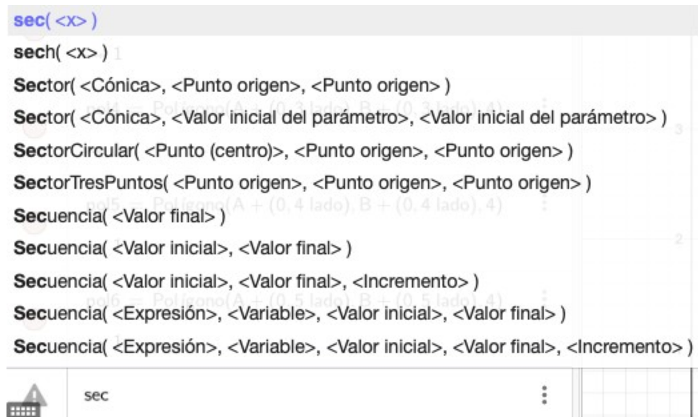
GeoGebra tiene un comando de “sucesiones”, el comando Secuencia.

Escribimos “sec” en la Entrada y elegimos la última opción :

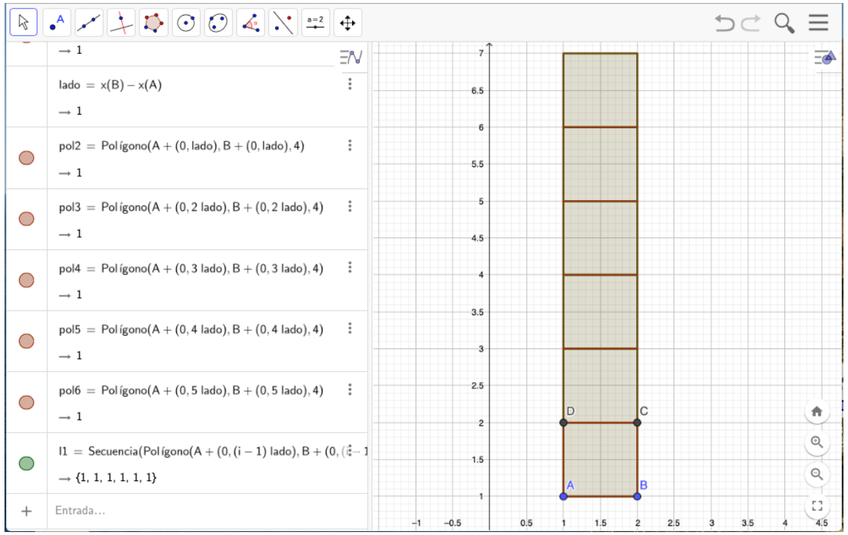
Secuencia(<Expresión>,<Variable>,<Valor inicial>,<Valor final>,<Incremento>)

La Variable “i” será nuestro contador, “deslizador” para Geogebra.

Valor inicial = 1, da i-1 = 0 Valor final = 6, da i-1 = 5



Con Incremento = 1, construimos término a término.



Falta la Expresión u Objeto, corresponde a los polígonos :

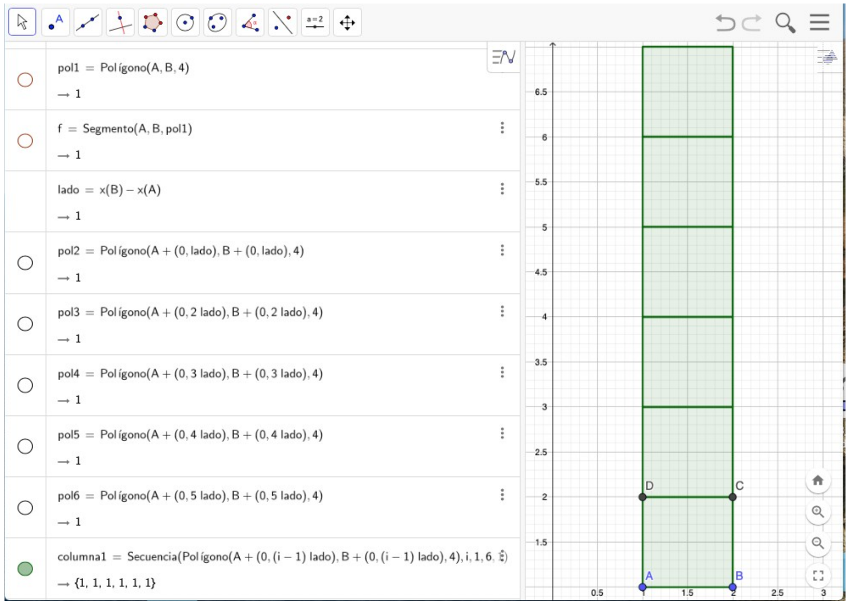
Polígono(A+(0,(i-1) lado),B+(0,(i-1) lado),4)

