

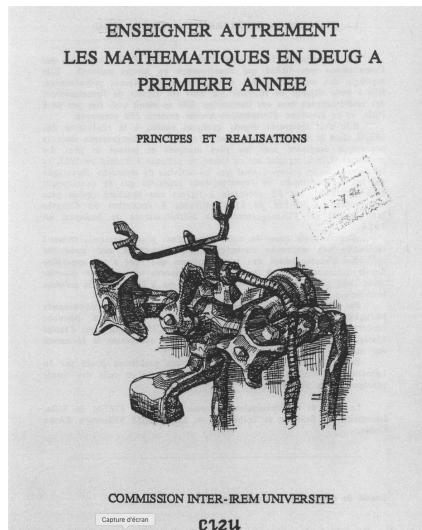
Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje al nivel universitario ¿Dónde estamos?

Michèle Artigue
LDAR, Université Paris-Cité

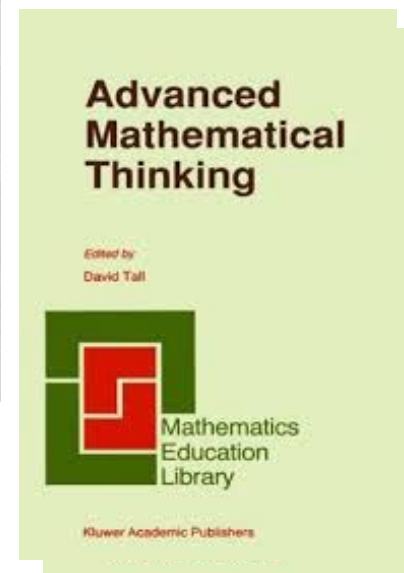
Universidad de Santander, 29 de septiembre de 2022

La investigación didáctica al nivel universitario

- Una investigación que empieza a desarrollarse ya en los años setenta.
- Las primeras tesis doctorales y experimentaciones.
- La creación de un grupo de trabajo específico (AMT) en las conferencias anuales del grupo internacional PME.
- El lanzamiento de un estudio ICMI dedicado al tema en 1998.

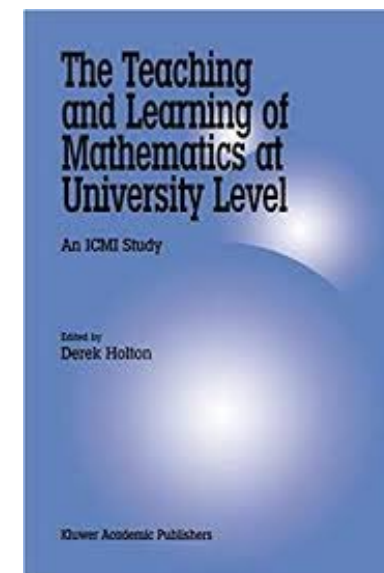


1990



1991

2001



Las orientaciones iniciales

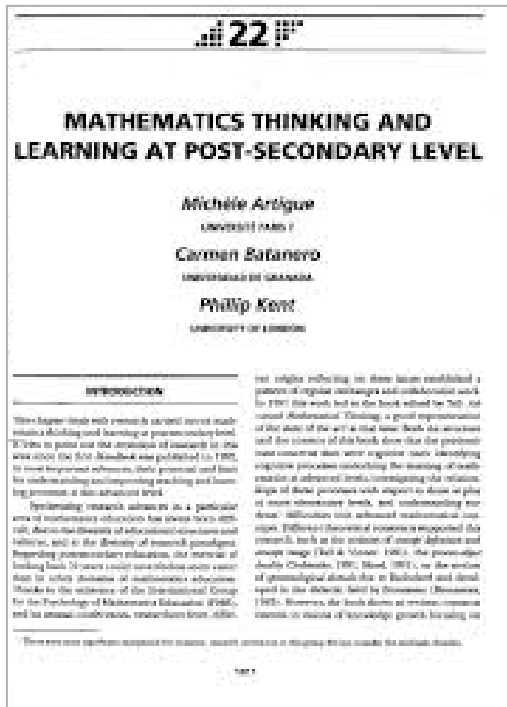
Principalmente, orientaciones epistemológicas y cognitivas, poniendo el énfasis en la identificación de obstáculos epistemológicos (concepto de límite), y en las discontinuidades del aprendizaje, discontinuidades entre formas de pensamiento (intuitivo y procedural/formal), entre dominios (álgebra/análisis).

La emergencia de teorías de aprendizaje como la teoría APOS inspirada por la visión epistemológica de Piaget y particularmente la idea de abstracción reflexiva.

