Revista de la Real Academia de Ciencias Canaria
Volume **XXXI**, **(2019)** pp. **75–93**

EVOLUCIÓN DE LAS INVESTIGACIONES EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA EN EL NIVEL UNIVERSITARIO

Michèle Artigue
LDAR, Université Paris-Diderot
Paris, FRANCE

Abstract. Se presentan en este trabajo algunas de las evoluciones particularmente importantes de la investigación en Didáctica de las Matemáticas en el ámbito universitario: la evolución de las perspectivas epistemológicas y cognitivas, el giro sociocultural, la creciente atención prestada a la formación matemática de los estudiantes no especialistas, así como a las prácticas de enseñanza. Posteriormente se mencionarán más brevemente, antes de concluir, las relaciones entre la investigación y las acciones a desarrollar en el futuro.

1. **Introducción.** Este texto está directamente inspirado en mi ponencia en el marco de la celebración del cincuentenario de la creación de los estudios de Matemáticas de la Universidad de La Laguna. Veinticinco años antes, ya había participado en una primera celebración impartiendo una ponencia sobre la didáctica del Cálculo y del Análisis Matemático, un tema en el que se había centrado la investigación didáctica en el nivel universitario. En ese momento, traté de elaborar un estado del arte de la investigación en este campo y del conocimiento que había producido. Como se desprende del texto resultante, publicado en las actas del evento (Artigue, 1996), había insistido en la orientación epistemológica y cognitiva de las investigaciones, y en el énfasis puesto en la identificación de las discontinuidades y rupturas que marcan, para los estudiantes, la entrada en este campo de las matemáticas. Ya se expresaban a través de varias construcciones conceptuales. Se presentaron los enfoques, en términos de obstáculos epistemológicos, utilizados en diversos trabajos, en particular los que se referían al concepto de límite, así como las discontinuidades identificadas entre el álgebra y el Análisis Matemático. La investigación mostraba también realizaciones didácticas que intentaban ir más allá de los límites de la enseñanza usual y había evocado algunas ingenierías didácticas desarrolladas en Francia para la enseñanza de las sucesiones, la integral de Riemann o para una enseñanza de las ecuaciones diferenciales combinando aproximaciones cualitativa, numérica y algebraica. También se hizo un recorrido de la evolución curricular de la enseñanza secundaria en Francia desde la reforma crucial de 1902 y se terminó evocando las posibilidades que ofrecía el Análisis No Estándar para facilitar la entrada de los estudiantes en este campo, posibilidades que trataban de explotar varios experimentos.

El tema de mi conferencia del cincuentenario es más amplio, ya que trata de la investigación sobre la enseñanza universitaria globalmente. Esta investigación no se limita al campo del Cálculo y del Análisis Matemático, aunque sigue siendo dominante. En 25 años, la investigación ha evolucionado considerablemente y lo que llama la atención a primera vista es el dinamismo del campo, sin duda relacionado parcialmente con la masificación de la enseñanza universitaria y la consiguiente evolución de las poblaciones que acoge.

En 1994, la principal referencia era el libro editado por David Tall (Tall, 1991) basado en las actividades del grupo de trabajo *Advanced Mathematical Thinking*, un grupo creado en el marco de las conferencias anuales PME (Psychology of Mathematics Education). Era miembro de este grupo y había sido responsable del capítulo sobre Análisis (Artigue 1991). Este libro muestra bien que en aquel momento se concentraba la investigación en las áreas del Cálculo y Análisis elemental, y en los conceptos fundamentales asociados: límite, continuidad, derivada e integral. El hecho de que esta enseñanza fuera obligatoria para muchos estudiantes, y la barrera que constituía, dada las altas tasas de reprobación observadas, no era ajena a ello. En la década de 1980, esto había motivado a muchos proyectos que buscaban alternativas.

Desde entonces, las publicaciones y los textos de referencia se han multiplicado. A finales de los años 90, ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) desarrolló un estudio sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a nivel universitario y el libro resultante (Holton, 2001) se convirtió rápidamente en otra obra de referencia. Además, se realizaron diversas síntesis como la que elaboré junto con Carmen Batanero y Philip Kent (Artigue, Batanero & Kent, 2007) o, más recientemente, las síntesis realizadas para los congresos ICME[1]-12 (Thomas et al. 2014) y ICME-13 (Biza, Giraldo, Hochmuth, Khakbaz & Rasmussen, 2016), y el capítulo que sintetiza el trabajo realizado en el marco de los coloquios CERME[2] en el libro producido para celebrar el vigésimo aniversario de la ERME[3] , la Sociedad Europea para la Investigación en Educación Matemática (Winslow, Gueudet, Hochmuth & Nardi 2018). El campo también se ha estructurado con la creación de la red INDRUM (International Network for Didactic Research on University Mathematics) en 2015. La primera conferencia de la red tuvo lugar en Montpellier en 2016 (Nardi, Winslow & Hausberger, 2016) y la segunda en Kristiansand en 2018 (Durand-Guerrier, Hochmuth, Goodchild & Hogstad, 2018). El último se celebró en septiembre de 2020 en forma telemática[4]. La editorial Springer ha publicado recientemente un libro que resume las contribuciones de las dos primeras conferencias. Además, en 2015 se creó la revista IJRUME (International Journal of Research on

[1]International Congress on Mathematical Education (ICME)

[2]Congress of the European Society for Reserch in Mathematics Education (CERME)

[3]European Society for Reserch in Mathematics Education (ERME)

[4]En *https : //indrum2020.sciencesconf.org/data/pages/INDRUM2020_proceedings.pdf* se puede acceder a la Actas.

