

XII ESCUELA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA MIGUEL DE GUZMÁN

Descubriendo los sentidos de las Matemáticas

Sentido algebraico



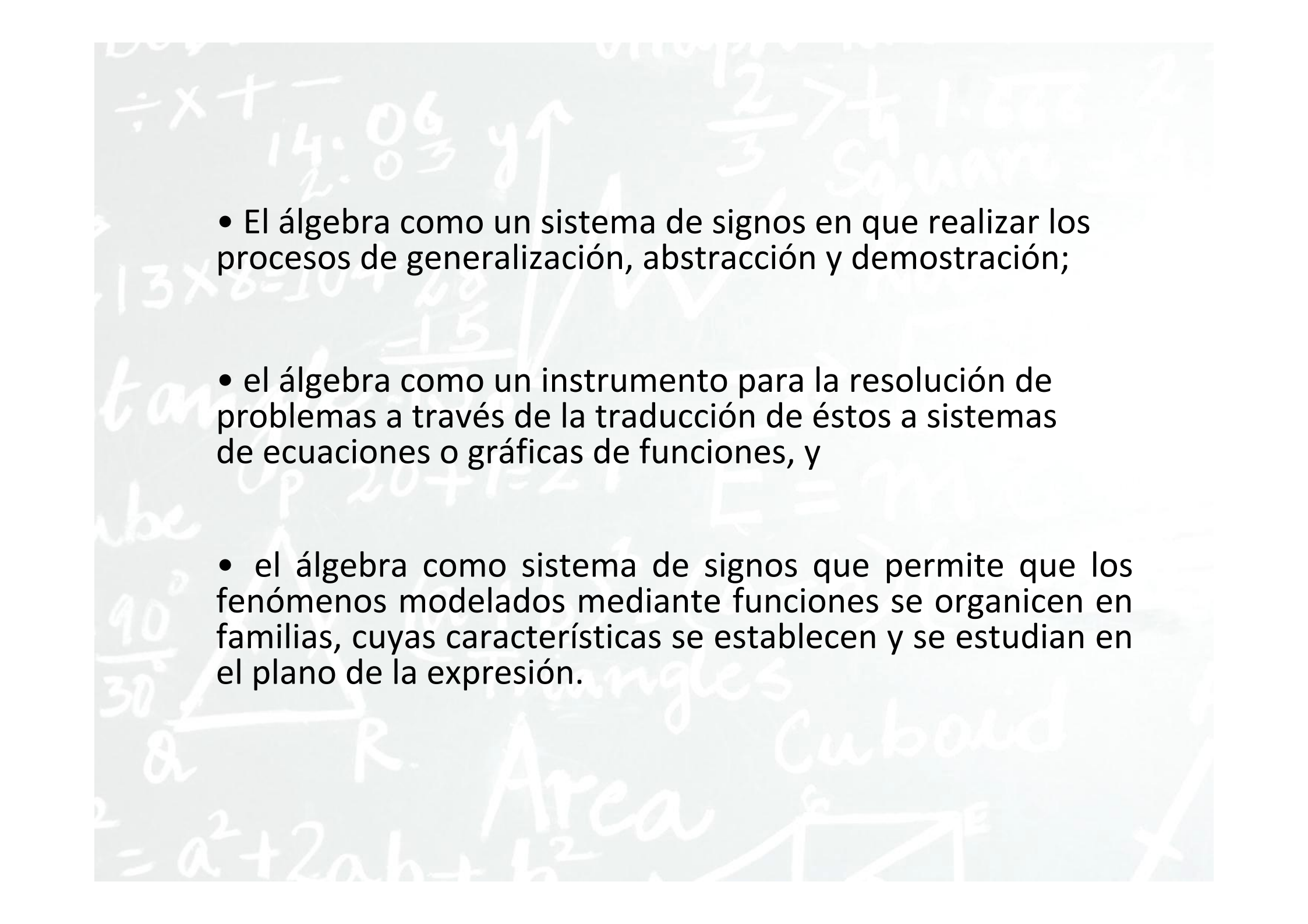
Federación
Española de
Sociedades de
Profesores de
Matemáticas

Onofre Monzó
Octubre de 2022

Álgebra

Stacey, K.; Carlson, D.; Drouhard, J.-P.; Fearnley-Sander, D.; Fujii, T.; Kieran, C.; Kissane, B.; Lins, R.; Rojano, T.; Puig, L.; Sutherland, R.; Hodgson, B. & Chick, H. (2000). Discussion Document for the Twelfth ICMI Study: The Future of the Teaching and Learning of Algebra. *Bulletin of the International Commission on Mathematical Instruction*, (48), pp. 6-13.

- El álgebra en el currículo de secundaria ha de presentarse, al menos, desde tres puntos de vista:

- 
- The background is a light blue chalkboard filled with various mathematical notations and diagrams. At the top left, there's a coordinate system with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. To the left of the y-axis, there are several mathematical expressions:
- $\div x + -$
- ,
- 14.06
- ,
- 2.03
- , and
- $13 \times 8 - 10 + 20$
- . To the right of the y-axis, there's a fraction
- $\frac{2}{3}$
- and the word "Square". Below the coordinate system, there's a large checkmark. In the middle left, the word "tan" is written. Below that, there's a small diagram of a right-angled triangle with angles
- 90°
- and
- 30°
- , and the letter "R" below it. In the middle right, there's an equation
- $E = 20$
- . At the bottom left, there's a formula
- $= a^2 + 2ab + b^2$
- . At the bottom center, the word "Area" is written. At the bottom right, there's a diagram of a 3D rectangular prism (cuboid) with vertices labeled G and E, and the word "Cuboid" written next to it. There are also some other faint markings and symbols scattered across the board.
- El álgebra como un sistema de signos en que realizar los procesos de generalización, abstracción y demostración;
 - el álgebra como un instrumento para la resolución de problemas a través de la traducción de éstos a sistemas de ecuaciones o gráficas de funciones, y
 - el álgebra como sistema de signos que permite que los fenómenos modelados mediante funciones se organicen en familias, cuyas características se establecen y se estudian en el plano de la expresión.

Grandes ideas

Una 'gran idea' se define como la declaración de una idea que es fundamental para el aprendizaje de las matemáticas, que vincula numerosos conocimientos matemáticos en un todo coherente.

Big Ideas and Understandings as the Foundation for Elementary and Middle School Mathematics

Randall I. Charles, Carmel, CA

https://jaymctighe.com/wp-content/uploads/2011/04/MATH-Big-Ideas_NCSM_Spr05v73p9-24.pdf

Contexto

- Para Freudenthal, “un contexto es ese dominio de la realidad el cual, en algún proceso de aprendizaje particular, es revelado al alumno en orden a ser matematizado” (1991, p. 73).

Sentido matemático

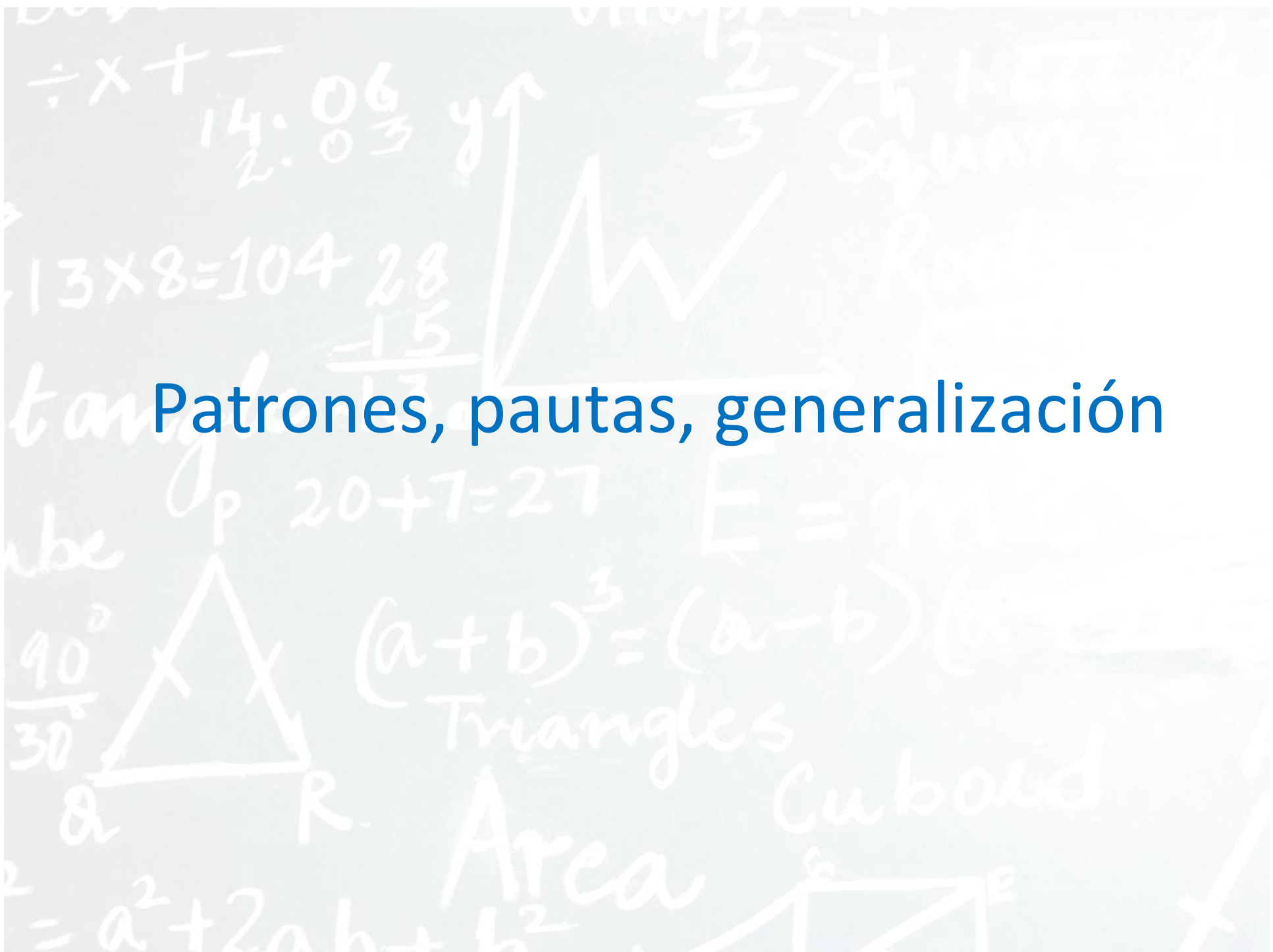
Conjunto de capacidades relacionadas con el dominio en contexto de contenidos numéricos y algebraicos, geométricos, métricos y estocásticos, que permiten emplear estos contenidos de una manera funcional y con confianza en las propias habilidades.

Sentido algebraico

- Generalización de patrones numéricos, geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas
- Resolución de problemas
- Situaciones funcionales
- Modelización de fenómenos físicos y matemáticos.