Prometedoras ingenierías didácticas/experimentaciones para la enseñanza de ciertos conceptos (los límites de sucesiones de números y funciones, la integral de Riemann, las ecuaciones diferenciales, el álgebra lineal...), basadas en tales estudios epistemológicos y cognitivos.

Investigaciones también sobre como se pueden explotar las tecnologías digitales (programación, representaciones gráficas, CAS).

La intensificación de la investigación en este siglo



2007

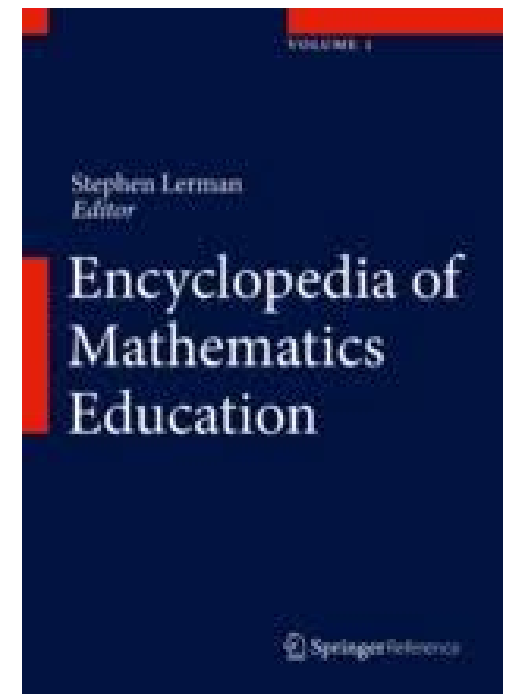
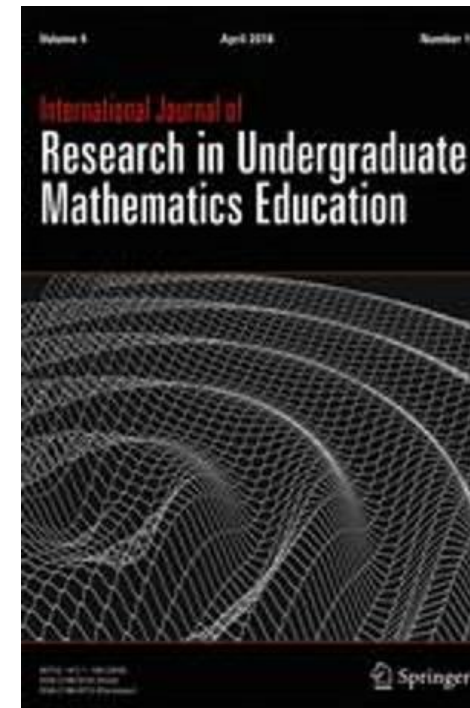


2012



2015

2020



La evolución de la investigación

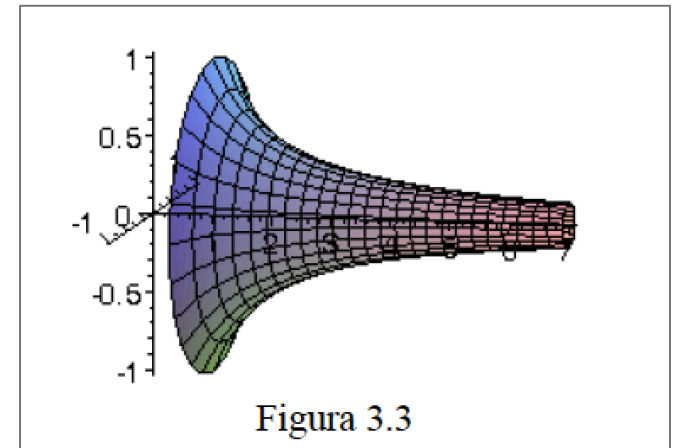
Consolidación y enriquecimiento de las perspectivas cognitivas y epistemológicas

Consolidación y enriquecimiento: la tesis de Alejandro González-Martín (2005)

- Tesis doctoral sobre integrales impropias: comprender las dificultades de los estudiantes y tratar de superarlas.
- Un tema nuevo y más avanzado.
- Un importante trabajo histórico-epistemológico y aportaciones originales a la investigación sobre obstáculos epistemológicos.