Undergraduate Mathematics Education). Por último, se debe mencionar que en la segunda versión de la Enciclopedia de Educación Matemática (Lerman, 2020), existen 10 entradas relativas a este campo de investigación, mientras que en la primera versión sólo había una entrada algo específica titulada *The teaching and learning of Calculus*.

Así que han pasado muchas cosas en 25 años. En el resto del texto, insistiré en algunas de las evoluciones que me parecen particularmente importantes: la evolución de las perspectivas epistemológicas y cognitivas, el giro sociocultural, la creciente atención prestada a la formación matemática de los estudiantes no especialistas, así como a las prácticas de enseñanza. Posteriormente mencionaré más brevemente, antes de concluir, las relaciones entre la investigación y la acción.

2. **La evolución de los enfoques epistemológicos y cognitivos.** Esta evolución no es de ninguna manera una ruptura. Combina una consolidación y un enriquecimiento de las perspectivas existentes, como muestra la síntesis (Artigue, Batanero & Kent, 2007). La ilustraré en primer lugar tomando el ejemplo de una Tesis Doctoral defendida en la Universidad de La Laguna, la Tesis Doctoral de Alejandro González-Martín, elaborada bajo la dirección del profesor Matías Camacho (González-Martín, 2005). Esta Tesis Doctoral se sitúa por su cuestionamiento y metodología en la continuidad de los trabajos existentes, especialmente en la tradición didáctica francesa. Se trata de comprender las dificultades que encuentran los estudiantes en la generalización de la noción de integral definida a la de integral impropia y de pensar cómo superarlas. El trabajo se basa en un estudio histórico-epistemológico profundizado. Este estudio, entre otros elementos, permite identificar un obstáculo epistemológico que ayudará a entender ciertas dificultades de los estudiantes, identificadas mediante cuestionarios, y que resisten visiblemente a la enseñanza habitual. Estos estudios, tanto epistemológicos como cognitivos, sirven como preliminares a la construcción de una ingeniería didáctica que intenta proponer una enseñanza más eficaz. Esta ingeniería, de base muy sólida, es objeto de unos análisis a priori y a posteriori especialmente cuidadosos en la investigación. Del desarrollo de esta ingeniería se extraen diversas conclusiones.

El obstáculo epistemológico identificado consolida el conocimiento existente sobre los obstáculos epistemológicos. De hecho, puede ser visto como una forma del obstáculo de la heterogeneidad dimensional identificado por Maggy Schneider en su Tesis Doctoral sobre la conceptualización de las nociones de área y volumen en relación con la de primitiva, en la escuela secundaria (Schneider 1988). Pero se trata de una contribución original porque el contexto, el de la extensión de la noción de integral definida, es mucho más avanzado que los habituales. Por lo tanto, pone en juego nuevas características resultantes de la intervención de conjuntos no compactos. Más específicamente, se combinan dos obstáculos:

- La convicción de que una forma infinita del plano (o del espacio) tiene necesariamente un área (o volumen) infinito.

- La convicción de que la finitud del área y del volumen van necesariamente a la par: una forma de superficie infinita no puede encerrar un volumen finito.

Están en juego en los debates históricos del siglo XVII en torno a la forma llamada trompeta de Torricelli (véase la figura 1) entre el matemático John Wallis y el filósofo Thomas Hobbes, que se relatan en la tesis.

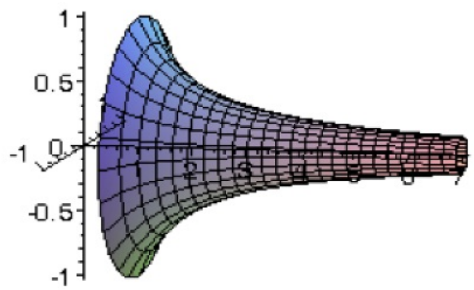
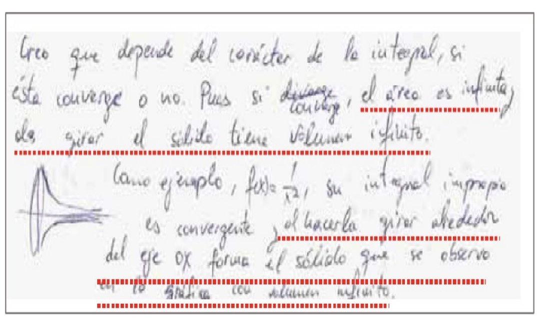