Escribimos en la Entrada de la Vista Algebraica :

Secuencia(Polígono(A+(0,(i-1) lado),B+(0,(i-1) lado),4),i,1,6,1)

¡Mucho cuidado!, es muy fácil equivocarse.

Geogebra superpone a los polígonos un único objeto, que llama l1.



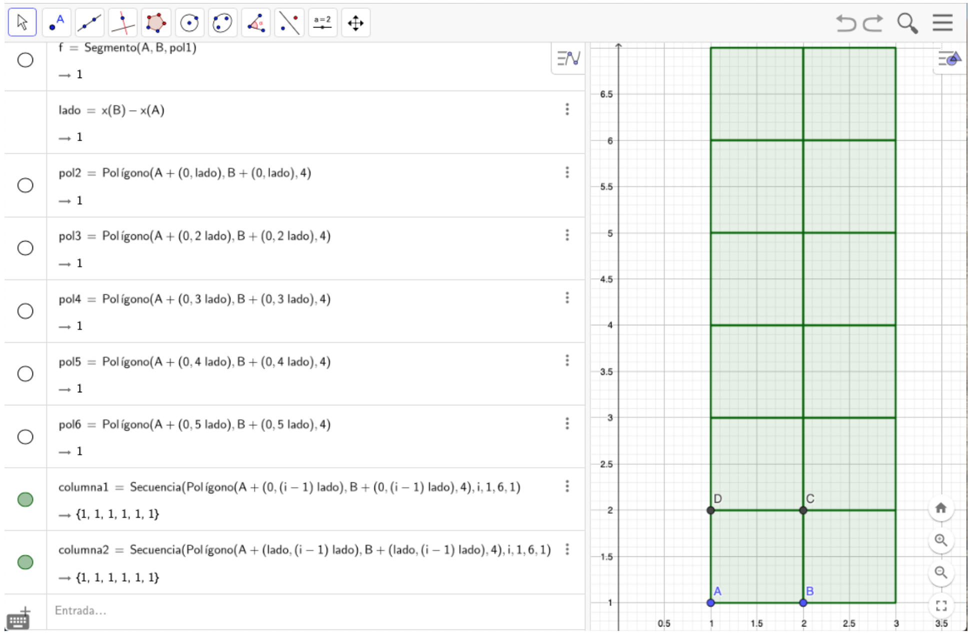
Este tipo de objetos lo denomina “lista”.

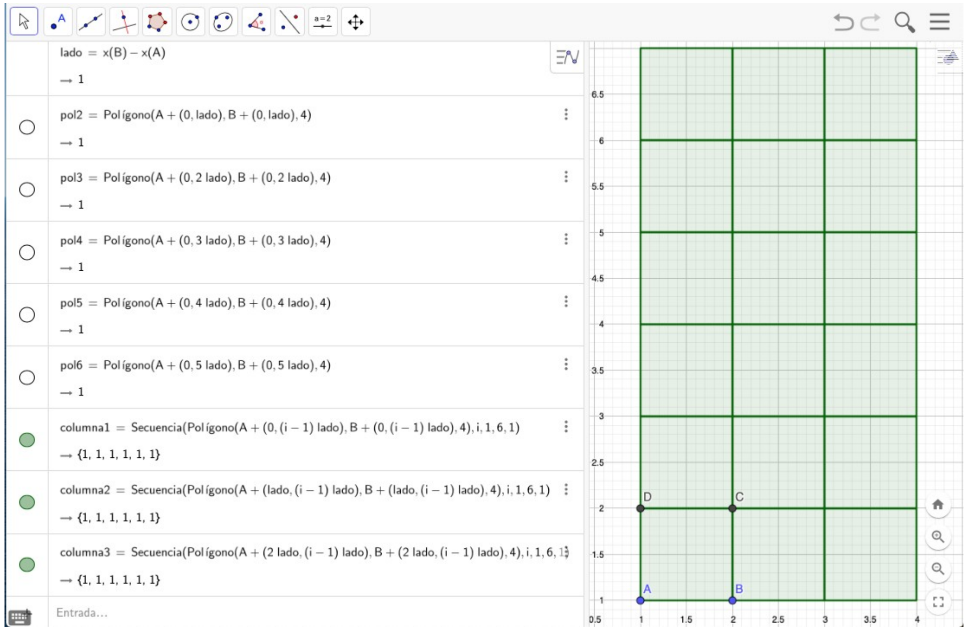
En nuestro caso renombramos “l1” como “columna1”.