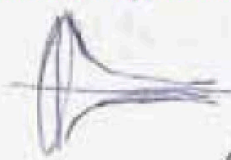
Nuevas formas del obstáculo geométrico

- La convicción de que una forma infinita del plano (o del espacio) tiene necesariamente un área (o volumen) infinito.
- La convicción de que la finitud del área y del volumen van necesariamente a la par



Creo que depende del carácter de la integral, si ésta converge o no. Pues si ~~diverge~~ converge, el área es infinita, ~~de girar el sólido tiene volumen infinito.~~

Como ejemplo, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, su integral impropia es convergente, ~~al hacerla girar alrededor del eje OX forma el sólido que se observa en la siguiente con volumen infinito.~~



La trompeta hiperbólica, fuente de controversias en el siglo XVII entre Toricelli y Hobbes

Consolidación y enriquecimiento: la tesis de Alejandro González-Martín (2005)

- Tesis doctoral sobre integrales impropias: comprender las dificultades de los estudiantes y tratar de superarlas.
- Un tema nuevo y más avanzado.
- Un importante trabajo histórico-epistemológico y aportaciones originales a la investigación sobre obstáculos epistemológicos.
- Ingeniería didáctica aprovechando el potencial tecnológico, combinando perspectivas gráficas, numéricas y simbólicas, y también tomando en cuenta las nuevas aportaciones de la aproximación instrumental en didáctica de las matemáticas.

Conexiones y flexibilidades

- El reconocimiento del papel esencial que las conexiones entre contextos, marcos, registros de representación, puntos de vista, juegan en los procesos de conceptualización.
- Una evolución sostenida:
 - por la creciente atención prestada en didáctica a la dimensión semiótica de la actividad matemática,
 - por la evolución tecnológica y las nuevas potencialidades semióticas que ofrece.

El caso del álgebra lineal (Dorier, Hillel, Sierpinska, Pavlopoulou, Alves Dias...)

Diferentes lenguajes:

- Geométrico
- Algebraico
- Abstracto

Diferentes puntos de vista:

- Cartesiano
- Paramétrico

Diferentes registros:

- Gráfico
- Tablas, matrices
- Expresiones algebraicas
- Simbólico formal

Diferentes modos de razonamiento:

- Sintético-geométrico
- Analítico-aritmético
- Analítico-estructural



Un ejemplo más reciente (Larson & Zandieh, 2013)

How do you symbolically and geometrically interpret or make sense of $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, where A is a 2×2 matrix and \mathbf{x} and \mathbf{b} are 2×1 vectors?

The framework's power is in its potential to help teachers, researchers, and curriculum designers better understand ways of supporting students in developing the ability to move flexibly among interpretations to powerfully leverage the analytic tools of linear algebra.

Interpretation of $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$	Symbolic Representation	Geometric Representation
Linear combination (LC) interpretation $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$	A: set of column vectors $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ x: weights (x_1, x_2) on column vectors of A b: resultant vector	
System of equations interpretation $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$	A: entries viewed as coefficients $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ x: solution (x_1, x_2) b: two real numbers (b_1, b_2)	
Transformation interpretation T: $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{b}$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$	A: matrix that transforms x: input vector b: output vector	

La evolución de la investigación

El giro socio-cultural (“socio-cultural turn”)

El giro “socio-cultural”

- Una evolución más global del campo didáctico, tomando una diversidad de formas según las culturas didácticas.
- En la didáctica francesa, una evolución que se expresa a través de:
 - la creciente influencia de la obra de Vygotski, Leontiev y de las teorías de la actividad,
 - el desarrollo y la creciente influencia de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) de Yves Chevallard.
- El caso emblemático de las investigaciones sobre la transición secundaria/universidad.

Una visión renovada de la transición secundaria/universidad

- Considerándola como una transición entre instituciones/culturas, necesariamente problemática debido:
 - a cambios en las normas y los valores institucionales/culturales relativos al conocimiento y a las prácticas matemáticas,
 - a la naturaleza implícita de muchos de estos normas y valores, y de su transmisión.
- Una atención que pues se desplaza del funcionamiento cognitivo del estudiante hacia los sistemas didácticos que condicionan lo que puede aprender y cómo, y más allá a los factores que condicionan el funcionamiento de estos sistemas didácticos.

Un trabajo pionero: la tesis de Frédéric Praslon (2000)

- Objeto : estudiar la naturaleza de la transición del bachillerato a la universidad sobre la noción de derivada y su entorno, en Francia.
- Marco teórico: La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) enriquecida con las aportaciones de la investigación didáctica sobre Cálculo y Análisis.
- Una metodología que combina:
 - el análisis de programas, libros de texto, hojas de trabajos dirigidos, textos de exámenes,
 - pruebas diagnósticas en la entrada a la universidad,
 - y una ingeniería didáctica en forma de talleres regulares durante el primer año de universidad.

