Representaciones y cálculo al servicio del sentido en la enseñanza de las matemáticas

Michèle Artigue
Université Paris Cité, LDAR

XII ESCUELA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA MIGUEL DE GUZMÁN
30 de septiembre de 2022

Índice

- Preliminares didácticos y epistemológicos
- Representaciones, cálculos y sentido: ¿Porque elegir tal perspectiva?
- Tres ejemplos
- ¿Qué lecciones para la enseñanza?

El concepto de registro de representación semiótica (Duval, 2017)

- Los objetos matemáticos vistos como ‘idealidades’ (Desanti, 1968) y el papel esencial que juegan las representaciones semióticas y transformaciones entre representaciones para darles sentido y trabajar con ellos (Frege, 1892).
- Representaciones: un dominio de investigación muy importante en educación matemática, y trabajado con una gran diversidad teórica.
- Un ejemplo influyente: la teoría semiótica desarrollada por Raymond Duval (1995, 2017) en torno al concepto de **registro de representación semiótica**.
  - Se define como un sistema semiótico que permite la formación de representaciones, su transformación en el registro mismo (tratamiento), o en representaciones de otros registros (conversión).
  - En matemáticas se utilizan varios registros: registros simbólicos, gráficos, figurativos, las lenguas naturales… y también representaciones que no cumplen con las características de los registros, como los gestos.
  - La importancia de las conversiones entre registros semióticos para la conceptualización; también su complejidad cognitiva debida en particular a fenómenos de no-congruencia entre las unidades semióticas respectivas de los diferentes registros.

Representaciones y sentido en matemáticas

- Una relación que pone en juego las diversas potencialidades de las representaciones:
  - su potencial de visualización, de expresión y soporte a la comunicación;
  - su potencial heurístico;
  - su potencial operativo o instrumental.

- Potencialidades más y más interdependientes gracias a los avances tecnológicos.

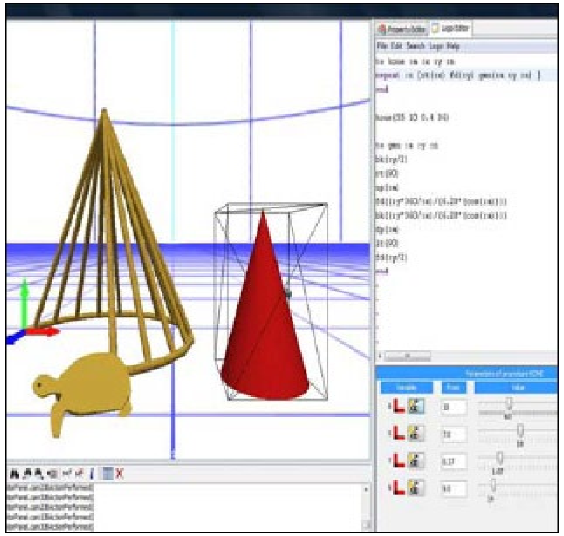
Avances tecnológicos que han permitido

- Pasar:
  - de representaciones estáticas a representaciones dinámicas y que se pueden manipular como objetos; el papel pionero de la geometría dinámica;
  - de representaciones aisladas a representaciones interconectadas.

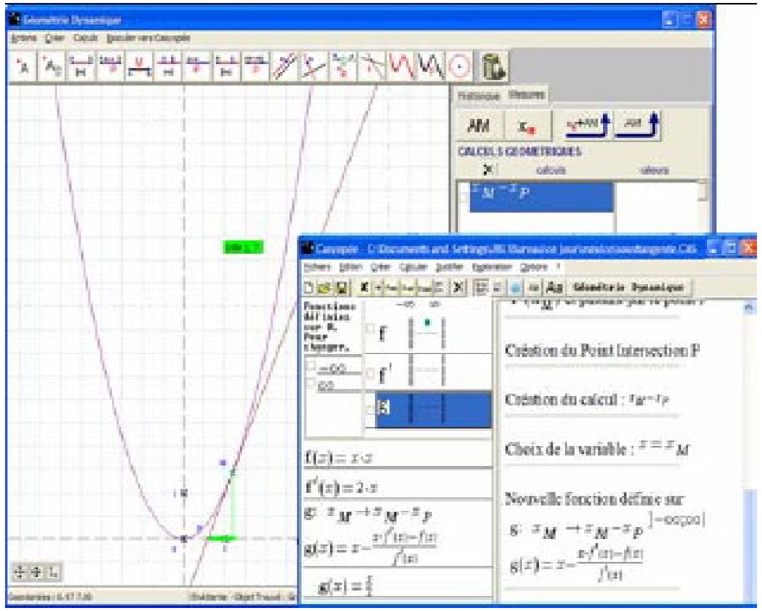
- Y así reforzar la dimensión experimental de la actividad matemática.