Gran idea sobre sentido algebraico	Infantil	Primaria			ESO	Bachillerato
		1 y 2	3 y 4	5 y 6		
Patrones						
Modelo matemático						
Operadores						
Variable						
Igualdad y desigualdad						
Relaciones y funciones						

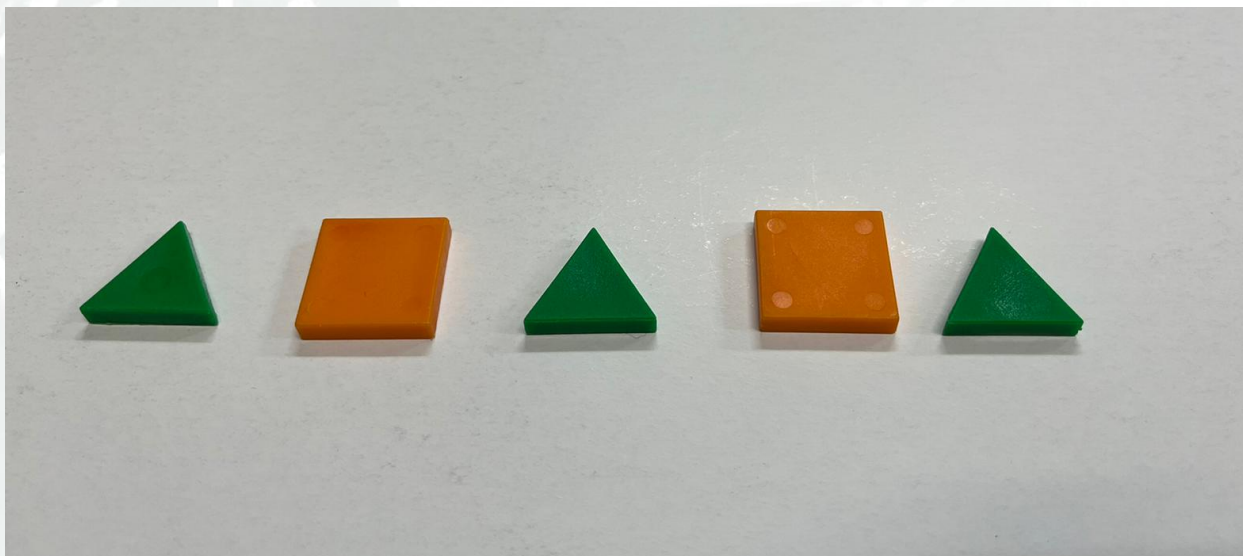
Patrones, pautas, generalización

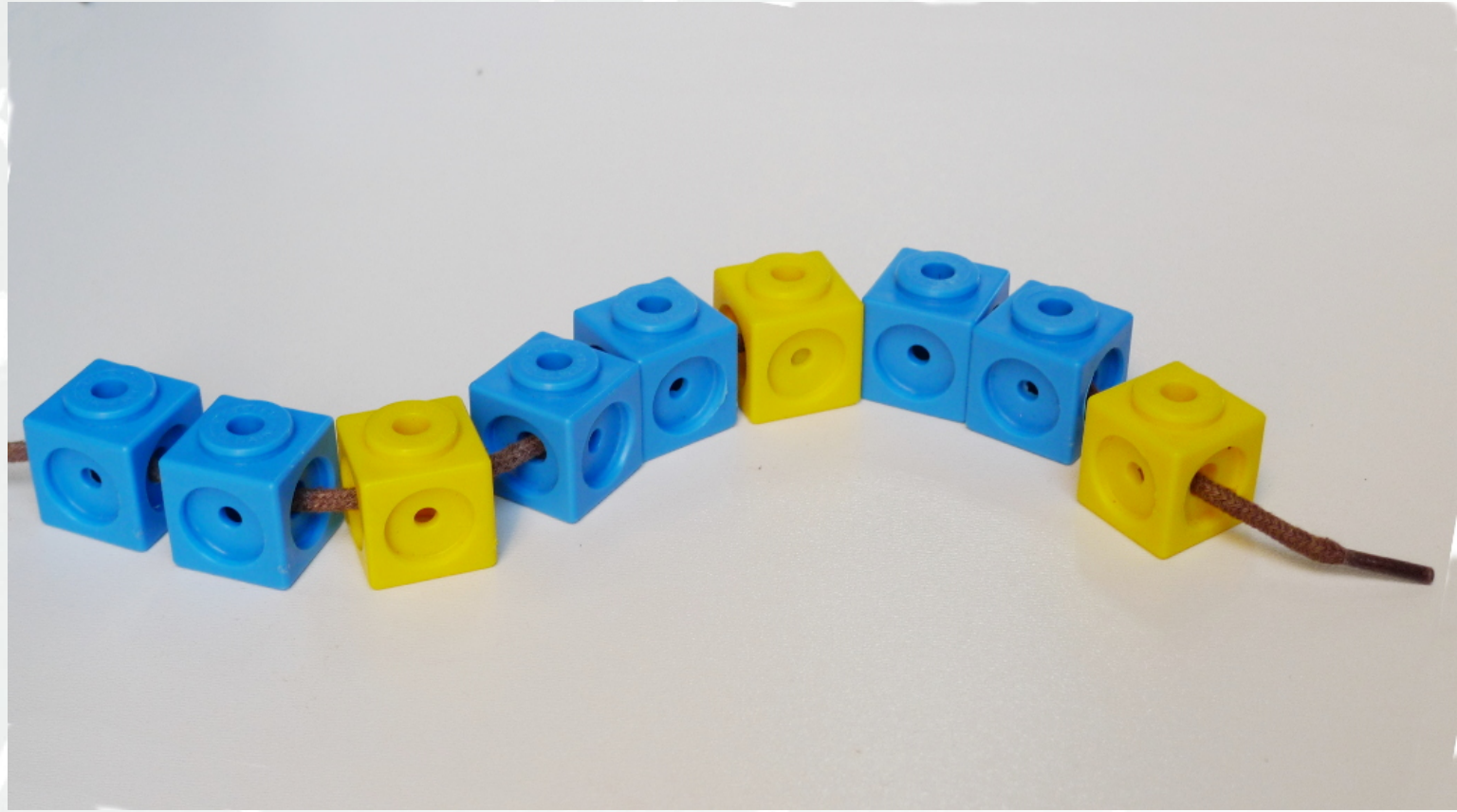


Infantil

- Identificar las características variantes e invariantes en una colección de objetos.
- Reconocer, describir y extender patrones, principalmente, de repetición.

¿Cómo sigue?





1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Contando de 3 en 3

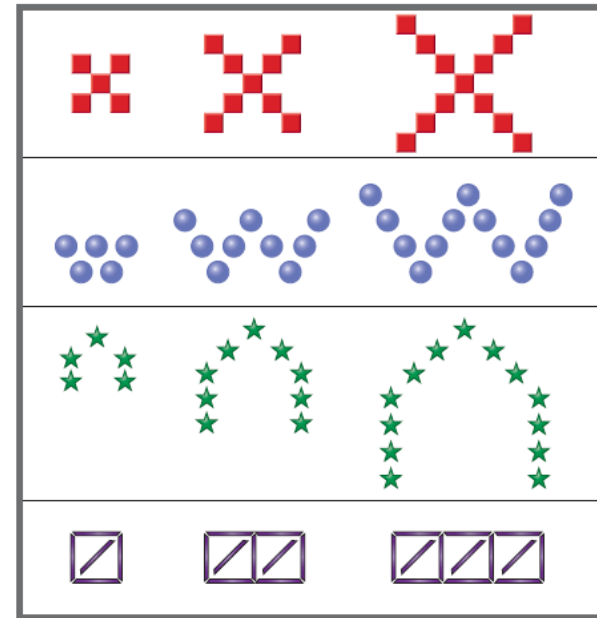
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Contando de 6 en 6

Primaria

- Identificar las características variantes e invariantes en una colección de objetos.
- Describir regularidades (entre ellas, las propiedades de las operaciones aritméticas) de manera generalizada con palabras, gráficos o tablas.

Cuatro progresiones de patrones comienzan como se muestra a continuación.



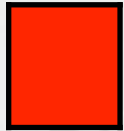
Los cuatro patrones son distintos.

1. ¿Qué tienen en común los cuatro patrones?

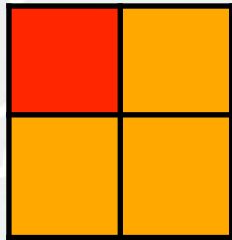
Puedes continuar la progresión de cada patrón tanto como desees.

2. ¿Cuántos cuadrados, puntos, estrellas o barras tendrá la figura que se encuentra en el lugar 100 de cada progresión?

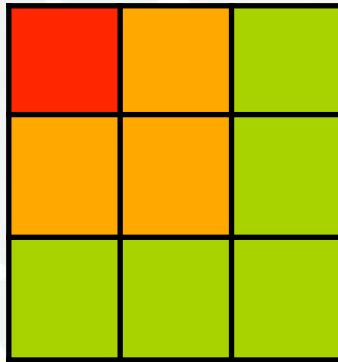
- Crear patrones.
- Extender regularidades determinando un elemento concreto de una sucesión (patrones de repetición, de crecimiento ...): el elemento siguiente, uno lejano, uno genérico ...



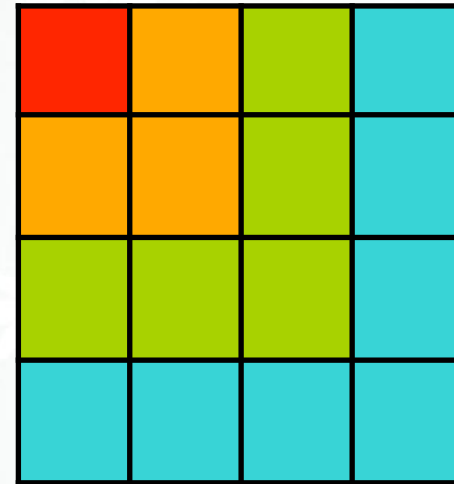
1



$1+3=4$



$1+3+5=9$

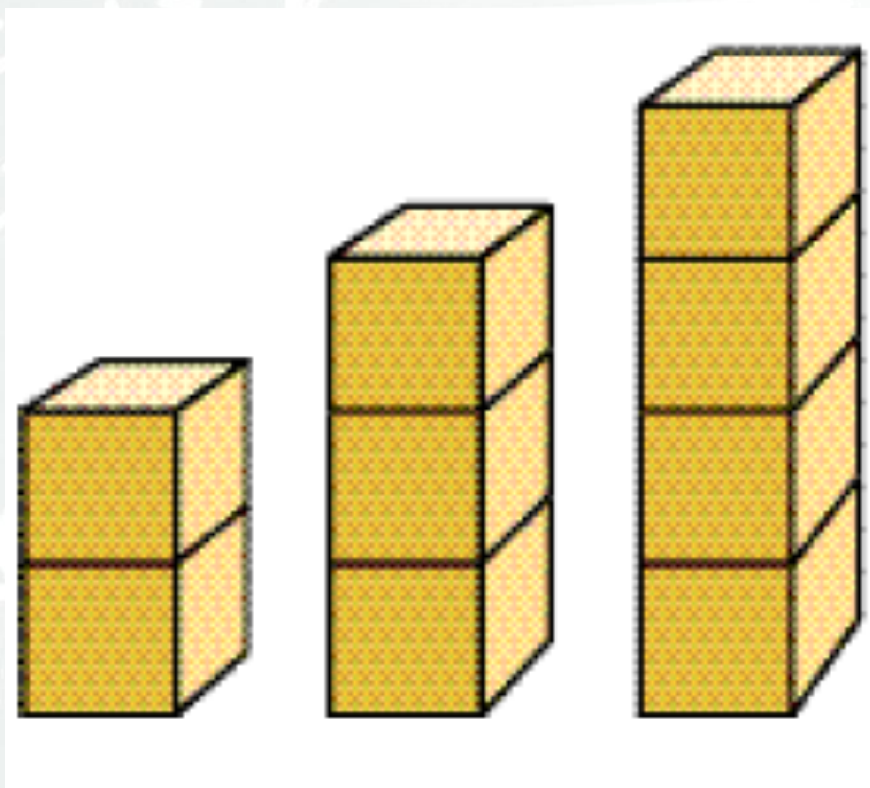


$1+3+5+7=16$

¿Cómo sigue la serie?

¿Cuál es el área de cada torre de cubos (incluida a base)?

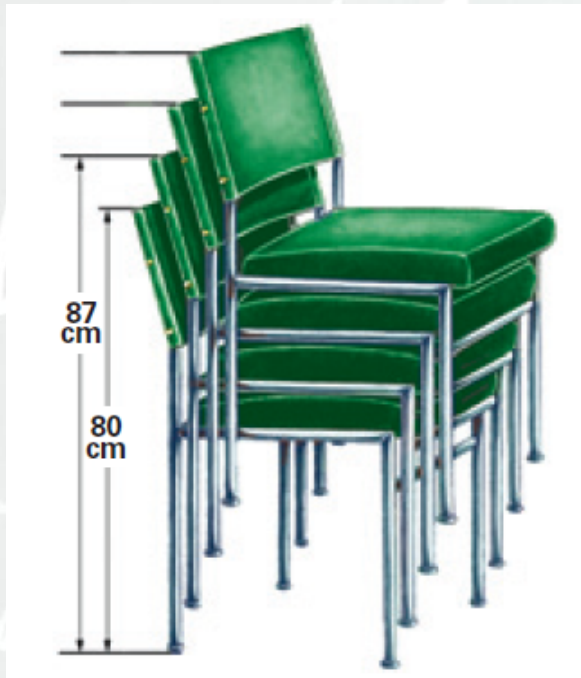
A medida que las torres se hacen más altas,
¿cómo cambia el área?