Los principales resultados

- La evidencia, visualizada por mapas conceptuales, de que ya existe un universo sustancial en torno a la noción de derivada en la enseñanza secundaria, pero que se extiende considerablemente en los primeros seis meses de la universidad.
- La prueba de que no hay una transición radical del mundo matemático informal al mundo formal, de un cálculo intuitivo y algorítmico al mundo de la aproximación específico al análisis, sino más bien una acumulación de micro-rupturas menos visibles y muy mal gestionadas por la institución universitaria.

Una acumulación de micro-rupturas

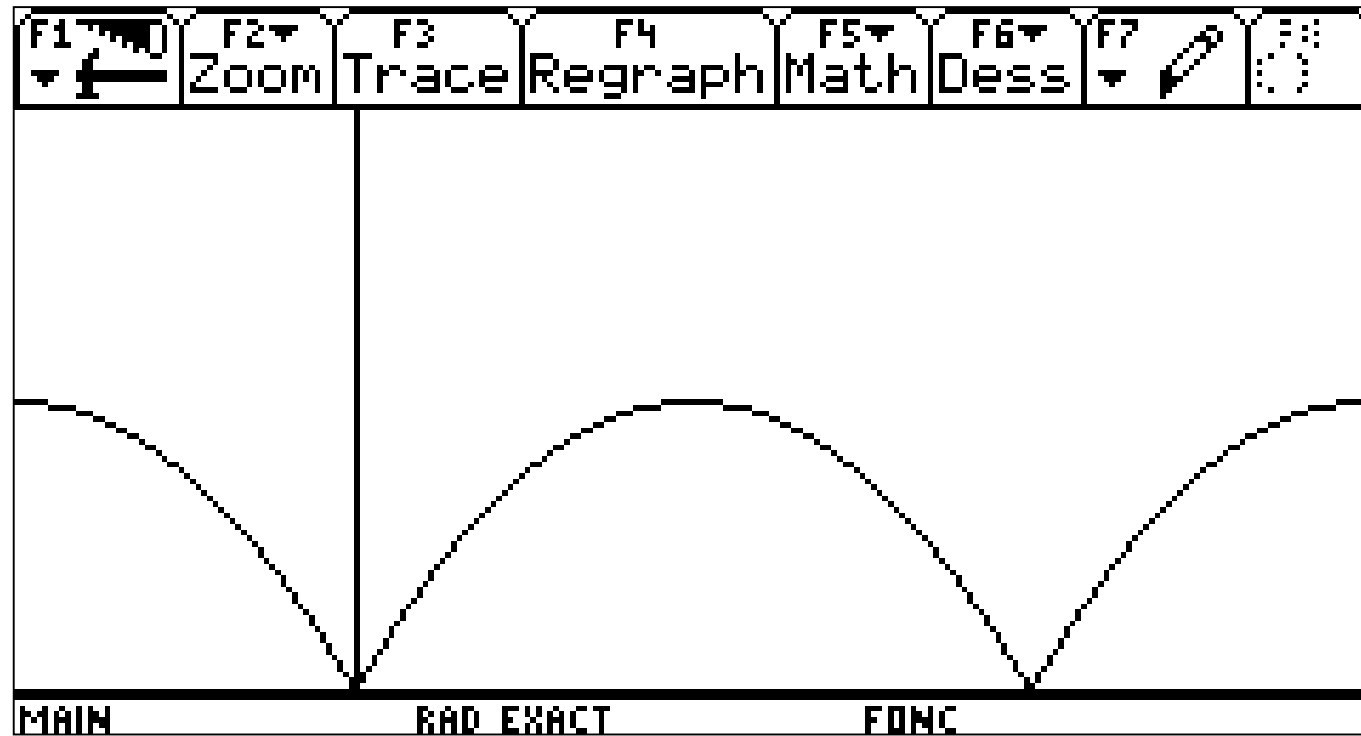
- Una aceleración de la velocidad de introducción de nuevos objetos.
- Una creciente diversidad de tareas.
- Mayor autonomía requerida en los procesos de resolución.
- Nuevos equilibrios entre lo particular y lo general, entre las dimensiones de herramienta y objeto de los conceptos matemáticos.
- Objetos más controlados por definiciones, resultados más sistemáticamente demostrados, y demostraciones que ya no son sólo como “cereza en el pastel”, sino que adquieren un valor de método.