El proyecto Europeo ReMath

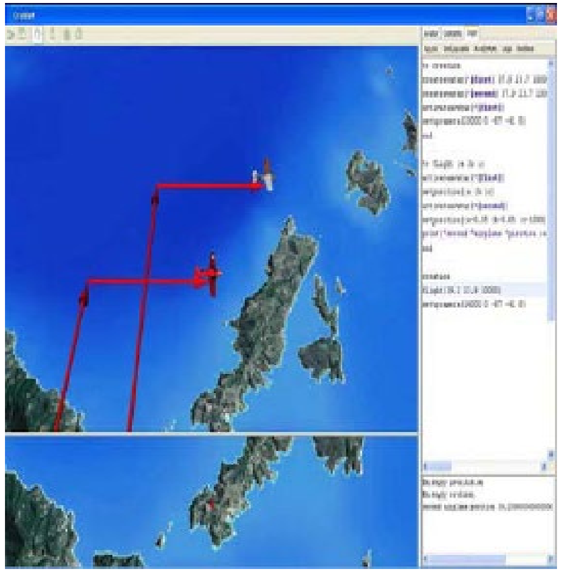
MALT



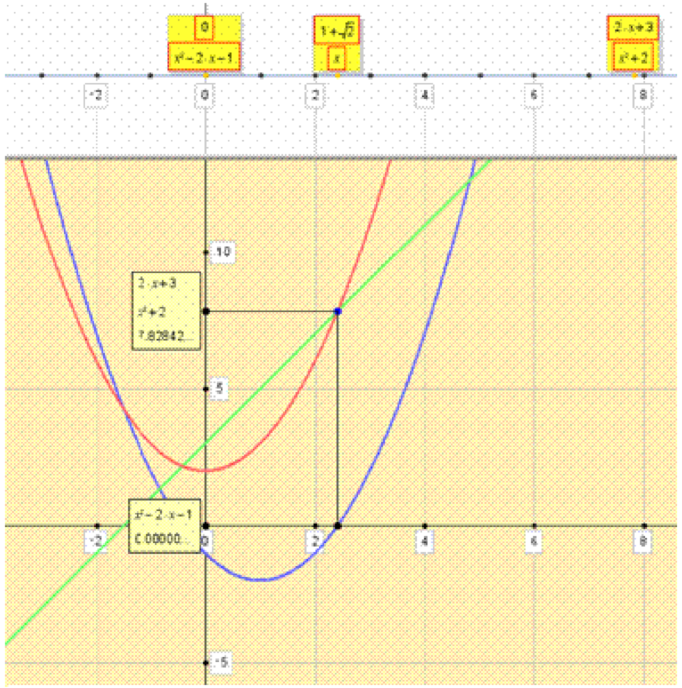
Casyopée



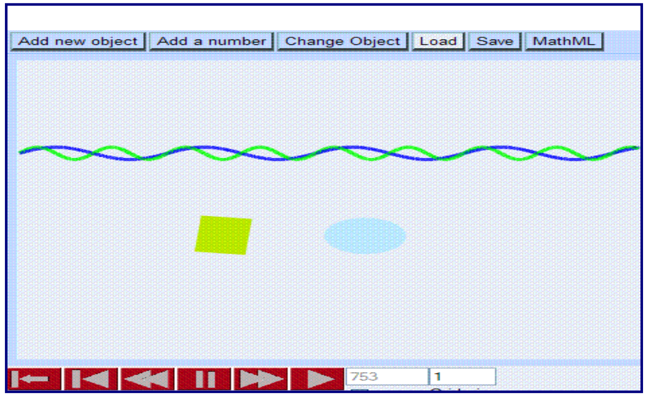
Cruislet



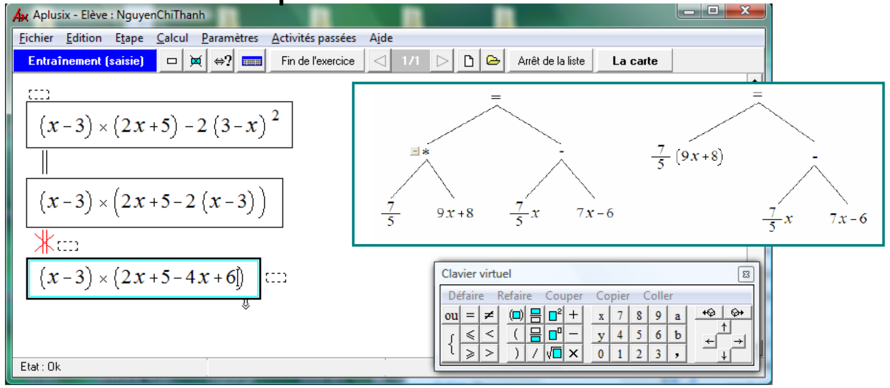
Alnuset



Mopix



Aplusix



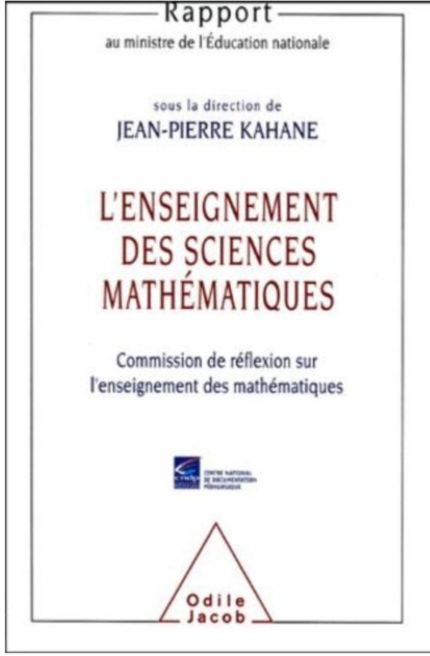
El poder particular de las representaciones matemáticas

- El poder de las matemáticas está ligado en gran medida a la capacidad de los matemáticos de desarrollar sistemas de representación que les permitan trabajar los conceptos matemáticos y resolver problemas, a través de cierta forma de cálculo y la automatización de estos cálculos por medio de algoritmos.
- Una característica epistemológica visible en la denominación misma de muchos de sus dominios: cálculo diferencial e integral, cálculo de variaciones, cálculo de probabilidades, cálculo proposicional, cálculo de predicados, cálculo tensorial...
- Un potencial también muy impactado por las tecnologías digitales, y eso desde su aparición.

El énfasis en el potencial operativo de las representaciones

Por lo tanto, voy a prestar particular atención al potencial operativo de los registros de representación semiótica utilizados en la enseñanza de las matemáticas, a los cálculos implicados en tratamientos y conversiones en la resolución de problemas, haciendo hincapié en la inteligencia de estos cálculos que desempeña un papel clave en su productividad epistémica, es decir en su contribución al sentido.

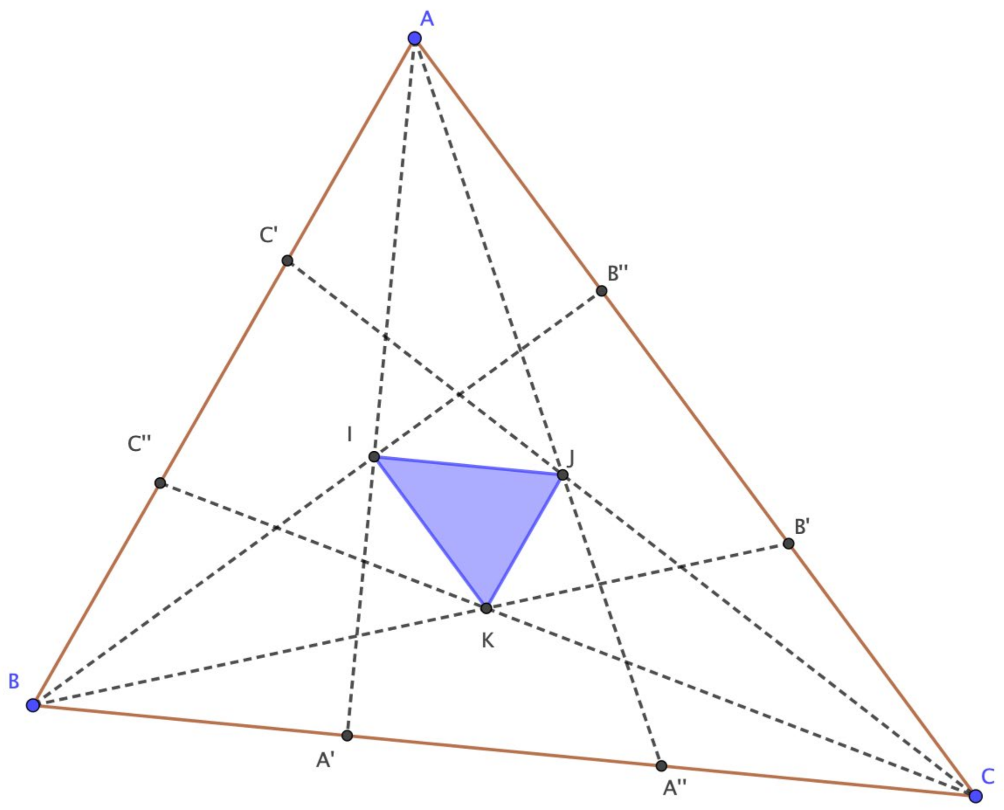
¿Porque tal énfasis?



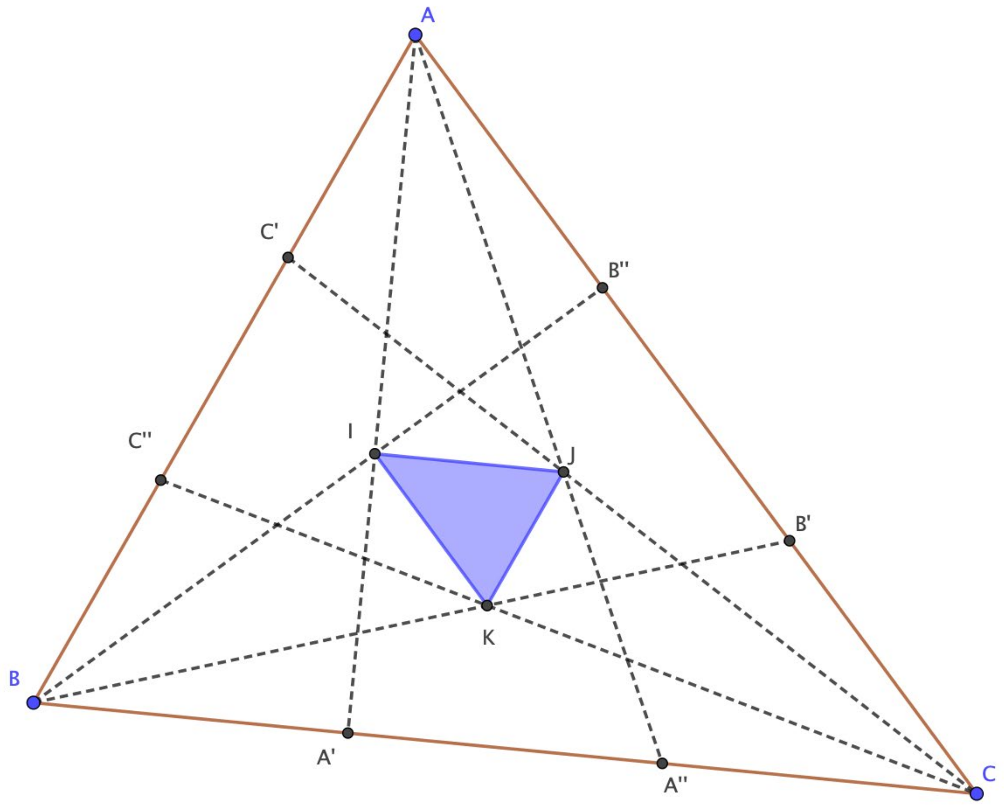
- Un énfasis que tiene sus raíces en los trabajos de la CREM presidida por Jean-Pierre Kahane a principios de este siglo.
- Un informe dedicado a la enseñanza del cálculo desde la escuela primaria hasta la universidad.
- El deseo de romper con la visión cultural del cálculo como una actividad mecánica que no requiere razonamiento y no contribuye al sentido, y de promover una visión del cálculo como una sutil combinación de automatización y razonamiento, que tiene una función **epistémica** tanto como **pragmática**.
- De ahí, la expresión « inteligencia del cálculo», regularmente utilizada después en la noosfera.