ESO

- Representar, analizar, y generalizar una variedad de patrones con tablas, gráficas, palabras y, cuando sea posible, con reglas simbólicas.

Esta imagen muestra una pila de sillas. Observa que la altura de una silla es 80 cm y una pila de dos sillas tiene 87 cm de altura.



Damián sugiere que la siguiente cadena de flechas puede usarse para encontrar la altura de una pila de estas sillas.

número de sillas $\xrightarrow{-1}$ $\xrightarrow{\times 7}$ $\xrightarrow{+ 80}$ altura

Explica el significado de cada uno de los números en la cadena de flechas.

Alba piensa que una cadena de flechas diferente también puede resolver el problema.

número de sillas $\xrightarrow{\times}$ $\xrightarrow{+}$ altura

¿Qué números debería usar Alba en su cadena de flechas?
Explica tu respuesta.

Coches

Una empresa A de alquiler de automóviles nos cobra por alquilar un turismo una cantidad fija de 120 euros más una cuota de 60 euros por cada día alquilado.

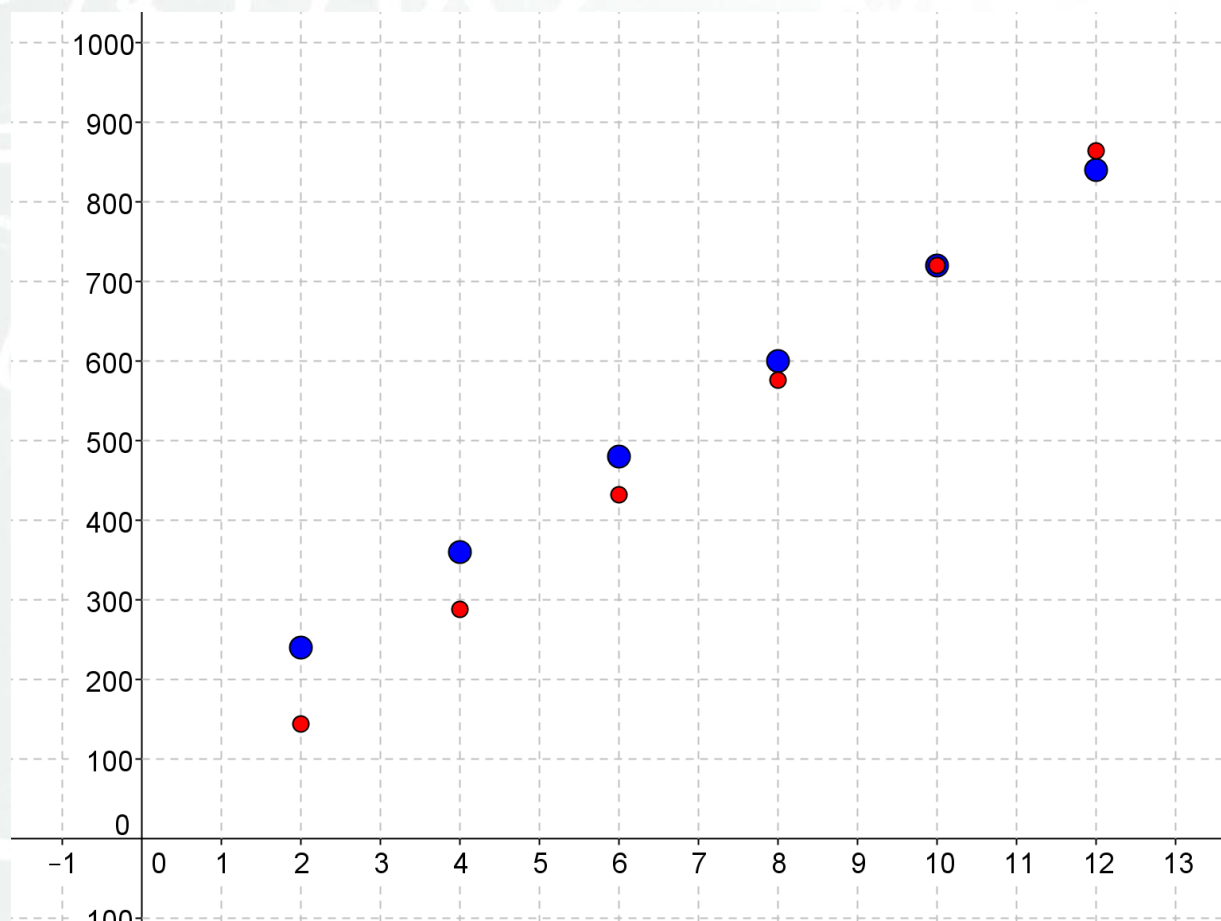
Otra empresa B nos cobra únicamente una cuota de 72 euros por día.

a) Si alquilamos un coche para tres días, ¿qué empresa sería más rentable?

b) ¿En qué caso las dos empresas nos cobrarán lo mismo? ¿Cuánto nos cobrarán?

c) Realiza una gráfica de las dos empresas donde se vea el punto obtenido en el apartado anterior.

Días	2	4	6	8	10	12
€ A	240	360	480	600	720	840
€ B	144	288	432	576	720	864



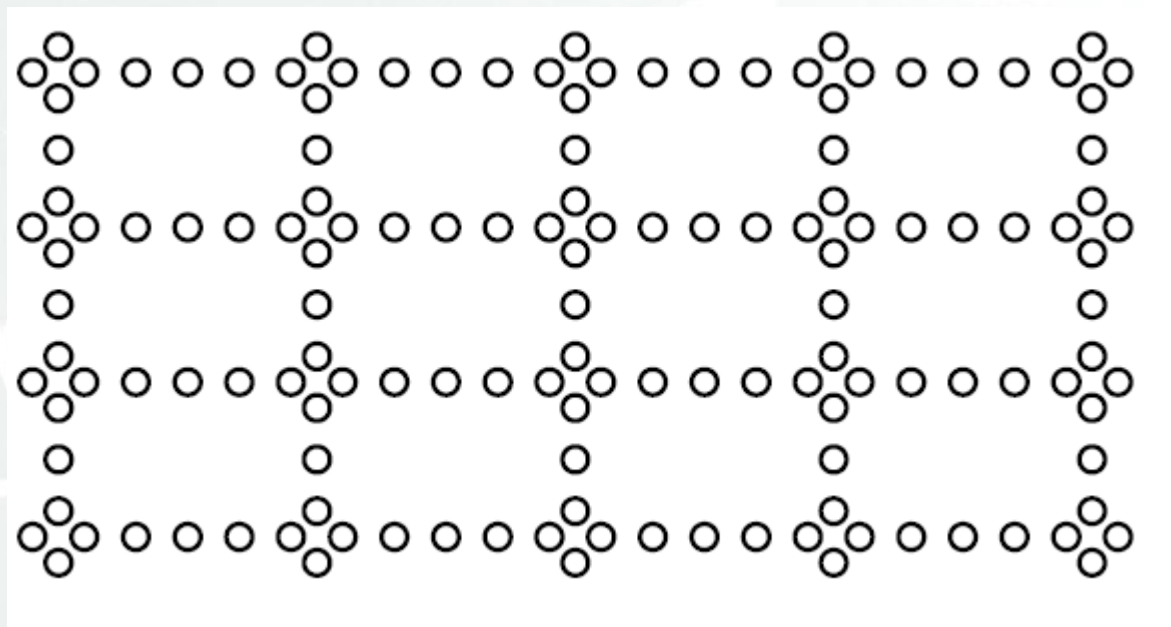
Bachillerato

- Generalizar patrones que surgen en situaciones diversas, usando funciones definidas explícita y recurrentemente.

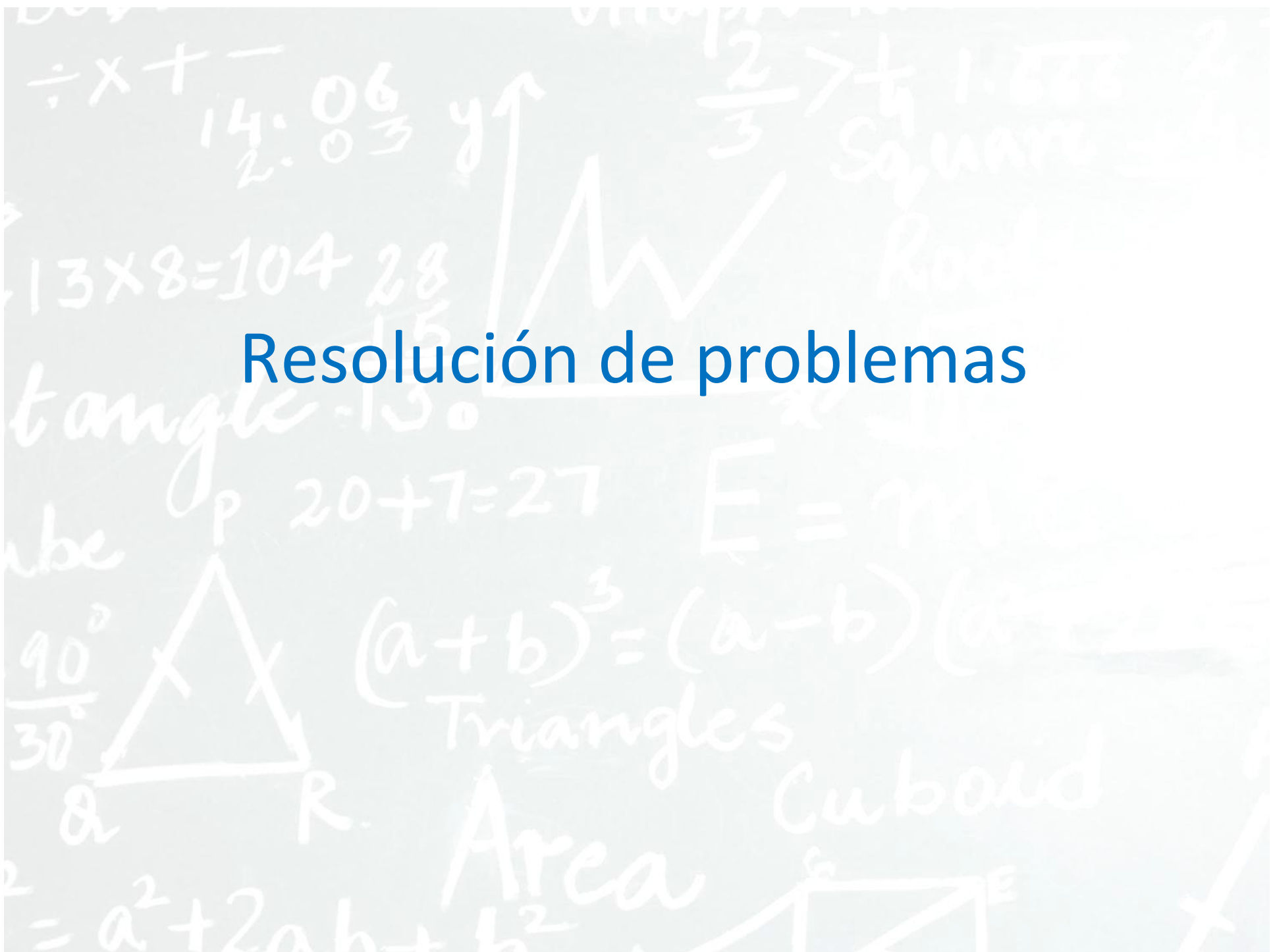
Sellos

La imagen representa un bloque de sellos.

¿Cuántos orificios tendrá un bloque de sellos cualquiera?