Todo esto creando un vacío didáctico que los estudiantes deben esencialmente llenar por sí mismos

Una tarea situada entonces en este vacío didáctico

- Se considera la función f periódica de periodo 1 definida por $f(x)=x.(1-x)$ sobre el intervalo $[0, 1[$ (gráfico dado sobre $[-3,3]$)
- Q1 : Se pide si f es continua, derivable.
- Q2 : Se introduce formalmente la noción de derivada simétrica y se pide calcular las derivadas y derivadas simétricas de f si existen en $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, 0 y compararlas.
- Q3 : Los estudiantes deben decidir sobre la validez de las siguientes tres conjeturas, justificando sus respuestas:
 - C1: Toda función par definida sobre \mathbb{R} tiene una derivada simétrica en 0.
 - C2 : Toda función par definida sobre \mathbb{R} tiene una derivada en 0.
 - C3 : Si una función definida sobre \mathbb{R} tiene una derivada en a , tiene también una derivada simétrica en a y las dos son iguales.

$$f'(s(a)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

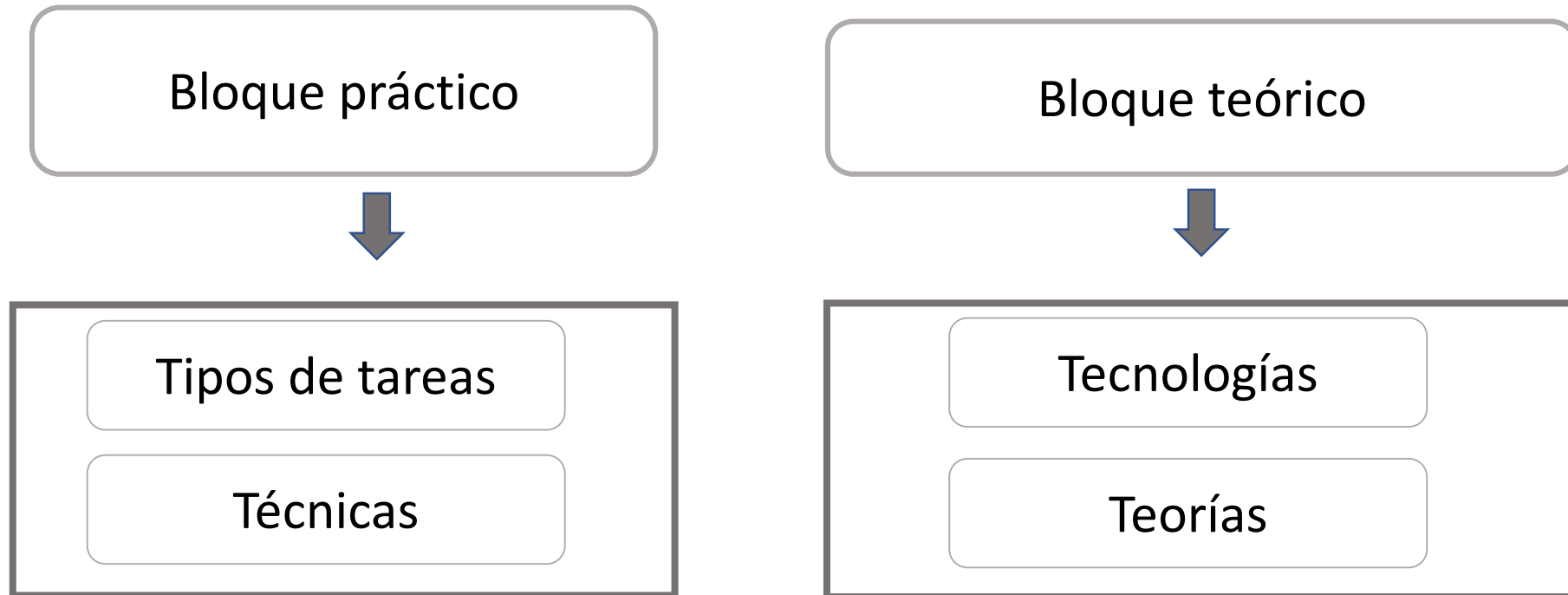


¿Qué hacen los estudiantes?

- Q1: $\frac{1}{3}$ de los estudiantes no percibe el problema, $\frac{1}{4}$ identifica que no hay derivada en 0, generalmente con apoyo en el registro gráfico.
- Q2 : Aceptan trabajar con la noción introducida formalmente, explotan la definición correctamente en los casos sencillos, pero caen en la trampa del 0, incluso los con respuesta correcta a Q1.
- Q3 : Pocas respuestas y poco apoyo en las respuestas anteriores.

Más globalmente, testes y talleres muestran estudiantes que no rechazan este tipo de trabajo sino que tienen pocos instrumentos matemáticos para hacerlo.