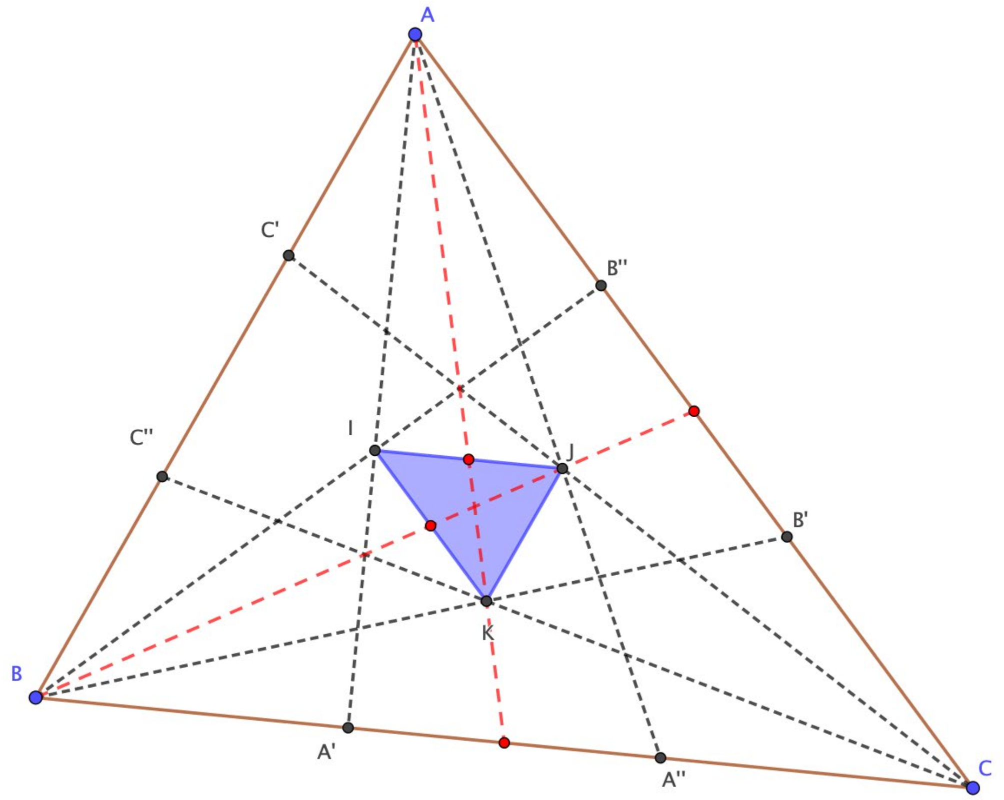
Un primer ejemplo: centros de gravedad

- Un triángulo ABC. Cada lado se divide en tres segmentos iguales, de ahí los puntos A’, A’’, B’, B’’, C’ y C’’. Luego se construyen los segmentos punteados y el triángulo IJK.
- Determinar la posición del centro de gravedad del triángulo IJK.



Haciendo y comprobando conjeturas





Demostración: la elección del registro simbólico baricéntrico

- La noción matemática en juego: centro de gravedad y, por tanto, iso-baricentro de los vértices de los triángulos.
- Las propiedades geométricas que intervienen en la construcción de la figura: la división regular de un segmento, la alineación, las intersecciones, propiedades fáciles de expresar en este registro.
- El hecho de que, en comparación con otras formas de cálculo geométrico, el cálculo baricéntrico permite mantener la simetría inicial de la situación, lo que ya no ocurriría si eligiéramos, por ejemplo, ejes de coordenadas.

El cálculo con coordenadas baricéntricas en el sistema (A,B,C)

A’ = bar(B(2),C(1)): (0, 2, 1)

B’’= bar(A(2),C(1)): (2, 0, 1)

I = bar(A(α), A’(β)): (α, 2β, β)

I = bar(B(γ), B’’(δ)): (2δ, γ, δ)

Así que α=2β

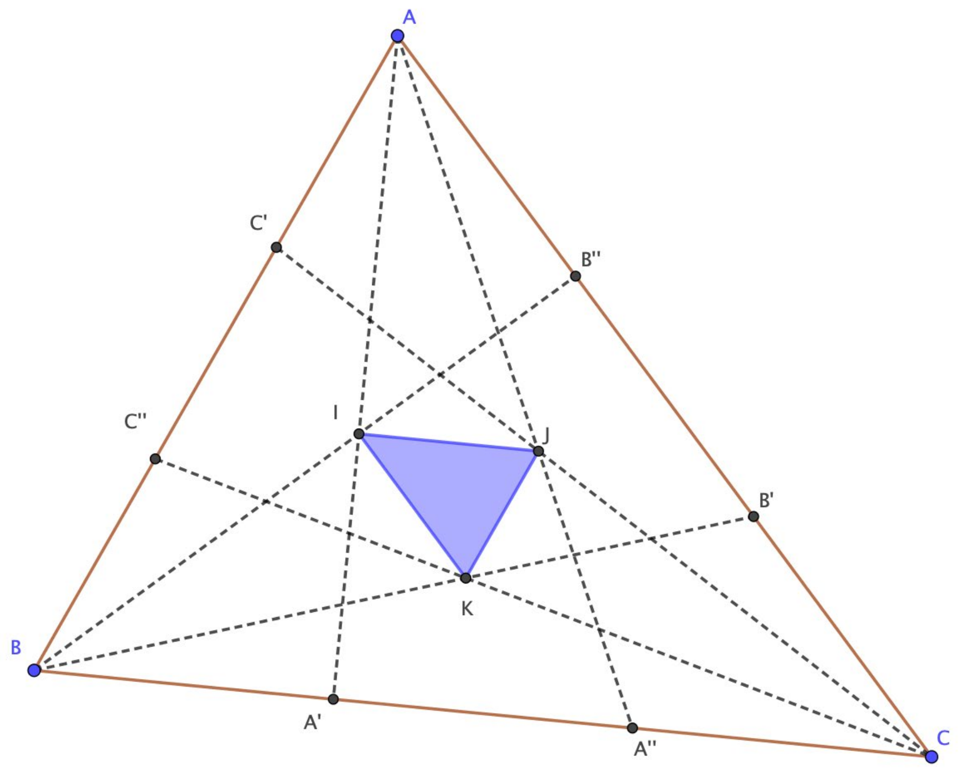
I : (2β, 2β, β)

Por permutación circular, se obtiene:

J : (2β, β, 2β)

K : (β, 2β, 2β)

El centro de gravedad de IJK tiene como coordenadas baricéntricas : (5β,5β, 5β).