Resolución de problemas



Juan y María

Juan y María son hermanos. Juan compra 3 lápices de 0,5 € y María 2 cuadernos de 1€. Pagan con un billete de 5€. ¿Cuánto les devuelven?

La educadora

Una educadora tiene 120 bombones y 192 caramelos que va a repartir entre los alumnos de su clase. Si cada alumno recibe 3 caramelos más que bombones. ¿Cuántos son los alumnos?

La resolución aritmética de este problema necesita recurrir a cantidades no presentes en el enunciado explícitamente.

¿Existen problemas aritméticos y problemas algebraicos?

Es evidente que existen problemas que podemos resolver tanto de manera aritmética como algebraica. Veamos un ejemplo:

Las ovejas

En una granja hay 180 ovejas en dos corrales. Si sabemos que en uno de ellos hay 30 ovejas más que en el otro, ¿cuántas ovejas hay en cada corral?

Pero, ¿existen problemas exclusivamente algebraicos?

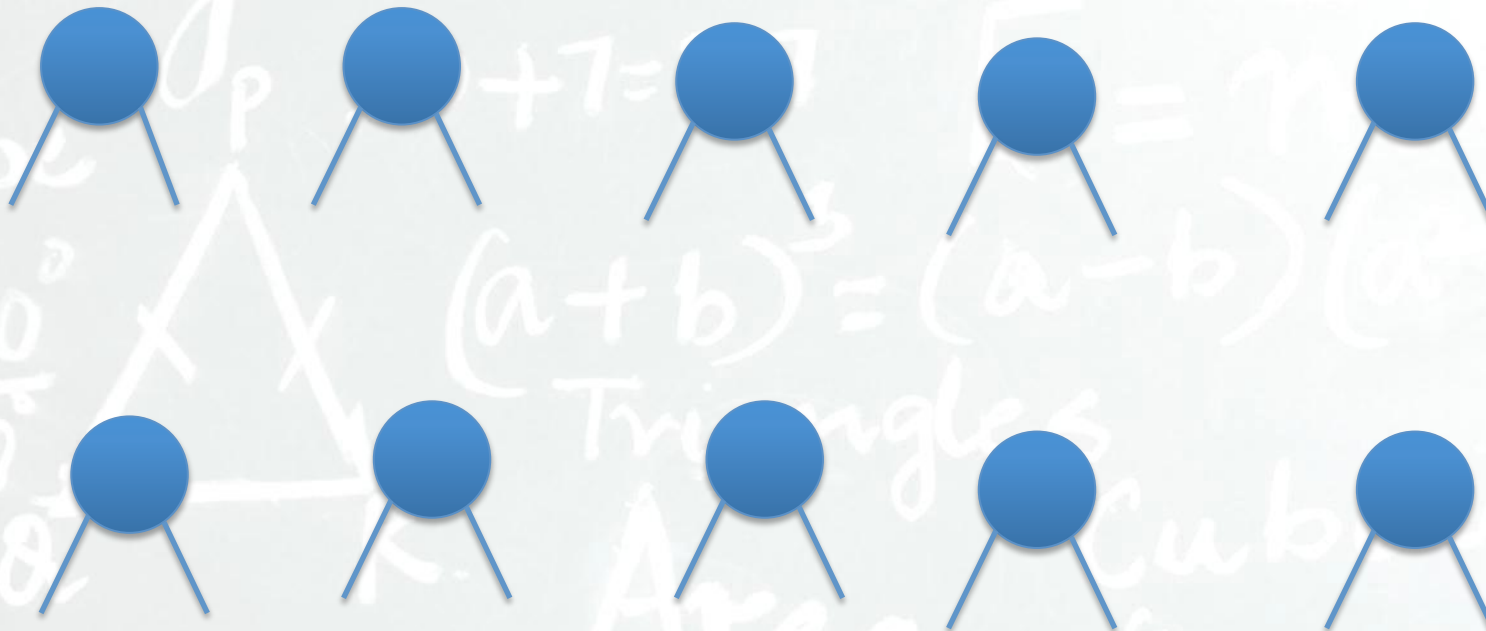
- La resolución de un problema tiene dos protagonistas: el problema y el resolutor.
- La manera de resolver un problema estará influida por sus características y por el conocimiento del que puede disponer el resolutor.
- Por ejemplo, podríamos pensar que el problema *Conejos y gallinas* es típicamente algebraico; sin embargo, podemos encontrar una resolución aritmética.

Conejos y gallinas

En una granja, entre gallinas y conejos hay 10 cabezas y 26 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en la granja?

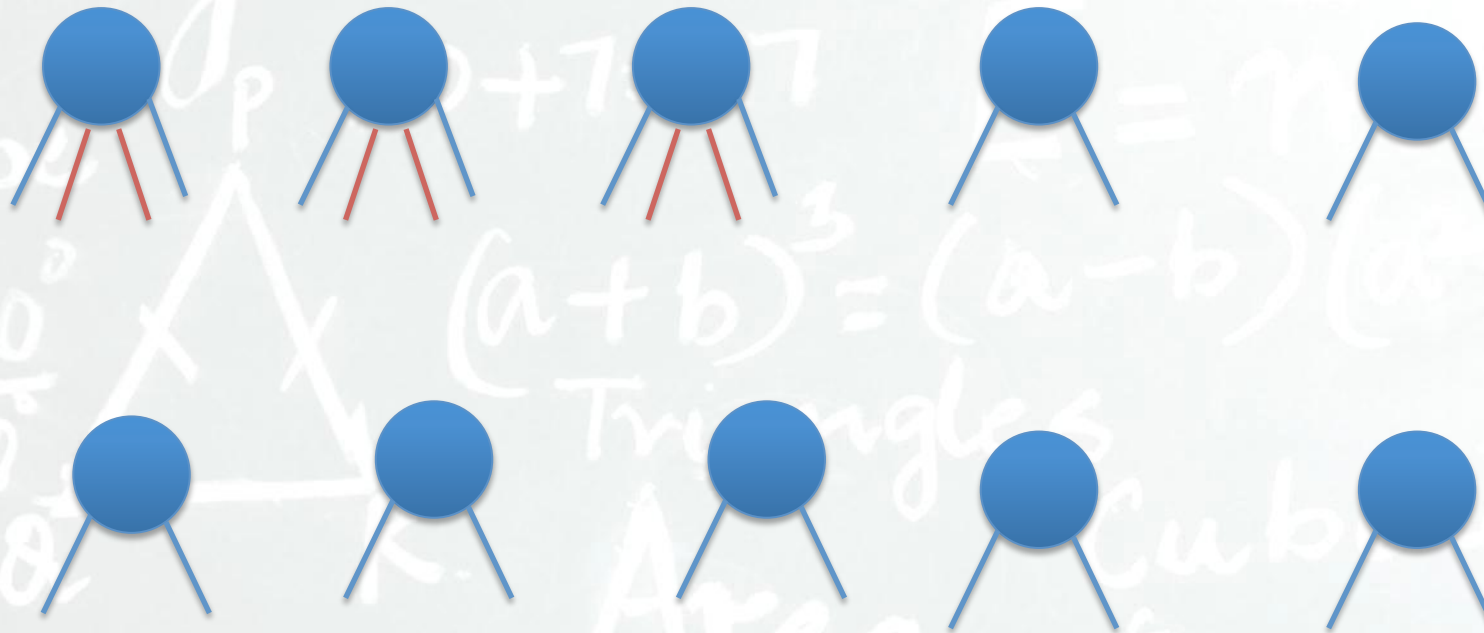
Conejos y gallinas

En una granja, entre gallinas y conejos hay 10 cabezas y 26 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en la granja?

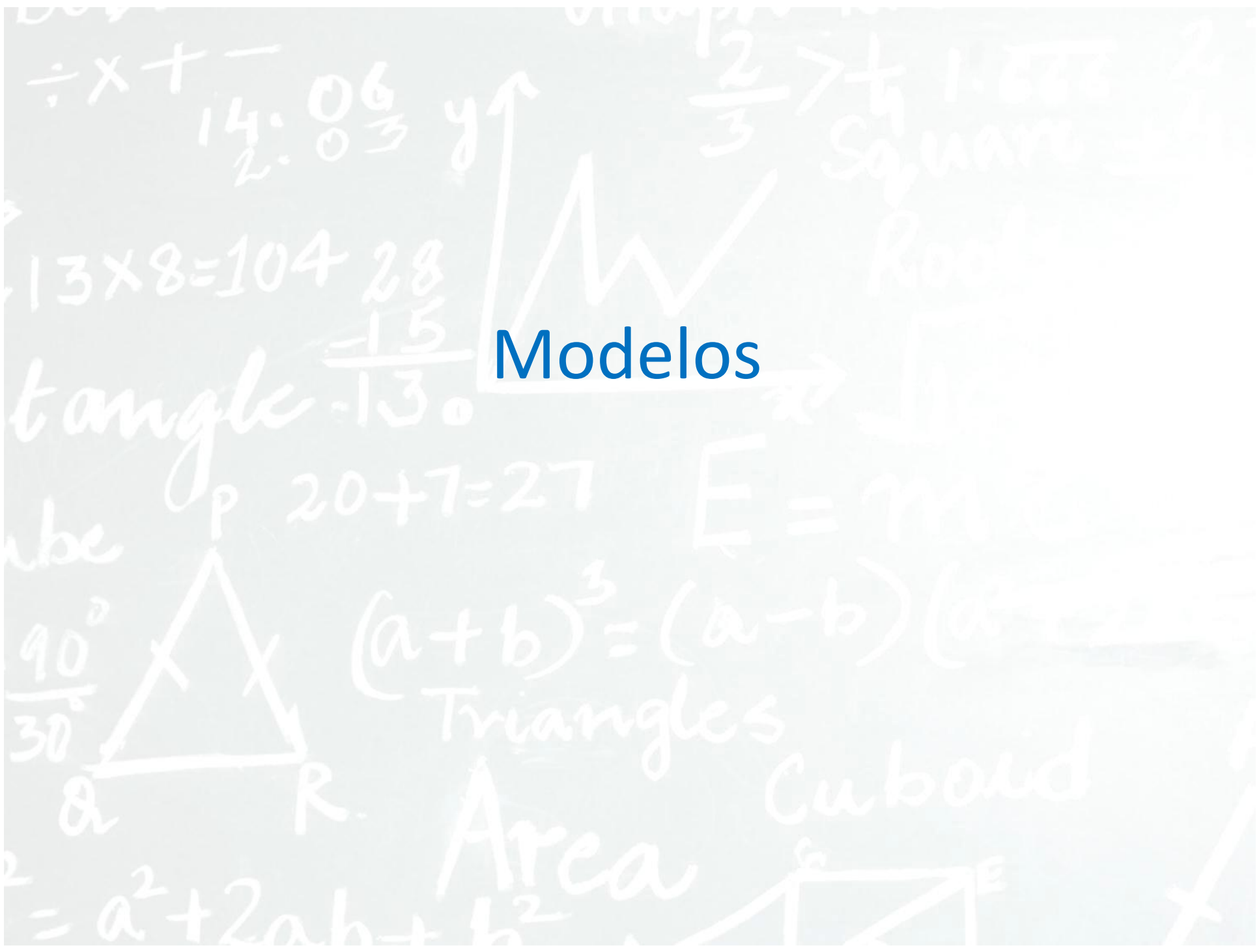


Conejos y gallinas

En una granja, entre gallinas y conejos hay 10 cabezas y 26 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en la granja?