A la derecha de cada polígono individual hay un punto de color.

Pulsando sobre ellos los polígonos no se muestran.

No los hemos borrado, sólo los hemos ocultado.





Siguiente pregunta : ¿Y las demás columnas?

Nuestros polígonos están definidos como :

Polígono(A+(0,(i-1) lado),B+(0,(i-1) lado),4)

La desplazamos un "lado" hacia la derecha,

modificando los vértices de la base de la columna

A+(lado,(i-1) lado) B+(lado,(i-1) lado)

Así obtenemos la columna2.

Columnas 3 y 4 :

A+(2 lado,(i-1) lado) B+(2 lado,(i-1) lado)

A+(3 lado,(i-1) lado) B+(3 lado,(i-1) lado)

En general para cualquier columna "j"

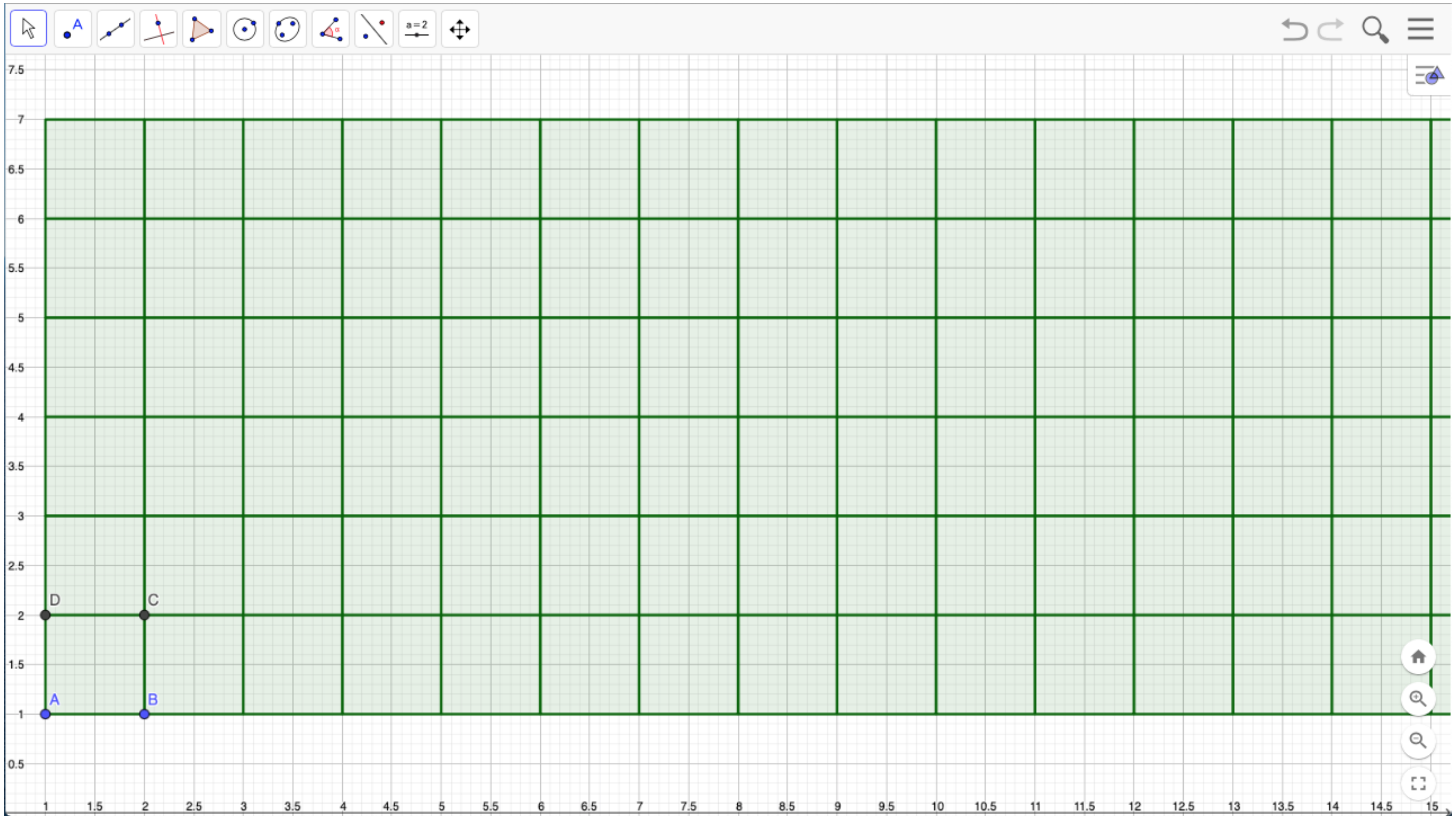
A+((j-1) lado,(i-1) lado) B+((j-1) lado,(i-1) lado)