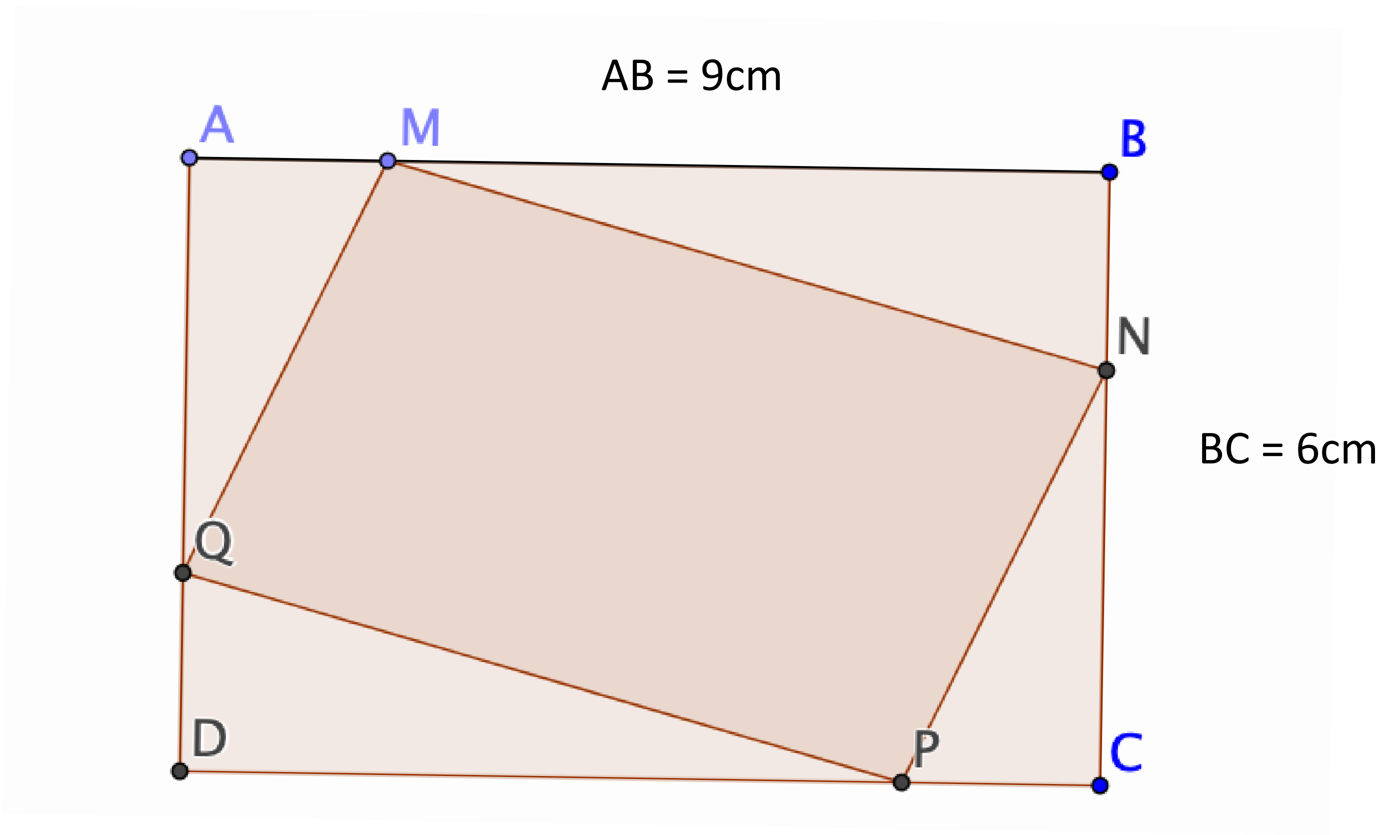


Reflexiones sobre este ejemplo

- El potencial heurístico de la geometría dinámica.
- La importancia de la elección de un registro de representación adecuado para optimizar su potencial operativo.
- El cálculo desarrollado es un cálculo razonado, no un cálculo mecánico.
- Es un cálculo que tiene un valor epistémico, contribuyendo a entender la razón de la coincidencia observada de los dos centros de gravedad.

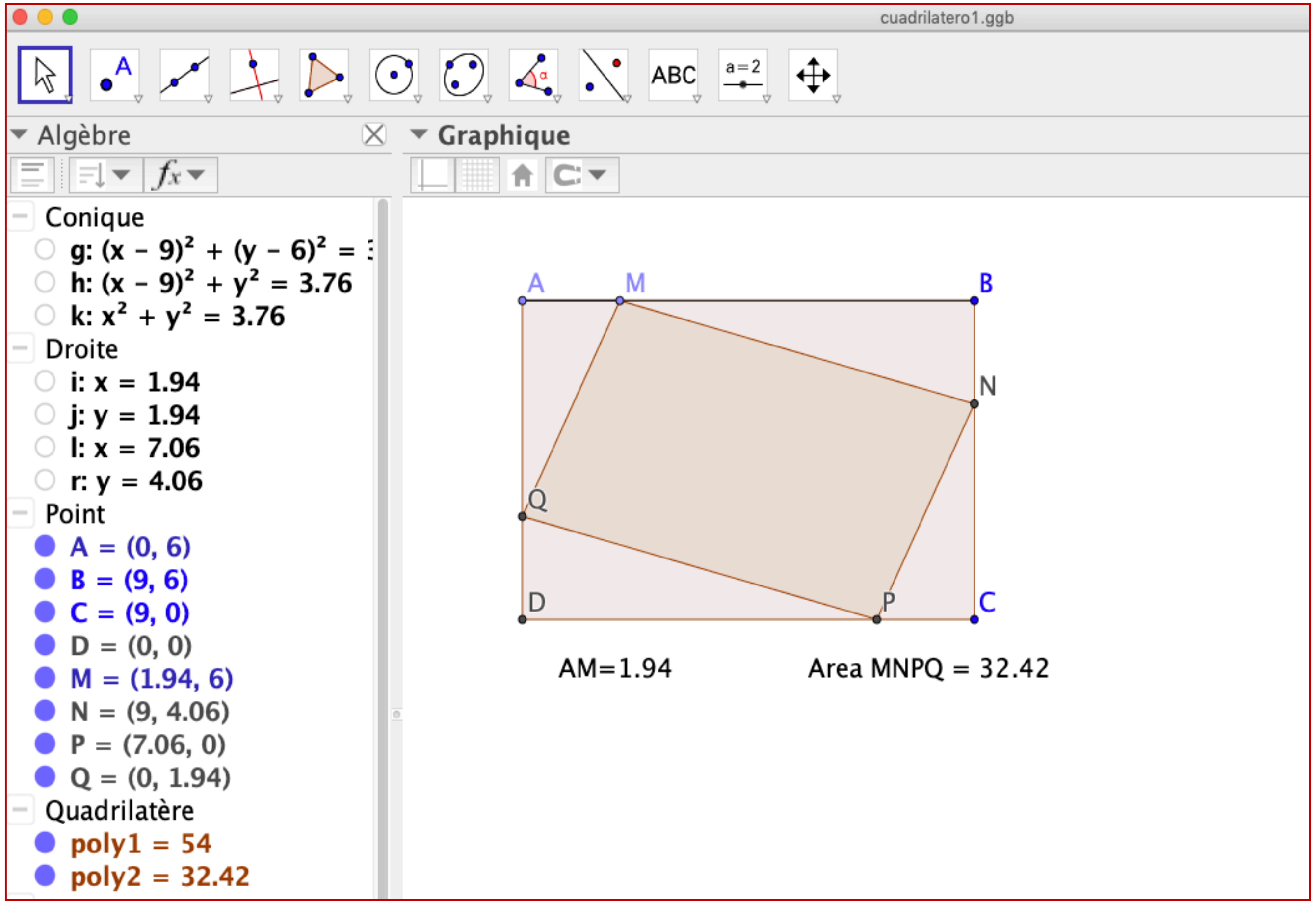
Un secundo ejemplo: el cuadrilátero girando

- Un punto M se mueve sobre el segmento [AB] y se construye el cuadrilátero MNPQ tal que AM=BN=CP=DQ y MNPQ quede dentro del rectángulo ABCD.
- Estudiar las variaciones del área del cuadrilátero MNPQ y determinar su mínimo.