Modelos



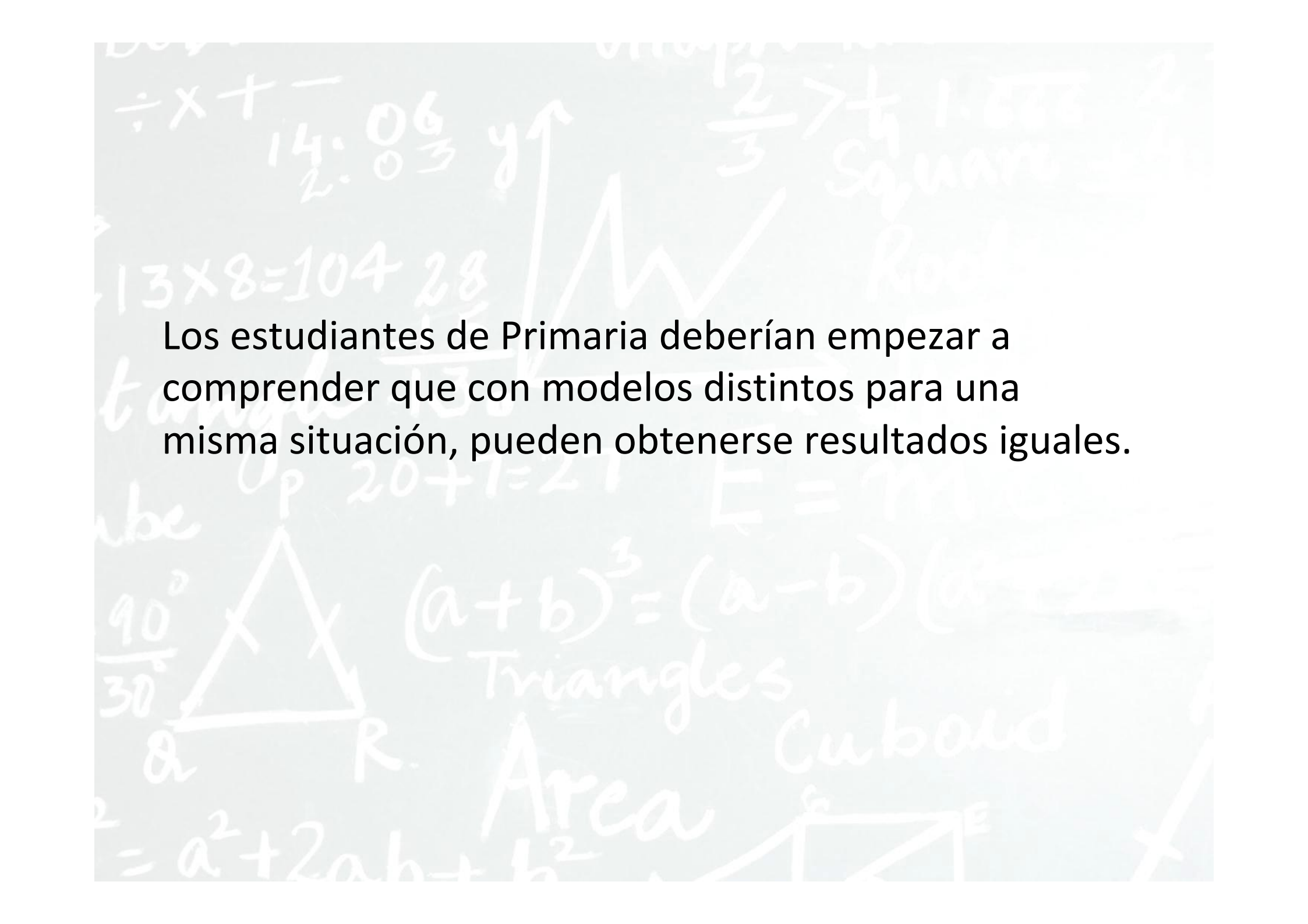
Infantil

Hay seis asientos entre sillas y taburetes. Las sillas tienen cuatro patas y los taburetes tres. En total, hay veinte patas. ¿Cuántas sillas y cuántos taburetes hay?

Primaria

En esta etapa, puede modelizarse una variedad de situaciones, incluyendo patrones geométricos, situaciones del mundo real y experimentos científicos. Algunas veces, los alumnos usarán su modelo para predecir cuál ha de ser el próximo elemento en un patrón, como en el caso visto de la descripción del área de un cuadrado conocida la del cuadrado anterior

En otras, serán capaces de hacer un enunciado general sobre cómo se relaciona una variable con otra: Si un bocadillo cuesta 3€, se puede calcular cuánto cuesta un número cualquiera de bocadillos multiplicando este número por 3 (dos bocadillos cuestan 6€, tres cuestan 9€, etc.). En este caso, los alumnos han desarrollado un modelo de relación proporcional: el valor de una variable (costo total, C) es siempre el triple del valor de la otra (número de bocadillos, B), o $C = 3 \times B$.

The background is a chalkboard filled with various mathematical notations and diagrams. It includes algebraic expressions like $\div x + -$, 14.06 , 2.03 , $\frac{2}{3}$, $13 \times 8 = 104$, 28 , $20 + 1 = 21$, $(a+b)^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, and $= a^2 + 2ab + b^2$. There are also geometric diagrams: a triangle with angles 90° and 30° , a square with vertices G and E , and a jagged line graph with a vertical y -axis. The word "Area" is written in large letters, and "Cuboid" is also visible. The overall theme is mathematics and geometry.

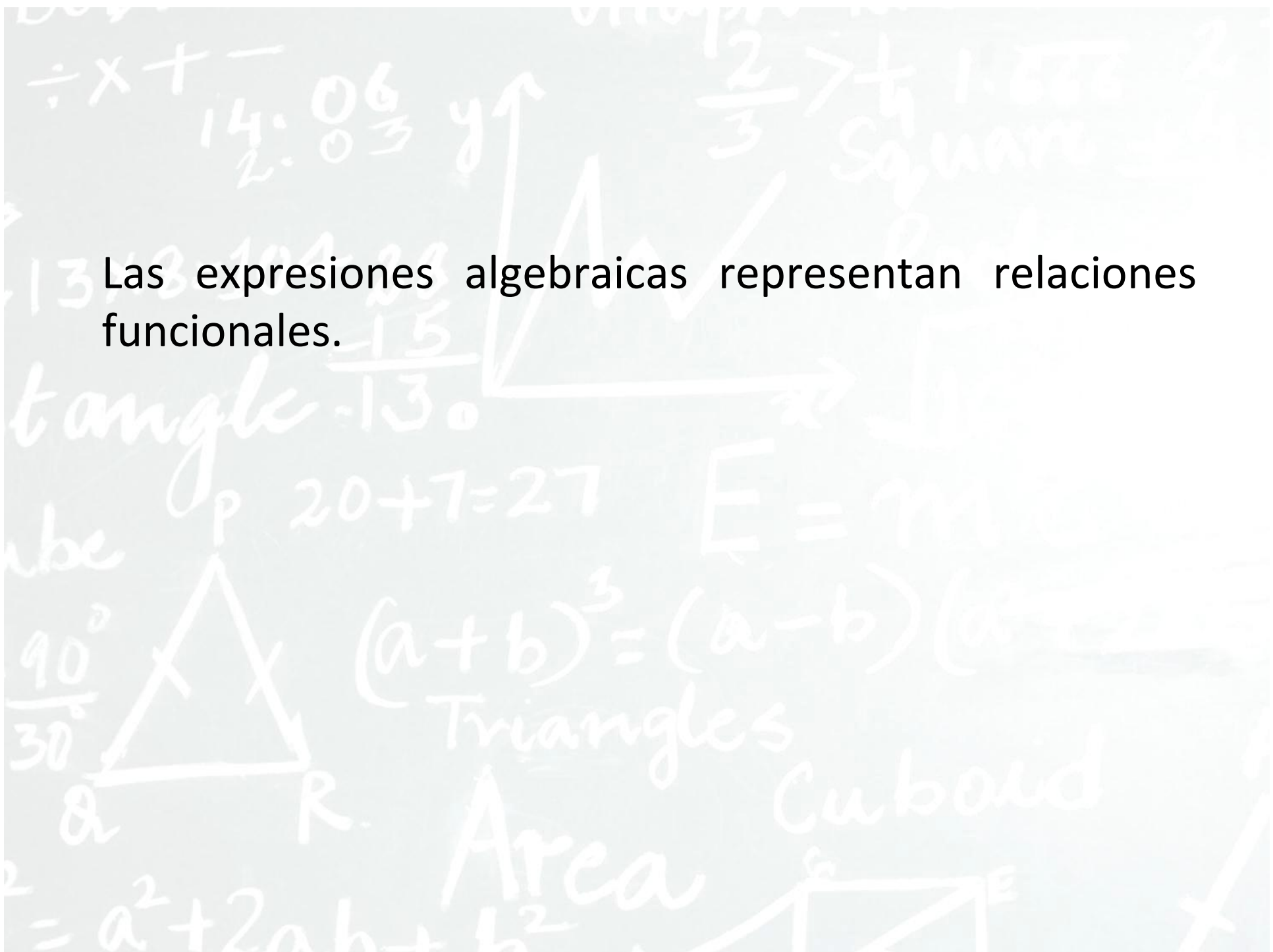
Los estudiantes de Primaria deberían empezar a comprender que con modelos distintos para una misma situación, pueden obtenerse resultados iguales.

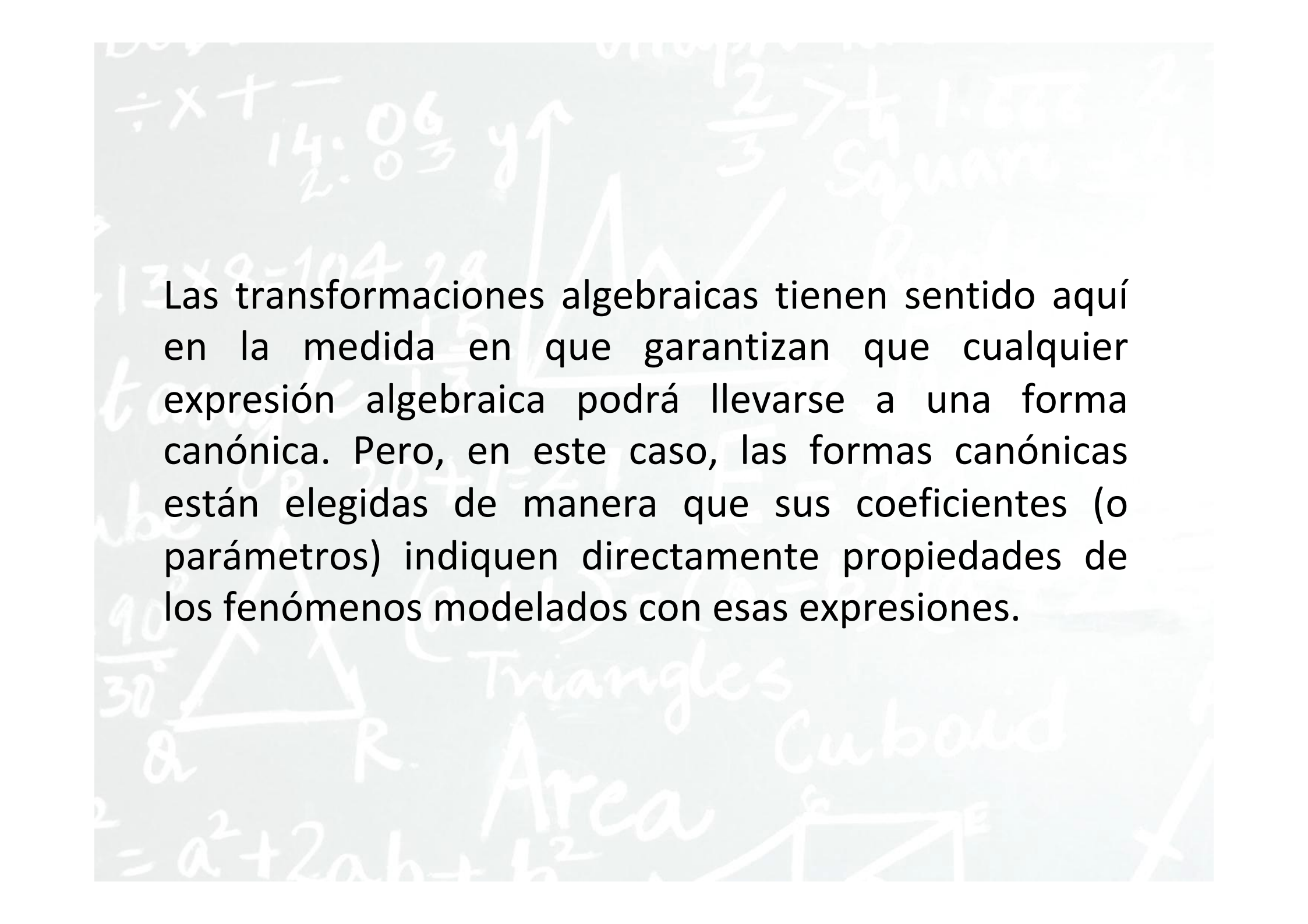
ESO-Bachillerato

Un objetivo principal en Secundaria es que los alumnos adquieran destreza en el uso de patrones y funciones para representar, modelizar y analizar fenómenos y relaciones en problemas de matemáticas o en el mundo real.