¿Cómo construimos todas a la vez?

Puede que esto sobrepase la capacidad de muchos alumnos, al menos en un primer momento.

Para hacer nuestra rejilla *GeoGebra* nos permite hacer la Secuencia de una Secuencia :

rejilla = Secuencia(Secuencia(Polígono(A+((j-1) lado,(i-1) lado),B+((j-1) lado,(i-1) lado),4),i,1,6,1),j,1,20,1)



¿Cómo numeramos las casillas?

Utilizamos la estructura del comando secuencia que ya tenemos :

rejilla = Secuencia(Secuencia(Polígono(A+((j-1) lado,(i-1) lado),B+((j-1) lado,(i-1) lado),4),i,1,6,1),j,1,20,1)

Otra cosa = Secuencia(Secuencia(<Objeto>,i,1,6,1),j,1,20,1)

Ahora en vez de polígonos queremos textos colocados en una posición determinada.

Si escribís "Texto" en la ventana algebraica os dará varias posibilidades.

Nos interesa : Texto(Objeto,Punto origen)

El objeto son los números 6(j-1) + i

Y el punto origen corresponde a cada casilla: A+((j-1) lado,(i-1) lado)

Hasta aquí suelen llegar, aproximadamente, dos tercios de los alumnos de 3º de ESO.

Se "tapan" o "descubren" las casillas añadiendo los comandos "Si" (condicional) y "Resto".

Pero a esto último sólo llegan un tercio, habitualmente menos, de los alumnos de 3º de ESO.

¿Qué sentidos matemáticos hemos utilizado en esta actividad?

Principalmente nos hemos centrado en grandes ideas sobre el sentido numérico y el sentido algebraico.

Pero subyacen elementos de las grandes ideas sobre el sentido espacial y el sentido de la medida.

Gran idea sobre sentido numérico	Infantil	Primaria			ESO	Bachillerato
		1 y 2	3 y 4	5 y 6		
Conteo			Sí		Sí	
Cantidad						
Sentido de las operaciones			Sí		Sí	
Relaciones			Sí		Sí	Sí
Razonamiento proporcional						

Gran idea sobre sentido algebraico	Infantil	Primaria			ESO	Bachillerato
		1 y 2	3 y 4	5 y 6		
Patrones				Sí	Sí	Sí
Modelo matemático					Sí	Sí
Operadores						
Variable					Sí	
Igualdad y desigualdad						
Relaciones y funciones						

Esta actividad desarrolla el pensamiento algorítmico y computacional del alumnado en 3º ESO.