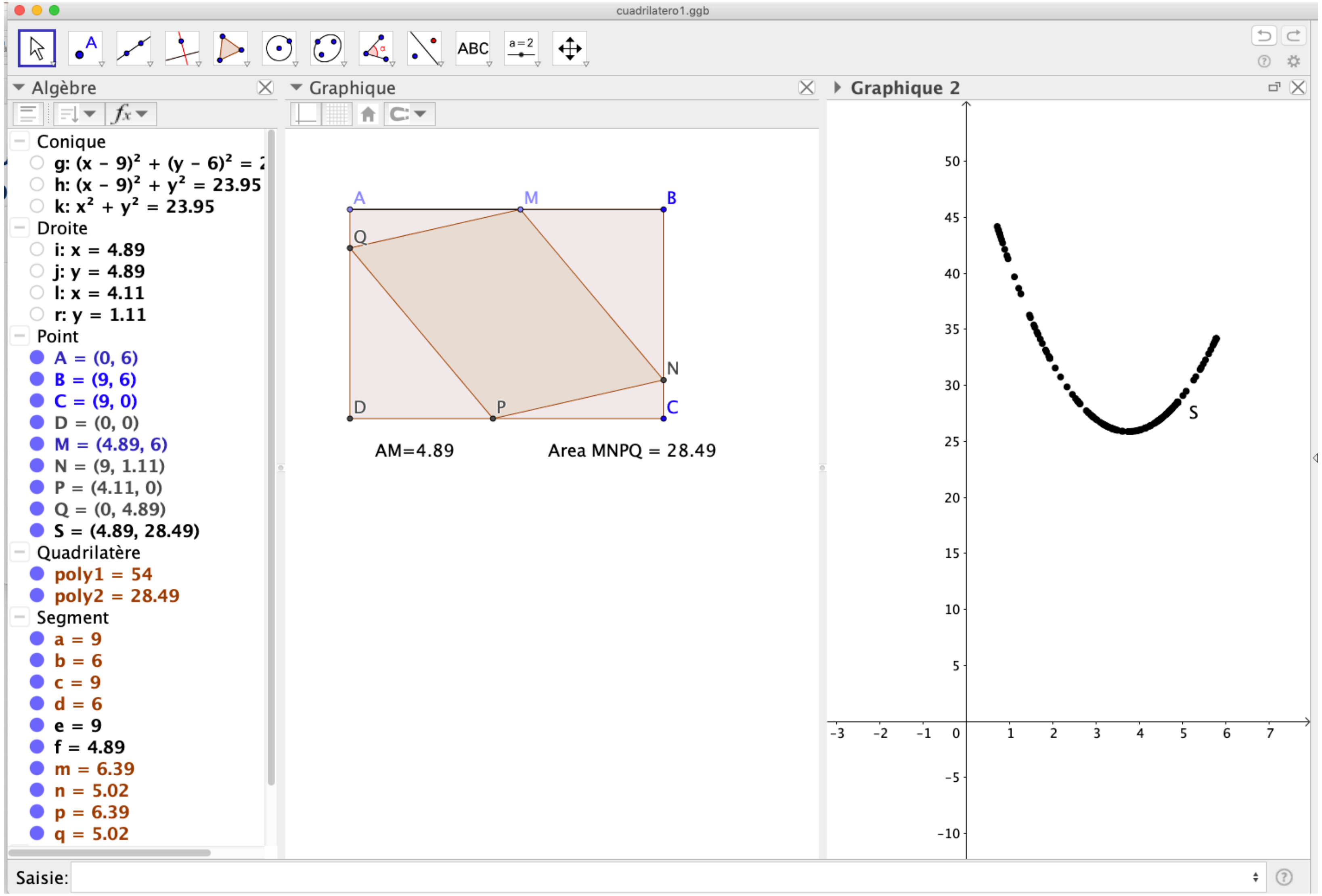


Haciendo y comprobando conjeturas

Utilizando el potencial de visualización dinámica de GeoGebra, y la conexión entre el registro figurativo geométrico y el registro numérico, para sostener la actividad heurística.

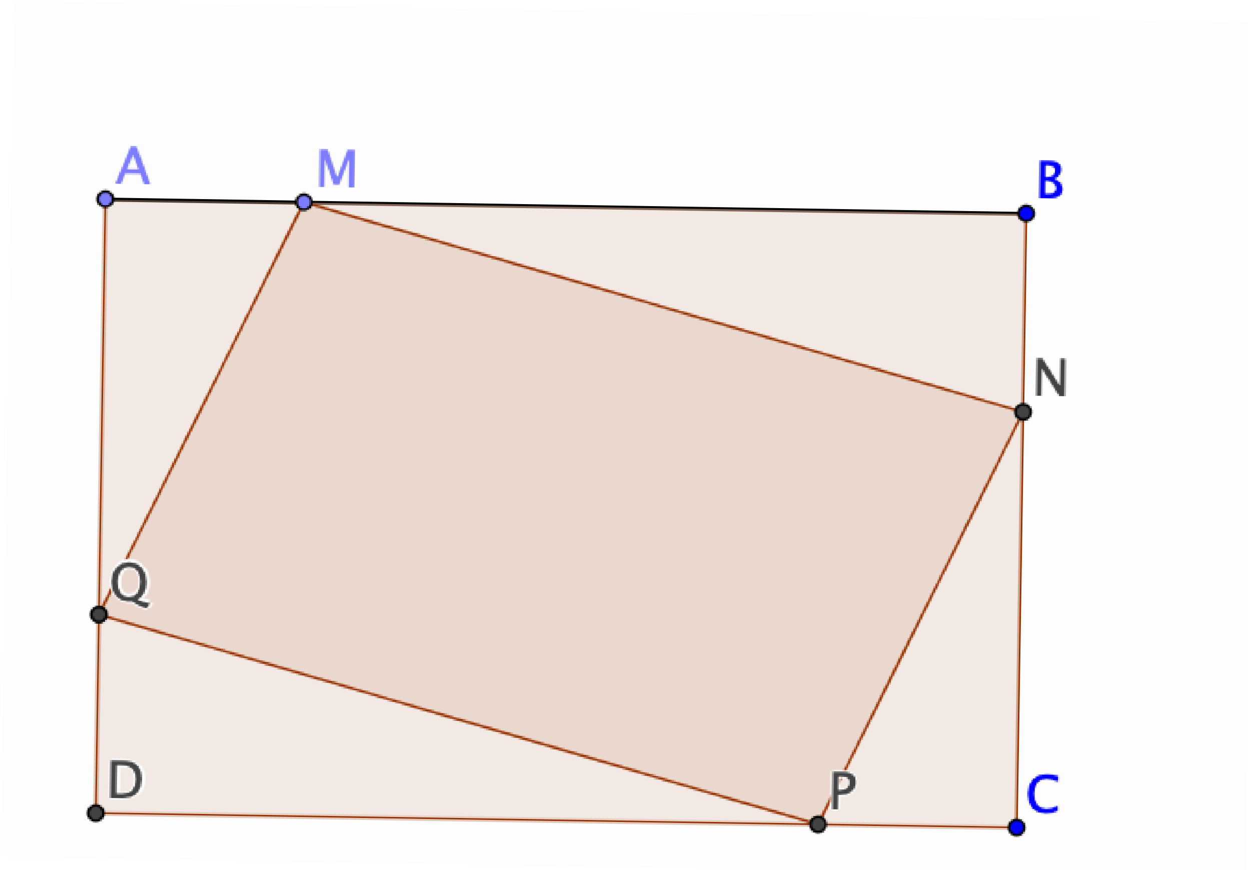


Del marco geométrico al marco funcional



Demostración de la conjetura: la estrategia algebraica

- Pasar al registro simbólico algebraico (conversión) para expresar el área de MNPQ como función de la longitud AM.
- Calcular el área por diferencia, descomponiendo la figura geométrica:
  - $S(x)=54-x(6-x)-x(9-x)$
  - $S(x)=2x^2 -15x +54$