El concepto de praxeología al centro de la TAD



La ampliación del trabajo en el marco de la TAD

- Bosch, Fonseca & Gascón (2004) muestran, en España, la discontinuidad entre la organización praxeológica del bachillerato y la de la universidad en cuanto a la noción de límite, y sus efectos sobre los estudiantes.
- Analia Bergé (2005) estudia la evolución de la relación a la completitud de estudiantes argentinos a lo largo de los 4 años de sus estudios universitarios, relacionándola con las características de los diferentes cursos seguidos.
- Ridha Najjar (2010) estudia la transición del bachillerato a las clases preparatorias sobre la noción de función en el contexto tunecino, mostrando la ruptura que constituye la nueva inserción de las funciones en el dominio conjuntista, luego el álgebra de las estructuras.
- Y investigaciones también en Alemaña, Dinamarca..., como muestran los actas de los coloquios INDRUM y CERME.

La tesis de Analia Bergé (2005)

- La importancia del análisis histórico proporcionando una referencia epistemológica tanto para el análisis institucional como para el cognitivo, el segundo estructurado en torno a seis ejes de desarrollo de la relación personal de los estudiantes con la completitud.
- Los resultados muestran que:
 - los cuatro cursos funcionan como instituciones aisladas; conectar sus perspectivas se deja al trabajo privado de los estudiantes;
 - incluso los estudiantes que aprueban estos cursos tienen dificultades para distinguir la completitud de la densidad y, en su gran mayoría, para comprender el papel de la completitud en el desarrollo del análisis matemático.
- Resultados confirmados por investigaciones adicionales (véase (Durand-Guerrier & Vivier, 2016) por ejemplo).

Un ejemplo de discontinuidad praxeológica en la tesis de Najjar: mostrar que una función es biyectiva

- En el bachillerato: funciones de variable real a valores reales; técnicas basadas en el teorema de la biyección, la continuidad y monotonía de la función.
- En la universidad: funciones entre conjuntos y morfismos entre estructuras algebraicas.
- Una tarea clásica en las primeras clases de la universidad: Sean E , F , G y H tres conjuntos, H teniendo por lo menos dos elementos, y f un elemento de $A(F, G)$, el conjunto de las aplicaciones de F hacia G , demostrar las equivalencias siguientes:

$$f - \text{surjective} \Leftrightarrow [\forall g, h \in A(G, H), (g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h)]$$

$$f - \text{injective} \Leftrightarrow [\forall g, h \in A(E, F), (f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h)]$$

Y también...

El desarrollo de investigaciones enfocadas:

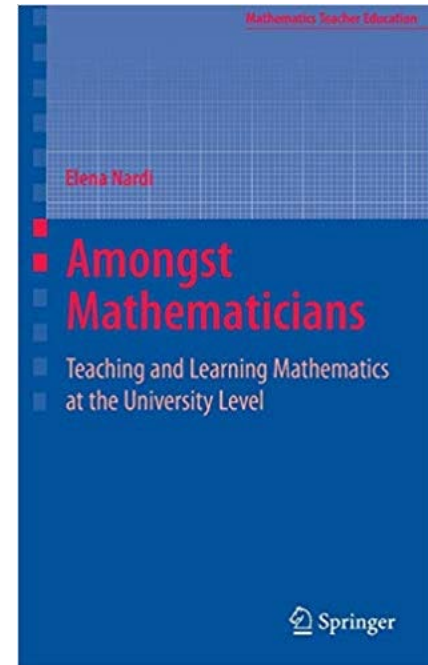
- en el discurso matemático y su apropiación por parte de los estudiantes, apoyándose en particular en enfoques discursivos, por ejemplo la teoría desarrollada por Anna Sfard y conocida como "Commmognición" (Sfard, 2008);
- sobre la lógica, la argumentación y la demostración, con énfasis en las interacciones dialécticas entre las dimensiones sintácticas y semánticas (ver (Hanna & de Villiers 2012, Parte V) y (Durand-Guerrier & Dawkins, 2020)).

La evolución de la investigación

prácticas de enseñanza, enseñanza para no-
matemáticos

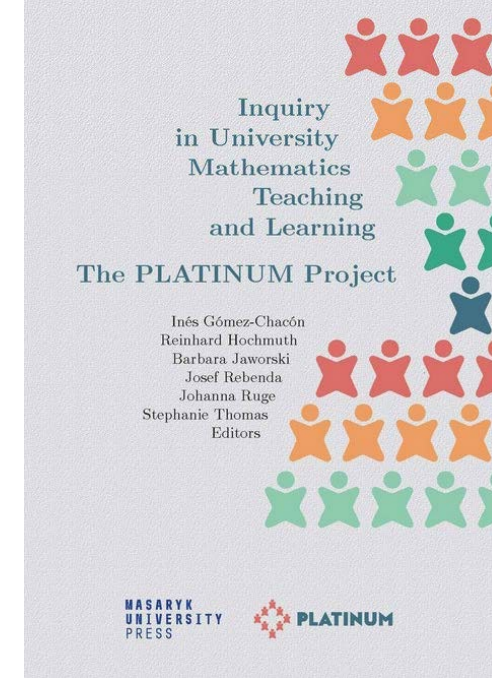
El estudio de las prácticas de enseñanza