**Se puede realizar en Primaria o 1º de ESO construyendo en cada columna los polígonos uno a uno.
Y después construyendo cada columna una a una, utilizando la herramienta GeoGebra "Traslación"**

En 3° de ESO se puede construir la rejilla a partir de un único cuadrado, utilizando diferentes combinaciones de movimientos en el plano.

Es muy interesante y resulta mucho más sencillo para el alumnado.

También estaríamos desarrollando el pensamiento algorítmico computacional pero de otra manera.

Gran idea sobre sentido de la medida	Infantil	Primaria	ESO	Bachillerato
Magnitud				
Medición		Sí	Sí	
Estimación y relaciones				
Cambio				

Gran idea sobre sentido espacial	Infantil	Primaria	ESO	Bachillerato
Figuras geométricas de dos y tres dimensiones		Sí	Sí	
Localización y Sistemas de representación				
Movimientos y Transformaciones			Sí	
Visualización, razonamiento y modelización geométrica		Sí	Sí	

El sentido socio afectivo se trabaja al menos de tres formas:

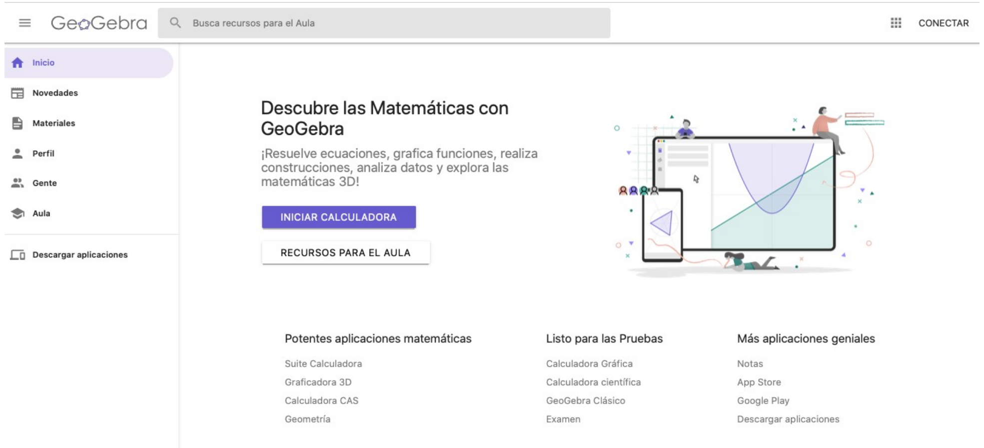
Primero, mediante la colaboración de todo el grupo para la construcción del mural "El gran chuletón".

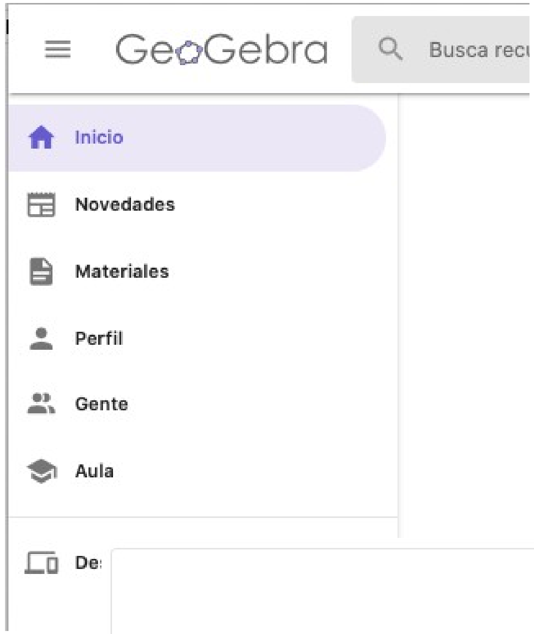
Segundo, facilitando al alumno la comprensión de conceptos matemáticos "tradicionalmente difíciles".

Tercero, potenciando su capacidad y su autonomía para crear objetos y modelos matemáticos válidos.

Tarea D1 : Construir la rejilla y la numeración descrita anteriormente

Para hacer la tarea pulsa en "Aula" (Clasroom) de la página de GeoGebra (https://www.geogebra.org)





Ingresa el código QCYF KMT4

Introduce tu usuario (guarda lo que hagas)

o tu nombre (cada vez que entras empiezas de nuevo)