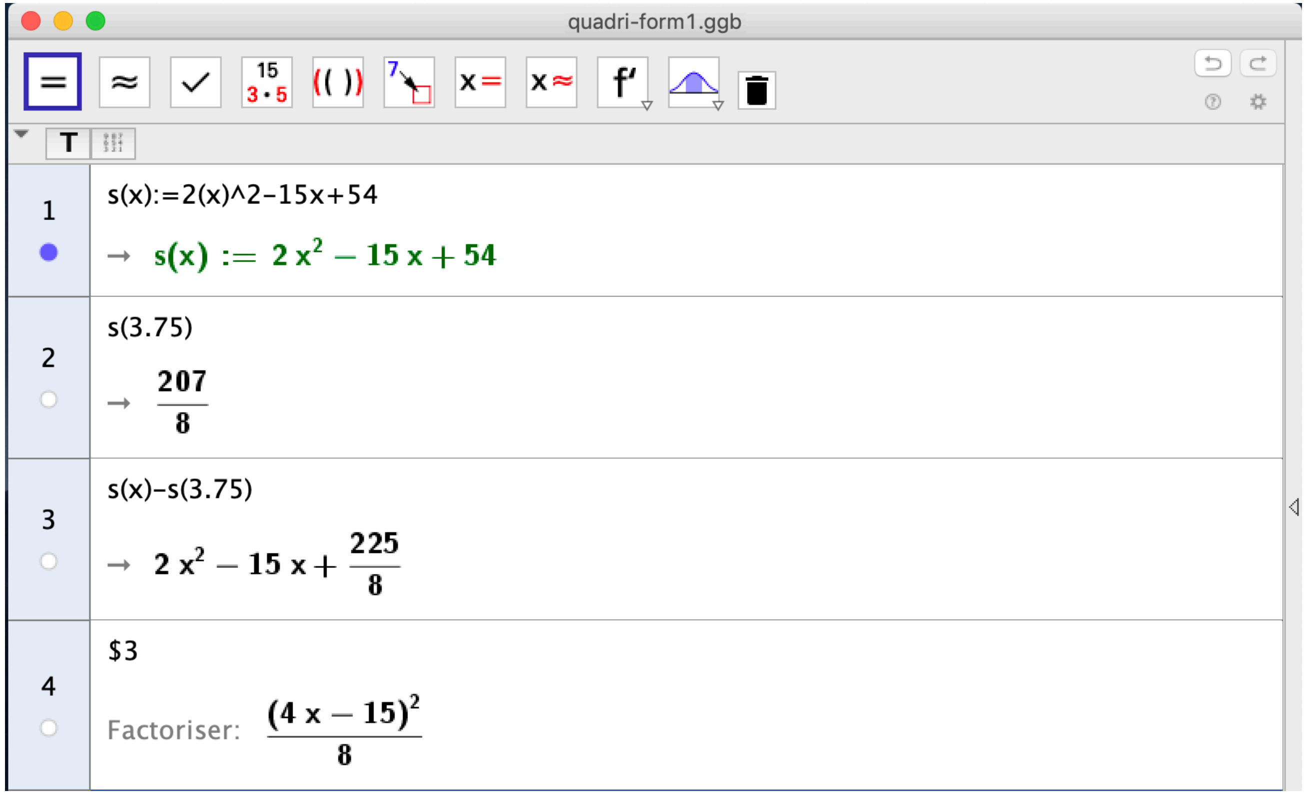
Encontrar el mínimo de S(x)

- Refiriéndose a propiedades conocidas de las parábolas.
- Poniendo S(x) en forma canónica:

$$S(x)=2(x-15/4)^2+207/8.$$

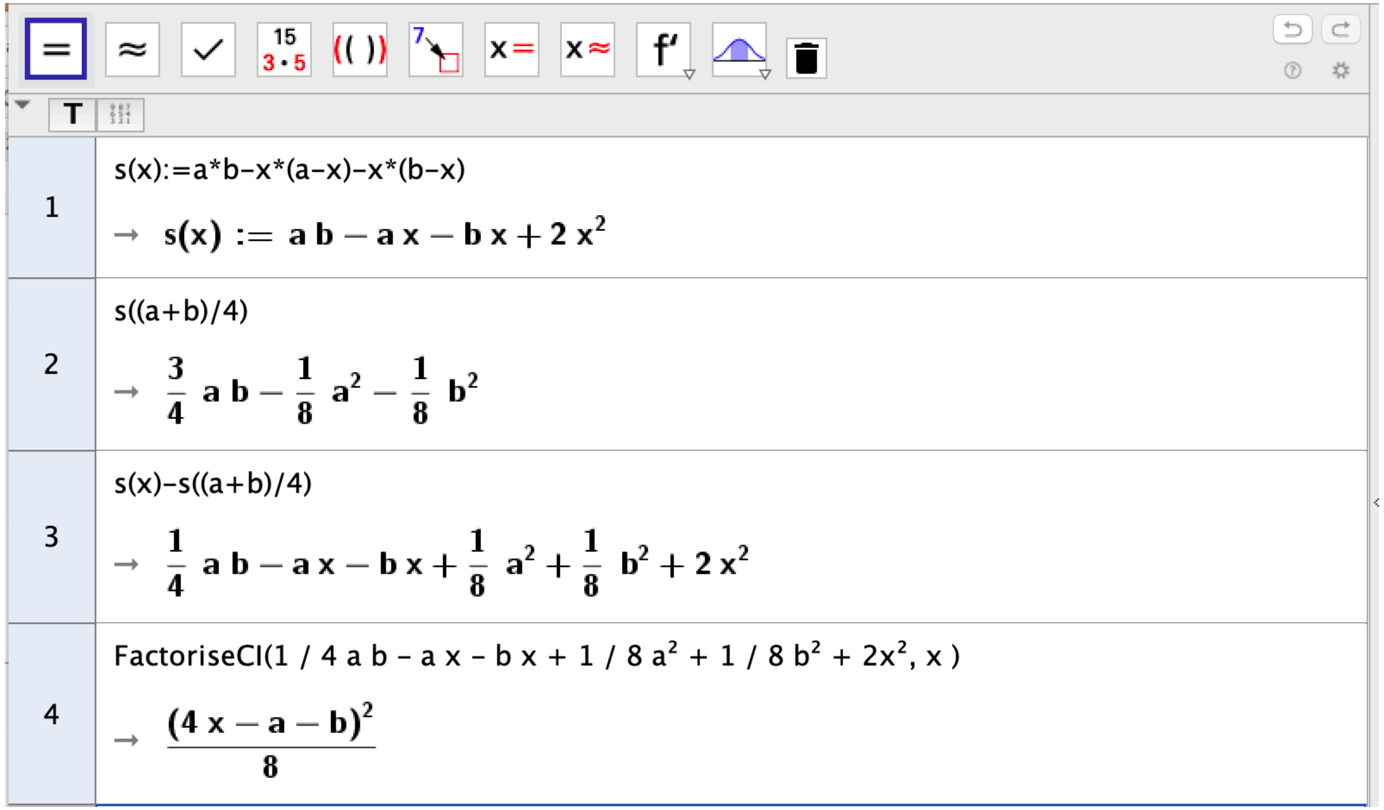
- Volviendo al sentido de la noción de mínimo y utilizando la conjetura:

  S(x)-S(3.75) es siempre positiva o nula, así que debe ser un cuadrado perfecto.