- Familias de funciones
- La fuente
- El bote de la pelota

Las expresiones algebraicas representan relaciones funcionales.



The background is a light blue-grey color with various mathematical notations and diagrams in a white, handwritten style. At the top left, there's a division symbol followed by 'x' and a minus sign. Below it, a decimal number '14.06' over '2.03' is written next to a 'y' with an upward-pointing arrow. To the right, there's a fraction '2/3' followed by a plus sign and '1.55'. Further down, there's a large triangle with a checkmark next to it. Below the triangle, the word 'Triangles' is written. To the left of the triangle, there's a right-angled triangle with angles '90°' and '30°' labeled. Below that, the letter 'R' is written. At the bottom left, there's a formula 'a^2 + 2ab + b^2'. At the bottom right, there's a diagram of a cube with vertices labeled 'G' and 'E', and the word 'Cuboid' written next to it.

Las transformaciones algebraicas tienen sentido aquí en la medida en que garantizan que cualquier expresión algebraica podrá llevarse a una forma canónica. Pero, en este caso, las formas canónicas están elegidas de manera que sus coeficientes (o parámetros) indiquen directamente propiedades de los fenómenos modelados con esas expresiones.

Rectángulos isoperimétricos

Considera rectángulos con un área fija de 36 unidades cuadradas. El ancho (A) de los rectángulos varía respecto al largo según la fórmula $A = 36 / L$. Haz una tabla que contenga los anchos correspondientes a todos los largos posibles que sean números naturales, hasta el 36 inclusive.

L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	36	18	12	9	7,2	6	5,143	4,5	4	3,6	3,273	3	2,769	2,571	2,4	2,25	2,118	2
L	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
A	1,895	1,8	1,714	1,636	1,565	1,5	1,44	1,385	1,333	1,286	1,241	1,2	1,161	1,125	1,091	1,059	1,029	1

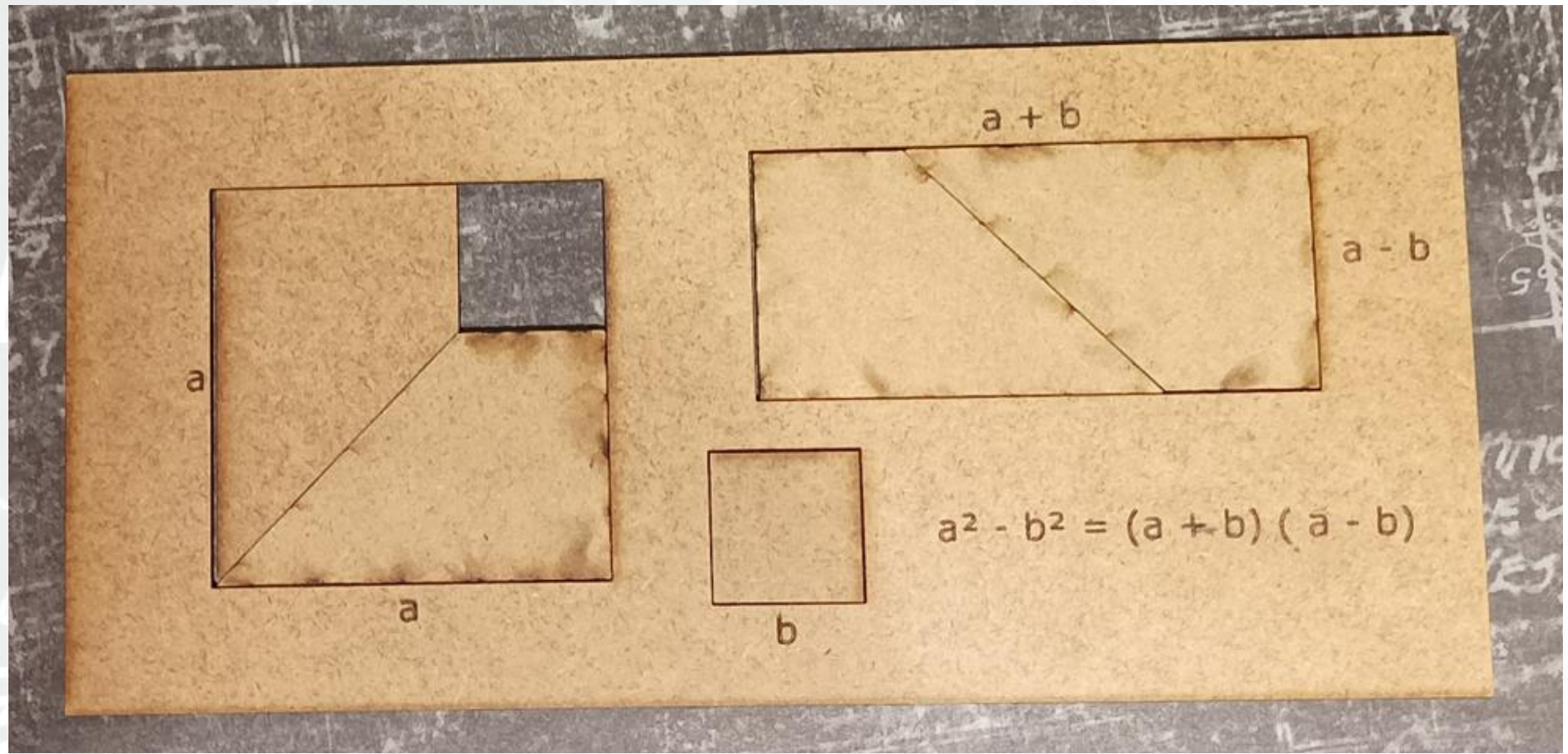
Mira la tabla y examina el patrón de la diferencia entre entradas consecutivas del largo y del ancho. Cuando el largo aumenta en 1, el ancho disminuye, pero no de forma constante.

¿Cómo crees que será la gráfica de la relación entre L y A ?

¿Será una línea recta?

Di por qué o por qué no.

$\div x + -$
 14.06
 2.03 $y \uparrow$
 $\frac{2}{3} > \frac{1}{4}$ 1.666
Sawara



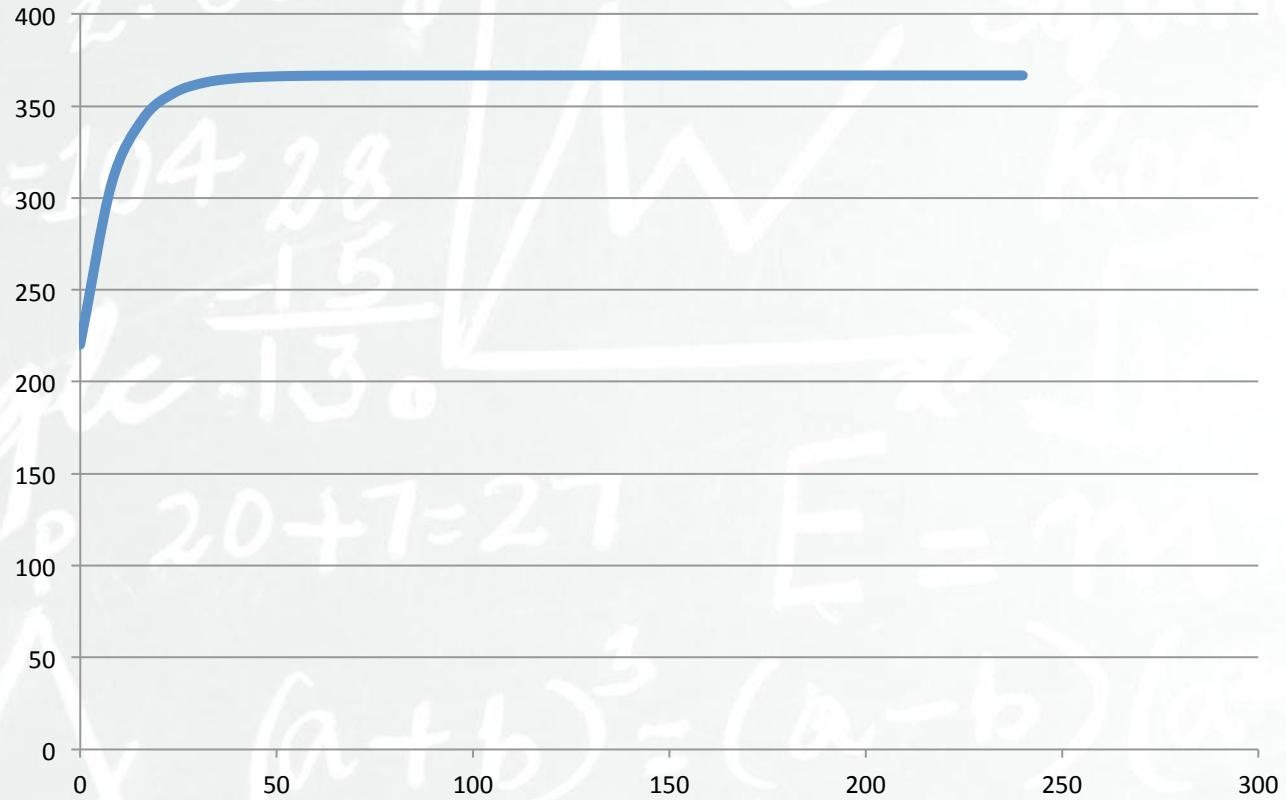
a R. Area Cuboid
 $= a^2 + 2ab + b^2$

Una alumna se golpeó en una rodilla jugando al voleibol y su médico prescribió un antiinflamatorio para reducir la hinchazón. Tenía que tomar 2 comprimidos de 110 miligramos, cada uno, cada 8 horas durante 10 días. Si sus riñones filtraban un 60% del medicamento de su cuerpo, cada 8 horas, ¿qué cantidad quedaba en su sistema circulatorio al cabo de los 10 días? ¿Y si hubiera tomado la medicina durante un año?