- El trabajo pionero, hace casi 20 años, de Elena Nardi y Barbara Jaworski en la Universidad de Oxford.
- Un desarrollo importante en la última década (Nardi & Rasmussen, 2020).
- Investigaciones que conciernen tanto:
 - las prácticas tradicionales, así como las prácticas innovadoras, especialmente las basadas en prácticas de investigación (IBME);
 - la observación detallada de algunos profesores, así como estudios a gran escala, por ejemplo el estudio de Rasmussen y sus colegas en los Estados Unidos sobre los "switchers").



El proyecto europeo PLATINIUM

- Un proyecto que reunió a matemáticos y didactas de 8 universidades y 7 países, para conceptualizar y desarrollar la IBME al nivel universitario en matemáticas.
- Para este objetivo:
 - se elaboró un marco conceptual de la IBME mejor adaptado a la enseñanza universitaria;
 - se establecieron comunidades locales de investigación con matemáticos y didactas en las universidades parte del proyecto;
 - se produjeron recursos para la enseñanza, y también para soportar el desarrollo profesional del profesorado universitario;
 - se construyeron guías para evaluar los efectos de la IBME sobre el entendimiento conceptual de los estudiantes.



La enseñanza para no especialistas

- Una investigación aun muy minoritaria en el campo, pero que está despegando, como lo muestra la entrada correspondiente en la nueva edición de la *Enciclopedia de Educación Matemática* (Hochmuth, 2020).
- Trabajos pioneros desde los años noventa como los desarrollados por Kent, Noss y Hoyles sobre la carreras de ingeniería en Inglaterra y las prácticas matemáticas de ingenieros.
- Tesis emblemáticas recientes que muestran la creciente importancia de la TAD en este dominio también, cada vez más asociada al diseño de recorridos de estudio e investigación (REI):
 - Berta Barquero (2007) (modelización de evoluciones poblacionales)
 - Avenilde Romo Vázquez (2009) (matemáticas y proyectos de ingeniería)
 - Catarina Oliveira (2015) (enseñanza del cálculo en medicina nuclear)

Y para concluir esta parte

- Un conjunto sustancial y coherente de conocimientos y realizaciones.
- Pero cambios en la población estudiantil, los contextos y las condiciones de la educación secundaria y universitaria:
 - que nos obligan a reexaminar periódicamente la validez de los conocimientos adquiridos mediante la investigación;
 - que son una fuente de nuevas preguntas;
 - y que también renuevan los medios de la acción didáctica.

De la investigación a la acción

De la investigación a la acción

Ya en 2001, el estudio ICMI presentó una diversidad de experimentos y proyectos en varios contextos, basados en los resultados de la investigación, entre ellos:

- El Analysis-project en la Universidad de Warwick,
- El debate científico en la Universidad de Grenoble I
- La enseñanza a través de proyectos y modelización en la Universidad de Roskilde
- El proyecto « Active/Interactive Classroom » en la Universidad de Duke.

Desde entonces...

- Cada vez más acciones dirigidas a los estudiantes de secundaria y/o a sus profesores.
- El desarrollo de 'bridging courses' y estructuras de apoyo para promover la aculturación de los estudiantes a la universidad.
- Cada vez más acciones dirigidas a la formación de tutores y académicos, al trabajo conjunto de matemáticos y didactas.
- El papel cada vez más importante que se otorga a la tecnología para apoyar la comunicación y los intercambios entre estudiantes, estudiantes y profesores, para promover el trabajo en colaboración, para apoyar el trabajo personal de los estudiantes y para ampliar la gama de recursos disponibles para estudiantes y profesores.

EpiDEMES: una nueva revista (<https://epidememes.episciences.org/>)

EpiDEMES

Accueil

Articles

Conseils pour
soumettre

Comité éditorial

A propos de la revue

Crédits

Mon espace

Accueil

L'*Épjournal de Didactique et Epistémologie des Mathématiques pour l'Enseignement Supérieur* (EpiDEMES) est une revue scientifique à comité de lecture fondée en 2019 sur une initiative de Thomas Hausberger (Université de Montpellier). La sélection des articles suit un processus éditorial classique (évaluation des soumissions par le comité éditorial sur avis de référés). Les articles sont publiés en français ou en anglais et comprennent un résumé dans les deux langues.