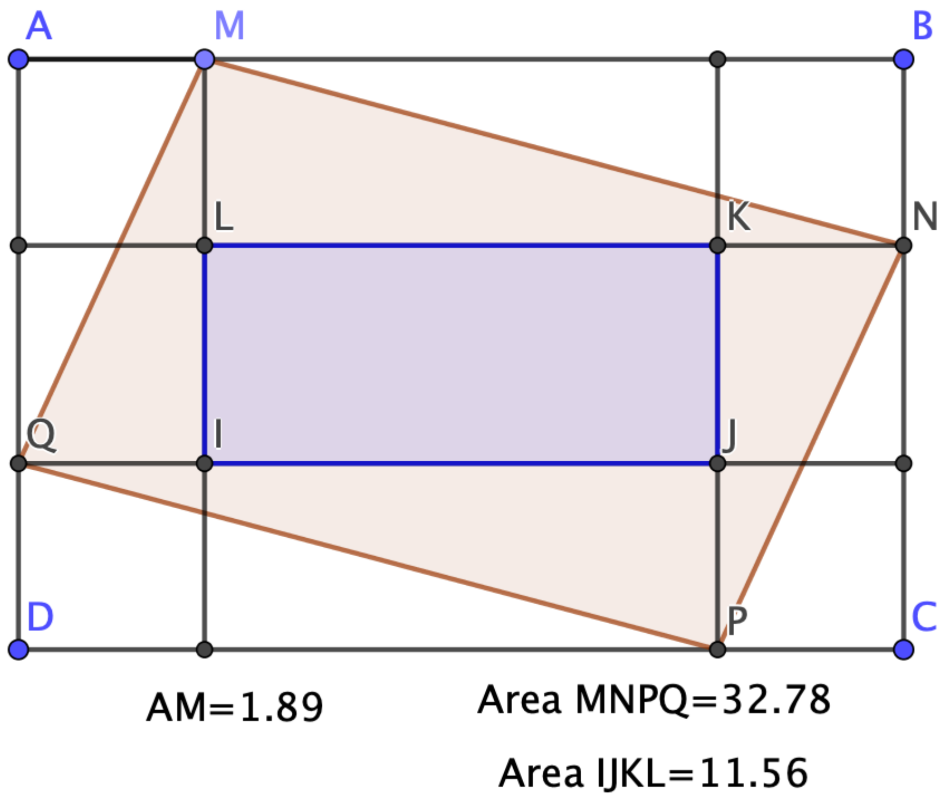
Generalización: el potencial del simbolismo algebraico

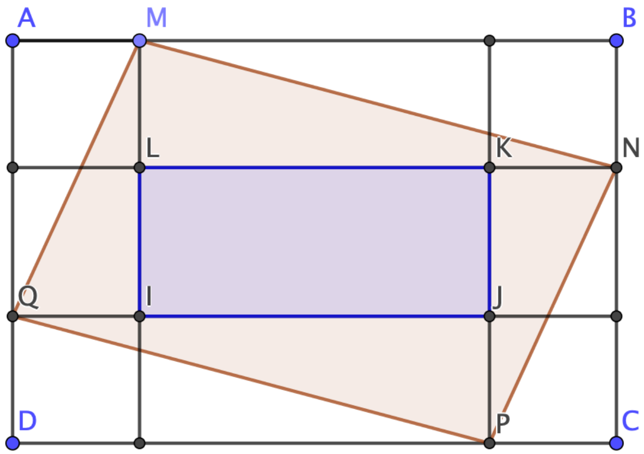
- El mínimo se obtiene para el cuarto del semi-perímetro
- ¿Está relacionado con las dimensiones elegidas para el rectángulo ABCD, o es un resultado más general?



Demostración de la conjetura: la estrategia geométrica

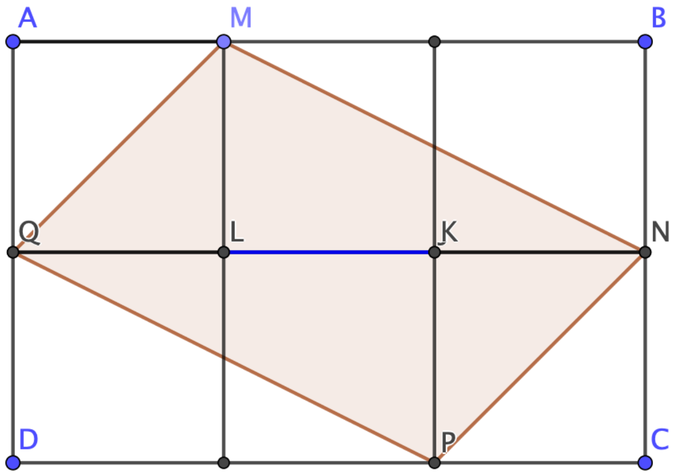
- Explotando el potencial operativo del registro figurativo.
- Relacionando las variaciones del área de MNPQ y del área del rectángulo IJKL.