Horas	mg
0	220
8	308
16	343,2
24	357,28
32	362,912
40	365,1648
48	366,06592
56	366,426368
64	366,5705472
72	366,6282189
80	366,6512876
88	366,660515
96	366,664206
104	366,6656824
112	366,666273
120	366,6665092

Horas	mg
128	366,6666037
136	366,6666415
144	366,6666566
152	366,6666626
160	366,6666651
168	366,666666
176	366,6666664
184	366,6666666
192	366,6666666
200	366,6666667
208	366,6666667
216	366,6666667
224	366,6666667
232	366,6666667
240	366,6666667

mg



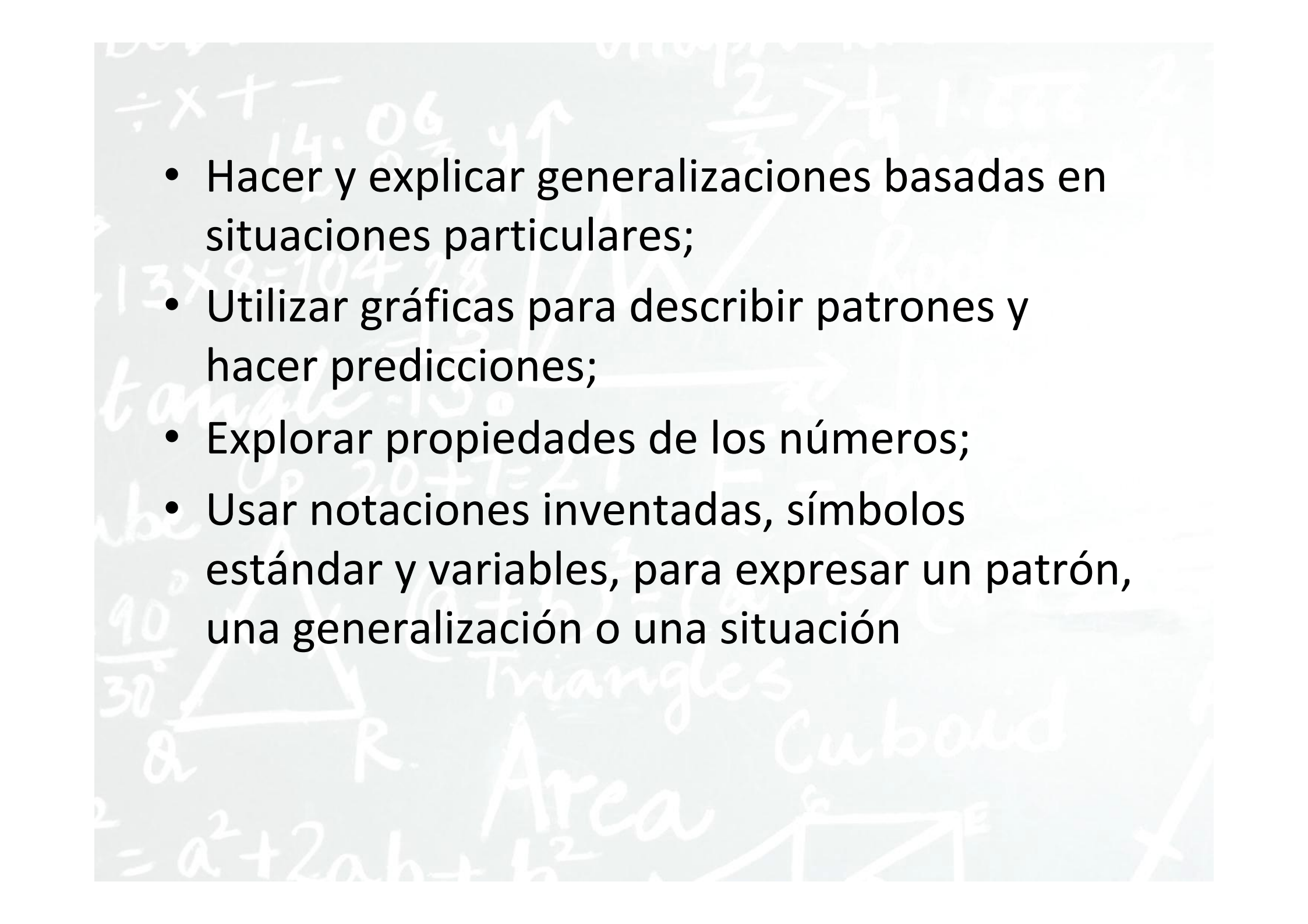
Horas (h)	mg en sangre
0	220
8	$220 \cdot 0,4 + 220$
16	$220 \cdot 0,4^2 + 220 \cdot 0,4 + 220$
...	
h	$220 \cdot 0,4^{h/8} + \dots + 220 \cdot 0,4 + 220$

$$f(h) = 220(1 - 0,4^{h/8} + 1 / 1 - 0,4) = 366,6(1 - 0,4^{h/8} + 1)$$

Se debería prestar más atención

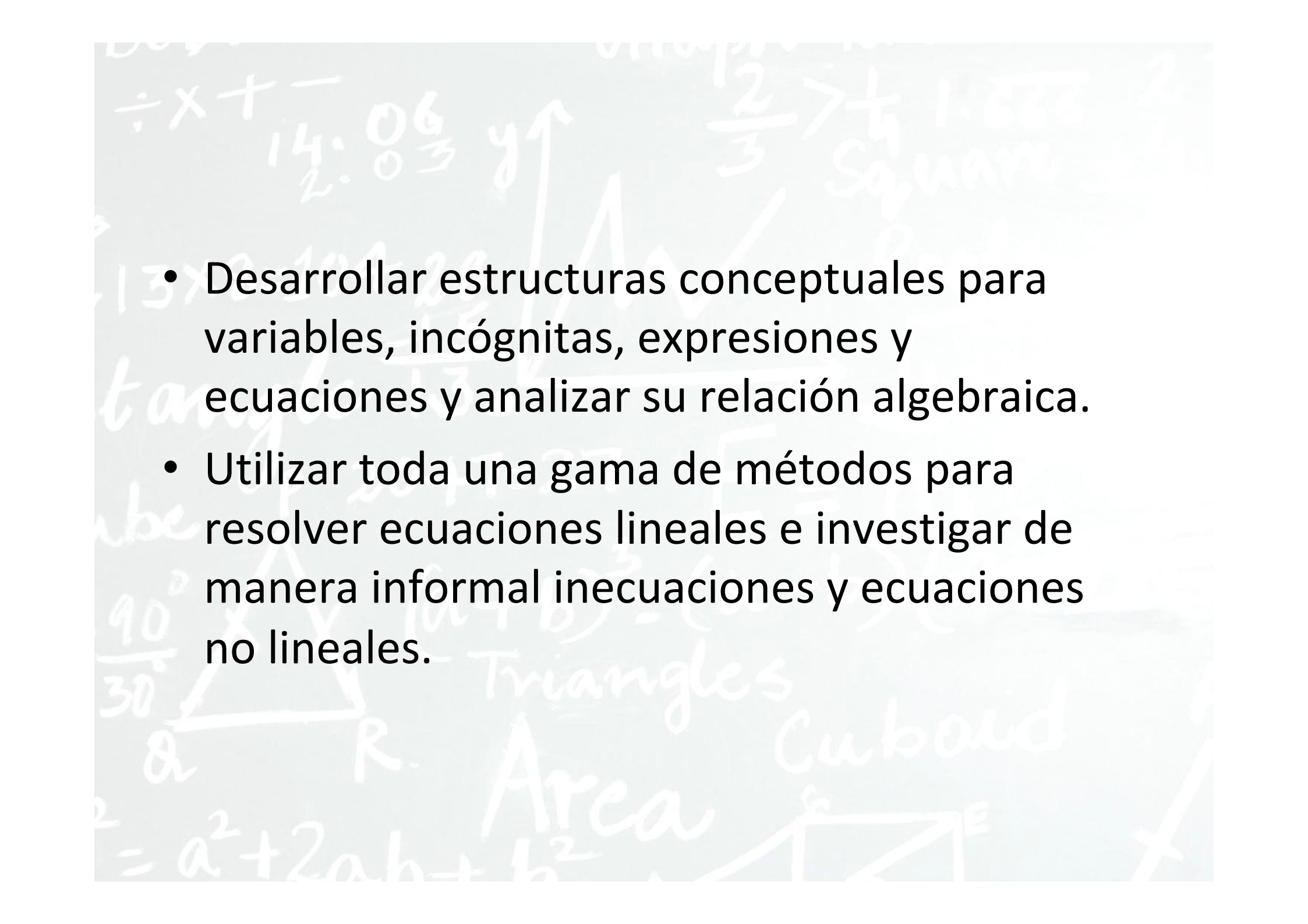
Infantil y Primaria

- Explicitar los criterios a partir de los cuales se hacen clasificaciones, ordenaciones y seriaciones.
- Identificar y construir patrones numéricos y geométricos;
- Describir patrones verbalmente y representarlos mediante tablas o símbolos;
- Buscar y aplicar relaciones entre cantidades que varían, para hacer predicciones;

- 
- The background of the slide is a light blue-grey color with various mathematical concepts and diagrams faintly visible. These include algebraic expressions like
- $\div x + -$
- ,
- 14.06
- ,
- $13 \times 8 = 104$
- ,
- $2 > + 1.55 = 2$
- ,
- 90°
- ,
- 30°
- ,
- $R.$
- ,
- $Area$
- ,
- $Cuboid$
- , and the quadratic formula
- $= a^2 + 2ab + b^2$
- . There are also geometric diagrams, such as a triangle with an angle of
- 130°
- and a cuboid with vertices labeled G and E. The overall theme is mathematics and problem-solving.
- Hacer y explicar generalizaciones basadas en situaciones particulares;
 - Utilizar gráficas para describir patrones y hacer predicciones;
 - Explorar propiedades de los números;
 - Usar notaciones inventadas, símbolos estándar y variables, para expresar un patrón, una generalización o una situación

ESO

- Identificar y usar relaciones funcionales, no únicamente lineales y cuadráticas, sino también relaciones de proporcionalidad inversa, exponencial, logarítmica, etc.
- Desarrollar y usar tablas, gráficas y reglas para describir situaciones.
- Realizar una interpretación entre diferentes representaciones matemáticas.

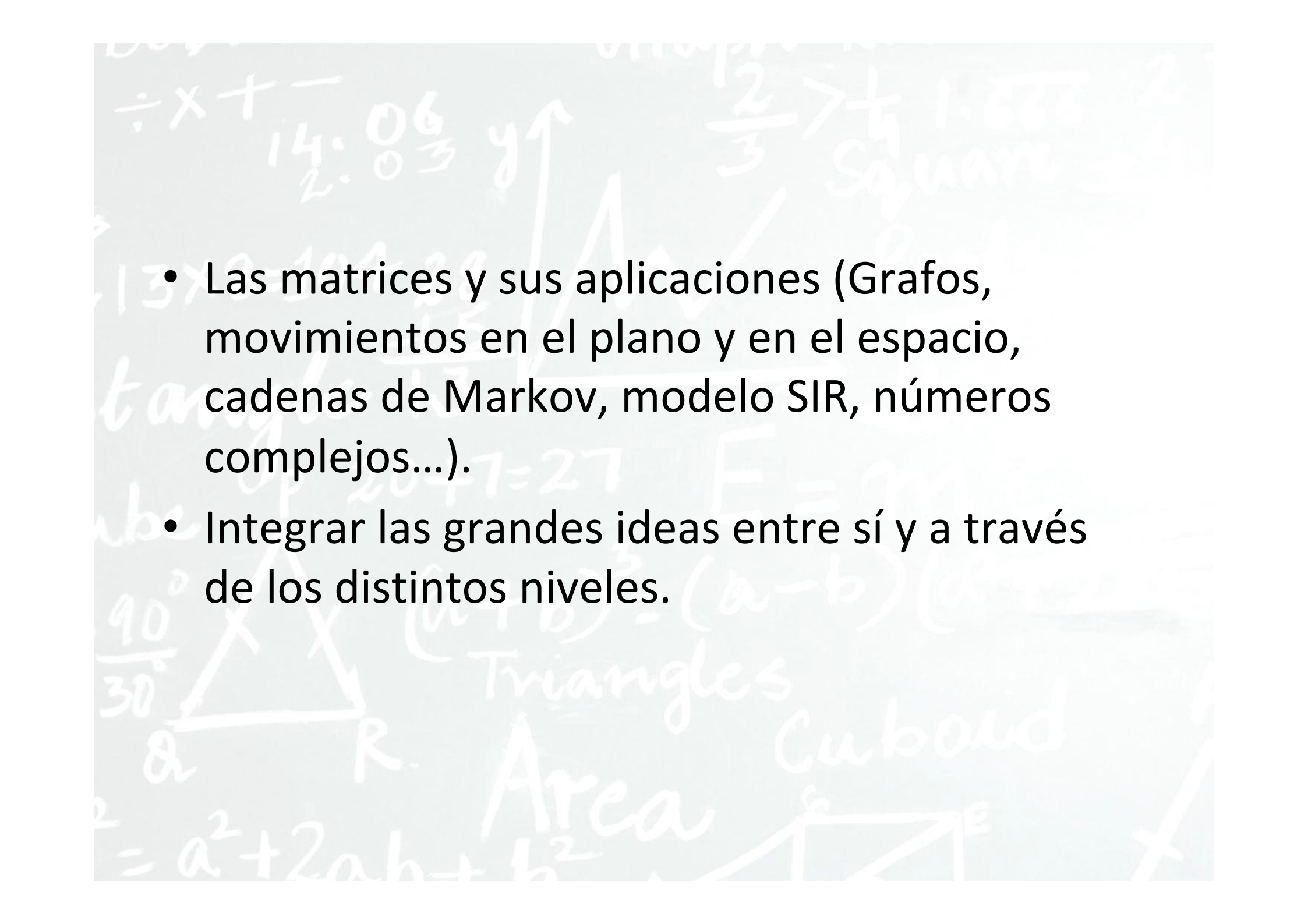
- 
- The background of the slide is a light blue-grey color with various mathematical concepts and formulas written in a white, handwritten style. These include algebraic expressions like
- $\frac{2}{3} > + 1.55$
- ,
- $\frac{14.06}{2.03}$
- , and
- $\frac{90^\circ}{30^\circ}$
- ; geometric diagrams such as a triangle with angles
- 90°
- and
- 30°
- , and a cuboid; and algebraic identities like
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- . Other visible text includes "Squares", "Triangles", "Area", and "Cuboid".
- Desarrollar estructuras conceptuales para variables, incógnitas, expresiones y ecuaciones y analizar su relación algebraica.
 - Utilizar toda una gama de métodos para resolver ecuaciones lineales e investigar de manera informal inecuaciones y ecuaciones no lineales.