Les domaines couverts par la revue sont la didactique et l'épistémologie des mathématiques (classification AMS 97-XX Mathematics Education) avec pour objet d'étude les mathématiques de l'enseignement supérieur et les phénomènes liés à leur enseignement-apprentissage. EpiDEMES vise la constitution d'une base documentaire pour la formation initiale et continue des enseignants du supérieur.

Pour consulter la composition du comité éditorial de la revue, [cliquez ici](#).

Pour soumettre un article, rendez-vous sur la [page de soumission](#).

Épisciences

EpiDEMES a également pour ambition de rendre utilisable la plateforme [Épisciences](#) par la communauté mathématique et d'en faire la promotion. La plateforme Épisciences (un nouvel outil d'édition scientifique) permet la publication, via un processus classique de relecture, d'articles préalablement déposés dans une archive ouverte. Développée par le [CCSD](#) (unité mixte de services CNRS/INRIA/université de Lyon), cette plateforme constitue donc un support technique de grande qualité et bénéficie du soutien pérenne des institutions publiques. Son évolution (développements de l'interface et mise en place de nouveaux outils) se fait en lien étroit avec la communauté scientifique.

Mode de publication et accès libre aux articles

La revue est publiée électroniquement sur la plateforme Épisciences. Les articles publiés restent la propriété de leurs auteurs et sont disponibles sur le site internet de la revue, sans frais pour les [auteurs](#) ni les lecteurs.

Pour plus d'informations sur la soumission d'articles, voyez la rubrique [Conseils pour soumettre](#).

Muchas gracias por su atención!

Referencias

- Artigue, M. (2019). Evolución de las investigaciones en didáctica de las matemáticas en el nivel universitario. *Revista de la Real Academia de Ciencias Canaria*, Vol. XXXI, 75-93.
- Artigue, M., Batanero, C., & Kent, P. (2007). Learning mathematics at post-secondary level. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1011-1049). Information Age Publishing, Inc., Greenwich, Connecticut
- Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas*. Doctoral thesis. Universidad Autónoma de Barcelona.
- Bergé, A. (2004). *Un estudio de la evolución del pensamiento matemático: el ejemplo de la conceptualización del conjunto de los números reales y de la noción de completitud en la enseñanza universitaria*. Doctoral thesis. Universidad de Buenos Aires.
- Bosch, M., Fonseca, C., & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24(2/3), 205-250.
- Commission interIREM Université (Ed.) (1990). *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année*. Lyon : LIRDIS.
- Dorier, J.-L. (Ed.) (2001). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. La Pensée Sauvage.

Referencias

- González-Martín, A. (2005). *La generalización de la integral definida desde las perspectivas gráfica, numérica y algebraica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje*. Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna.
- Hochmuth, R. (2020). Service-Courses in University Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education (second edition)*. Springer.
- Holton D. (Ed.) (2001). *The teaching and learning of mathematics at university level. A ICMI Study*. Kluwer Academic Publishers.
- Larson, C., & Zandieh, M. (2013). Three interpretations of the matrix equation $Ax=b$. *For the Learning of Mathematics*, 33(2), 11-17.
- Lerman, S. (Ed.) (2020). *Encyclopedia of Mathematics Education (second edition)*. Springer.
- Najar, R. (2010). *Effets des choix institutionnels sur les possibilités d'apprentissage des étudiants. Cas des notions ensemblistes fonctionnelles dans la transition secondaire/supérieur*. Tesis Doctoral. Université Paris Diderot Paris 7 & Université virtuelle de Tunis.
- Nardi, E. (2008). *Amongst Mathematicians. Teaching and Learning Mathematics at the University Level*. Springer.

Referencias

- Nardi, E., & Rasmussen, C. (2019). Teaching practices at university level. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education (second edition)*. Springer.
- Oliveira, C. (2015). *Una posible "razón de ser" del Cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional*. Tesis Doctoral. Universidad de Vigo.
- Romo-Vazquez, A. (2009). *La formation de mathématiques des futurs ingénieurs*. Tesis doctoral. Université Paris-Diderot. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00470285/document>
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.
- Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers.
- Thomas, M., de Freitas Druck, O., Huillet, D., Ju, M.K., Nardi, E., Rasmussen, C., & Xie, J. (2014). Key Mathematical Concepts in the Transition from Secondary School to University. In Sung Je Cho (Ed.) *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 265-284). Springer.
- Vivier, L., & Durand-Guerrier, V. (2016). Densité de D , complétude de R et analyse réelle - Première approche. *First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics*, Mars 2016, Montpellier, France. [hal-01337887](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01337887)