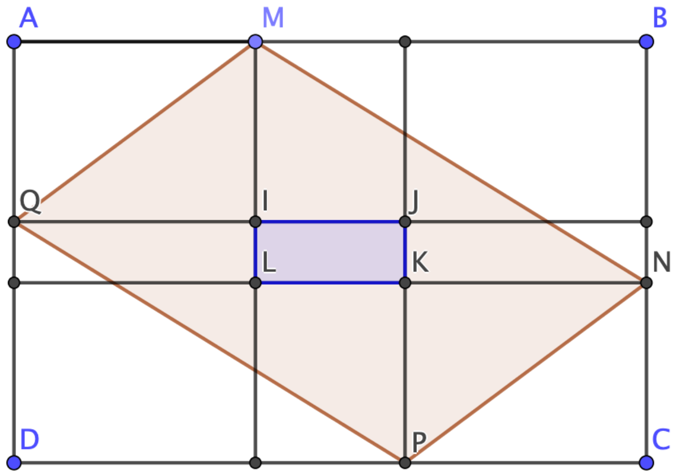
AM=1.89 Area MNPQ=32.78

Area IJKL=11.56



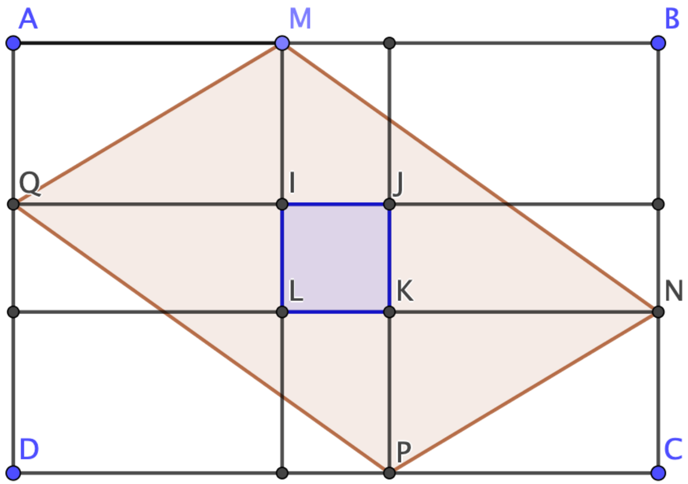
AM=3 Area MNPQ=27

Area IJKL=0



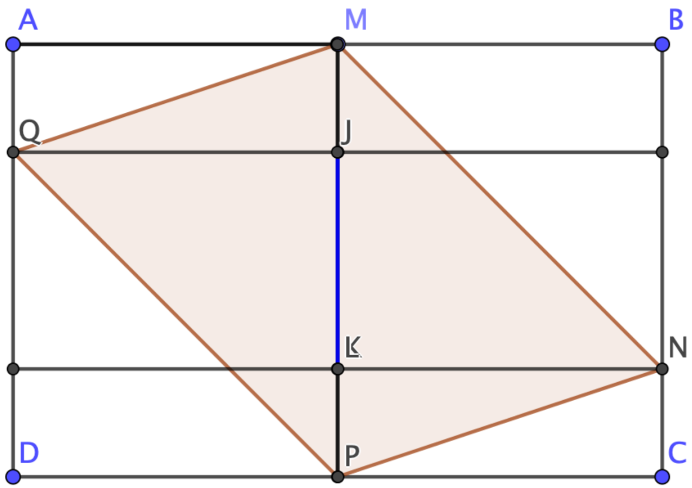
AM=3.44 Area MNPQ=26.07

Area IJKL=1.85



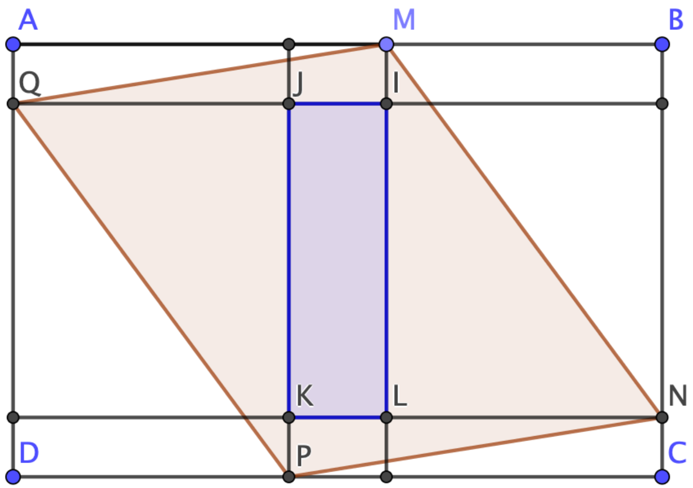
AM=3.75 Area MNPQ=25.88

Area IJKL=2.25



AM=4.5 Area MNPQ=27.01

Area IJKL=0.02



AM=5.18 Area MNPQ=29.94

Area IJKL=5.89

Reflexiones sobre este ejemplo

- Una vez más, el potencial de visualización y heurístico de un programa de geometría dinámica como GeoGebra.
- El potencial de la conexión dinámica entre el registro figurativo y el registro gráfico para entrar en el marco funcional, sin necesitar la producción inmediata de una expresión algebraica de la función.
- El potencial operativo tanto del registro figurativo como del registro algebraico, y sus aportaciones epistémicas complementarias.
- El potencial operativo específico del registro simbólico para sostener los procesos de generalización.

Un tercer ejemplo: sumas de nombres consecutivos

- ¿Qué números enteros pueden escribirse como una suma de números enteros positivos consecutivos?
- Ejemplos : 5=2+3, 10=1+2+3+4
- Utilizando una hoja de cálculo:
  - Sea entrando la formula $S(n,p)=p(2n+p-1)/2$, con $n>0$ y $p>1$
  - Sea utilizando una definición recursiva: $S(1,p+1)=S(1,p)+(p+1)$ y $S(n+1,p) =S(n,p)-n+(n+p)=S(n,p)+p$

n/p	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
2	5	9	14	20	27
3	7	12	18	25	33
4	9	15	22	30	39
5	11	18	26	35	45
6	13	21	30	40	51
7	15	24	34	45	57
8	17	27	38	50	63
9	19	30	42	55	69
10	21	33	46	60	75
11	23	36	50	65	81
12	25	39	54	70	87
13	27	42	58	75	93
14	29	45	62	80	99
15	31	48	66	85	105
16	33	51	70	90	111

Haciendo conjeturas explotando el potencial de visualización de la representación tecnológica

n/p	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
2	5	9	14	20	27
3	7	12	18	25	33
4	9	15	22	30	39
5	11	18	26	35	45
6	13	21	30	40	51
7	15	24	34	45	57
8	17	27	38	50	63
9	19	30	42	55	69
10	21	33	46	60	75
11	23	36	50	65	81
12	25	39	54	70	87
13	27	42	58	75	93
14	29	45	62	80	99
15	31	48	66	85	105
16	33	51	70	90	111

Demostración de la conjetura

No se pueden obtener las potencias de 2: un razonamiento basado en la equivalencia entre 'ser una potencia de dos' y 'no tener un divisor impar'

- Explotando la formula:

$$S(n,p)=p(2n+p-1)/2$$

- Si p es par, $p/2$ es un número entero y $2n+p-1$ es impar
- Si p es impar, $2n+p-1$ es par y $(2n+p-1)/2$ es un número entero

Se pueden obtener todos los otros números: un razonamiento inspirado por el trabajo de alumnos de primaria

- Si $p=2m$,

$$k-m+1, \ldots, k, k+1, \ldots, k+m$$

$$S=m(2k+1) \text{ y } k \geq m \quad (1)$$

- Si $p=2m+1$

$$k-m \ldots, k, \ldots, m+k$$

$$S=k(2m+1) \text{ y } k>m \quad (2)$$

- Intercambiamos m y k en (2)

$$S=m(2k+1) \text{ y } k<m \quad (2')$$

- Además, hemos demostrado que hay tantas soluciones como divisores impares de S mayores que 1

Reflexiones sobre este ejemplo

- Una vez más, el potencial de visualización de la tecnología utilizada.
- La posibilidad de utilizarlo para formular y demostrar muchas conjeturas parciales, explotando la visión recursiva favorecida por la hoja de cálculo.
- Sin embargo, una demostración de la conjetura que necesita un juego sutil con las expresiones simbólicas y sus interpretaciones posibles, y muestra también la productividad de juegos formales como el intercambio de m y k, una productividad ya destacada por Leibniz.

¿Qué lecciones para la enseñanza?

- La importancia de tener en cuenta desde el inicio de la escolarización que las representaciones contribuyen a la conceptualización y a la resolución de problemas, tanto por sus potencialidades estrictamente semióticas y heurísticas como sus potencialidades operativas, y que las tres interactúan en el trabajo matemático.
- La importancia de trabajar las conexiones entre las representaciones, ya sea en forma de conversiones entre registros o de modo más general.
- La importancia de cultivar la dimensión epistémica y no sólo pragmática del cálculo en los registros simbólicos.

¿Qué lecciones para la enseñanza?

- Los múltiples recursos que proporcionan las tecnologías digitales para poner las representaciones al servicio de la comprensión y del trabajo matemático.
- Pero también la atención que debe prestarse al hecho de que un uso educativo productivo de los recursos tecnológicos no es evidente.
- La necesidad de tener en cuenta las aportaciones del enfoque instrumental sobre las tecnologías educativas que se ha desarrollado en los últimos veinte años, y particularmente:
  - la distinción entre artefacto e instrumento,
  - la puesta en evidencia de la complejidad de las génesis instrumentales,
  - el desequilibrio entre el potencial pragmático y epistémico del cálculo inducido por estas tecnologías, especialmente los CAS, y la necesidad de construir tareas específicas para reforzar su potencial epistémico.

Muchas gracias por su atención!

Una segunda generalización

- Problema de geometría similar encontrado en un libro matemático del siglo XVIII, y con el mismo valor (a+b)/4.
- ¿Se puede explicar esta coincidencia?
- ¿Podemos caracterizar los problemas en los que esto ocurre?

- Sea f la función que asocia a (a,b) el valor para el que se alcanza el mínimo.
- Supongamos, como en nuestro problema, simetría e invariancia por homotecia:

  $f(a,b)=f(b,a)$ y $f(a,a)=a/2$
  $f(ka,kb)=k.f(a,b)$

- Planteando $g(x) = f(x,1)$, obtenemos la ecuación funcional :

  $g(x)=x.g(1/x)$ con $g(1)=1/2$

- Se puede demostrar que si g es polinómica, racional o incluso analítica, entonces g es afín y es la función ya encontrada.