Merecen menos atención

- Manipular expresiones algebraicas de complejidad mayor que la que aparece naturalmente en el contexto de las situaciones problemáticas (contextualizadas o no) que se planteen en esta etapa.
- Memorizar procedimientos y hacer práctica de repetición sobre resolución de ecuaciones.

Bachillerato

- Utilizar problemas del mundo real para motivar y aplicar la teoría.
- Usar utilidades informáticas para desarrollar estructuras conceptuales.
- Los métodos basados en la informática tales como aproximaciones sucesivas y utilidades gráficas, para resolver ecuaciones e inecuaciones.

- 
- The background of the slide is a light blue-grey color with various mathematical concepts and diagrams faintly visible. These include: a coordinate system with an upward-pointing arrow labeled 'y'; a fraction
- $\frac{2}{3}$
- ; the word 'Square'; a triangle with angles labeled
- 90°
- and
- 30°
- , and a side labeled 'R'; the word 'Triangles'; the word 'Area'; the word 'Cuboid'; and the algebraic identity
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- .
- Las matrices y sus aplicaciones (Grafos, movimientos en el plano y en el espacio, cadenas de Markov, modelo SIR, números complejos...).
 - Integrar las grandes ideas entre sí y a través de los distintos niveles.

- Establecer conexiones entre una situación de problema, su modelo como función en forma simbólica y la representación gráfica de dicha función.
- Utilizar la ecuación de una función expresada de forma analítica como comprobación de la razonabilidad de las representaciones generadas por las utilidades gráficas.
- Utilizar las funciones construidas para modelizar problemas del mundo real.

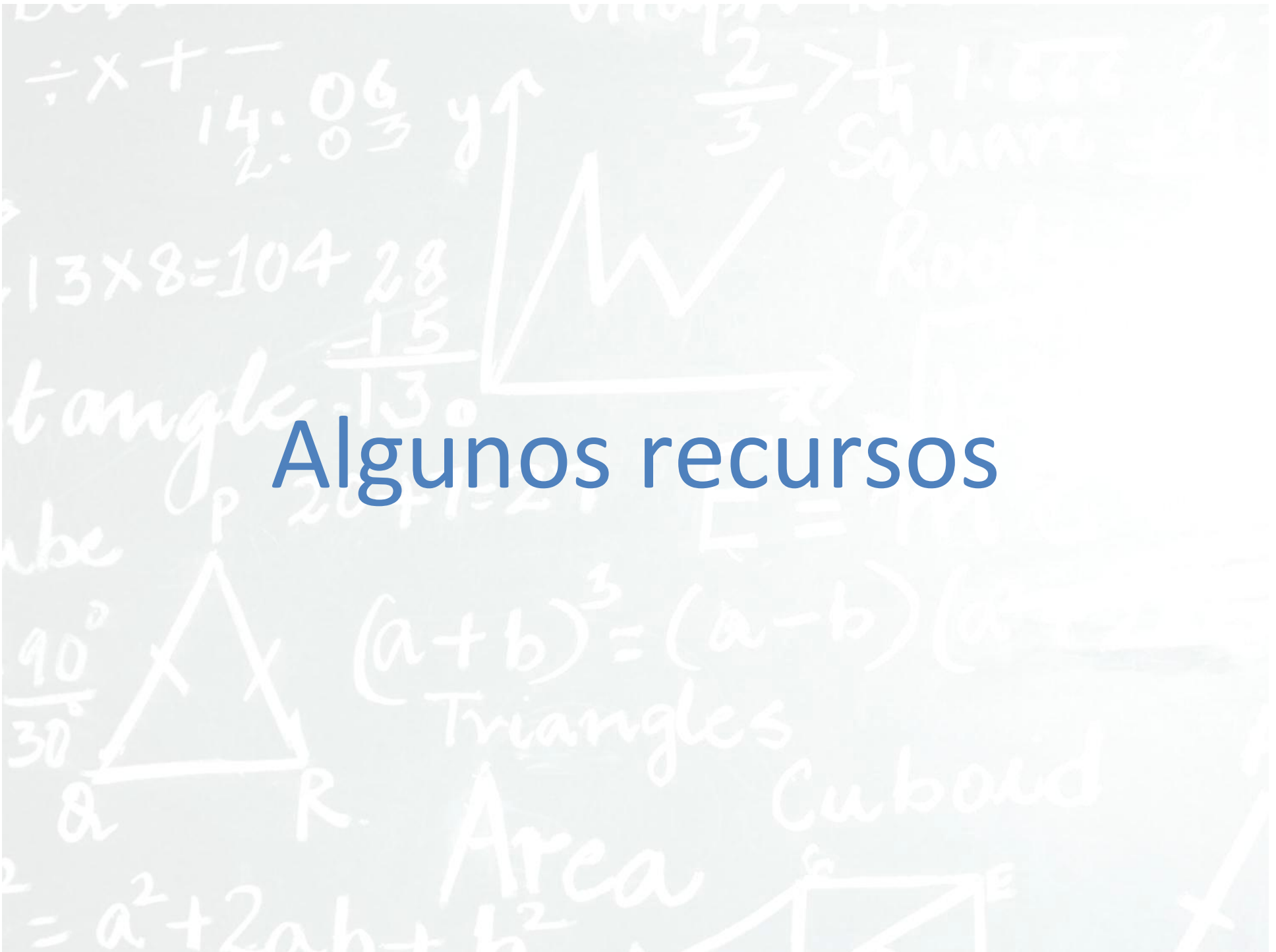
Merecen menos atención

- Clasificar enunciados por tipos, como los de monedas, dígitos y trabajo.
- Usar factores para resolver ecuaciones y para simplificar expresiones racionales.
- Calcular operaciones con expresiones racionales.
- Representar gráficas de ecuaciones con papel y lápiz por medio de una trama de puntos.

- Calcular logaritmos usando tablas e interpolación.
- Usar y operar con matrices sin contextualizar.
- Calcular el determinante y la inversa de una matriz con lápiz y papel.
- Resolver sistemas de ecuaciones usando determinantes.
- Obtener valores numéricos con lápiz y papel.

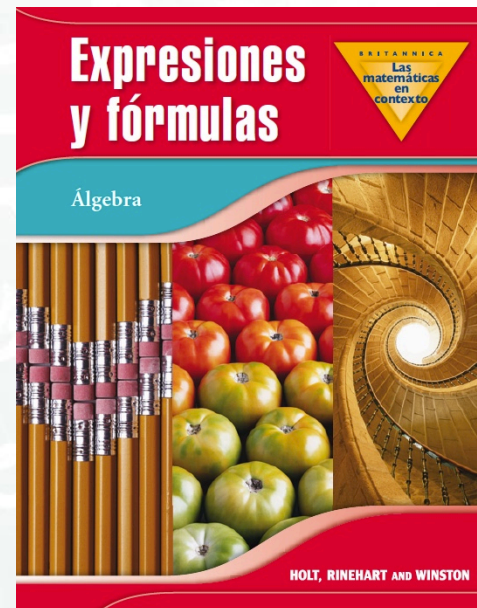
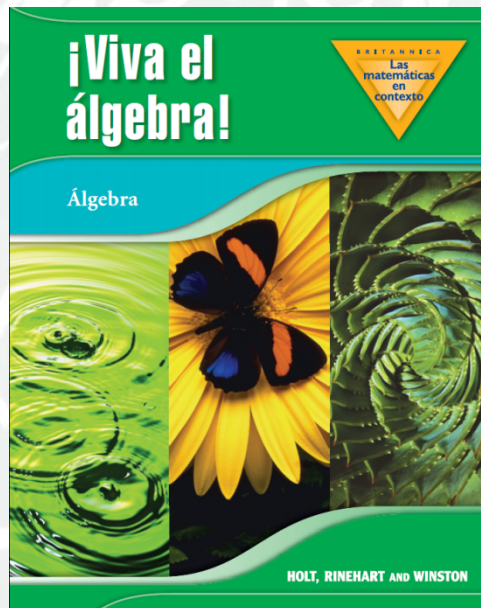
- Representar gráficamente funciones a mano usando tablas de valores.
- Utilizar fórmulas dadas como modelos de problemas del mundo real, sin analizar de dónde surge el modelo.
- Expresar ecuaciones de una función de forma analítica, con el exclusivo objeto de representarlas gráficamente.
- Dar al sentido algebraico un tratamiento independiente del resto de sentidos matemáticos.

Algunos recursos



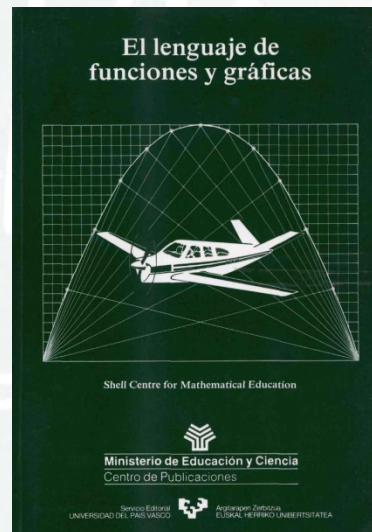
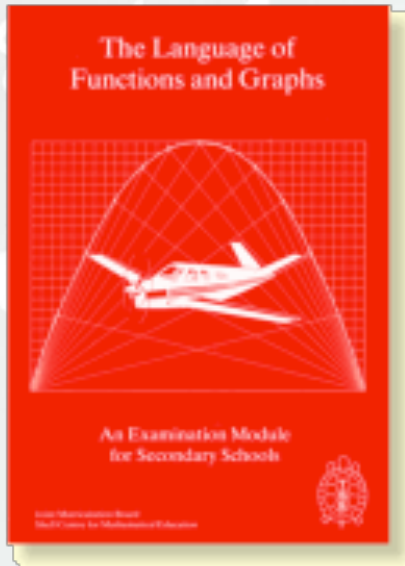
Freudenthal Institute

- <http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/subsets/mic/>



Shell Centre for Mathematical Education

- <https://www.mathshell.com/>



- <https://sede.educacion.gob.es/publiventa/el-lenguaje-de-funciones-y-graficas/pedagogia/1065>

Mathematics Assessment Project

- <https://www.map.mathshell.org/>

MEFP-FESPM

- <https://educagob.educacionyfp.gob.es/curriculo/nuevo-curriculo/menu-curriculos-basicos.html>
- [MatesGG](#)
- <https://intef.es/recursos-educativos/recursos-para-el-aprendizaje-en-linea/matesgg/>

Aragón

- <https://educa.aragon.es/en/-/normativa-primaria>
- <https://educa.aragon.es/en/-/normativa-eso>
- <https://educa.aragon.es/en/-/norma-bachillerato>

Nrich

- <https://nrich.maths.org/>
- Mapa de primaria:
<https://nrich.maths.org/maps/primary>
- Mapa de secundaria:
<https://nrich.maths.org/maps/secondary>
- XX Jaem
<https://nrich.maths.org/jaem2022>

reSolve

- <https://www.resolve.edu.au/teaching-resources>

NCTM

- <https://www.nctm.org/>
- <https://illuminations.nctm.org/>
- <https://www.nctm.org/standardspositions/>

Telegram

- De la aritmética al álgebra