Figura 1: Trompeta de Torricelli (González-Martín, 2005,p. 82)

Esta trompeta está, en efecto, generada por la rotación alrededor del eje horizontal de la hipérbola de ecuación $y = 1/x$ para valores de x desde 1 hasta el infinito. Su área, expresada por la integral impropia divergente $\int_1^\infty \frac{2\pi}{x}\, dx$ es por lo tanto infinita, mientras que su volumen, expresado por la integral impropia convergente $\int_1^\infty \frac{\pi}{x^2}\, dx$, es finito. De la Tesis Doctoral se desprende claramente lo difícil que es para los estudiantes enfrentarse a este obstáculo, incluso cuando dominan los criterios de Riemann para la convergencia de dichas integrales, como se muestra, por ejemplo, en la respuesta, reproducida en la figura 2, a la pregunta siguiente: *¿Crees que el siguiente razonamiento es verdadero o falso ? ¿por qué ? Si una región tiene un área infinita, el solido formado al rotar esa región alrededor de uno de los ejes tiene un volumen infinito.*


Creo que depende del carácter de la integral, si ésta converge o no. Pues si ~~diverge~~ converge, el área es infinita, al girar el sólido tiene volumen infinito.

Como ejemplo, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, su integral impropia es convergente y al hacerla girar alrededor del eje OX forma el sólido que se observo en la gráfica con volumen infinito.

Figura 2: Respuesta de un estudiante (González-Martín, 2005, p. 323)

Pero esta Tesis Doctoral también muestra la evolución de las perspectivas cognitivas debida a la atención creciente que se presta a la diversidad de las representaciones semióticas, modos de pensamiento y formas de discurso y a la flexibilidad requerida para su apropiación y uso. La influencia de las herramientas digitales y su potencial semiótico no es ajena a ello.

En la ingeniería didáctica desarrollada, Alejandro González-Martín combina aproximaciones numérica, gráfica y simbólica, utilizando las potencialidades que ofrece el software Maple. Se refiere teóricamente a la noción de registro semiótico (Duval, 1995). Además, el uso de Maple también le lleva a tener en cuenta cuestiones de génesis instrumental, basándose en los recientes avances de la aproximación instrumental (Artigue, 2002).

Las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal realizadas en los años 90 son también un buen ejemplo de esta evolución de las perspectivas cognitivas, como lo muestra la obra colectiva (Dorier, 2000). Como apunta Dorier (2000, p. 274):

Linear algebra embodies an "explosive compound" of languages, settings and systems of representation. There is the geometric language of lines and planes, the algebraic language of linear equations, n-tuples and matrices, the abstract language of vector spaces and linear transformations. There are the settings of geometry, of algebra, but also of graphical representations which allow a metaphoric use of geometry in higher dimensional spaces. There are the "graphical", the "tabular" and the "symbolic" registers of the languages of linear algebra?.

Esta diversidad se combina con la de los modos de razonamiento y Sierpinska (2000), por ejemplo, distingue entre tres modos de razonamiento diferentes que se entrelazan fuertemente en álgebra lineal: el *sintético y geométrico* en el que los objetos matemáticos son, de alguna manera, entregados directamente a la mente, que trata de captarlos y describirlos; el modo *analítico-aritmético* en el que los objetos están dados indirectamente por fórmulas o ecuaciones que hacen posibles los cálculos con ellos; y el modo *analítico-estructural* en el que los objetos también están dados indirectamente, pero esta vez a través de un conjunto de propiedades.

Las investigaciones también muestran la baja sensibilidad de los profesores a las dificultades que esta diversidad genera para los estudiantes, más allá de las que resultan del hecho que, para muchos estudiantes, el encuentro con la estructura de espacio vectorial es el primer encuentro con una estructura axiomática y el nivel de abstracción asociado. Familiarizados con toda esta diversidad, los profesores saltan de una representación, de un modo de razonamiento a otro, según las necesidades que encuentran, sin explicar a los estudiantes, generalmente, estos saltos y sus razones.

La dimensión de la evolución es claramente visible en las investigaciones recientes. Siguiendo en el campo del álgebra lineal me limitaré aquí a mencionar la publicación (Larson & Zandieh, 2013). Allí se propone un marco conceptual para ayudar a los profesores, investigadores y desarrolladores curriculares a comprender mejor cómo ayudar a los estudiantes a navegar con flexibilidad entre interpretaciones para aprovechar el poder de las herramientas analíticas del álgebra lineal. El articulo se centra en la diversidad de interpretaciones posibles de la ecuación matricial $Ax = b$, que el marco relaciona con representaciones simbólicas y geométricas. El interés del marco se ilustra con el análisis de las respuestas de estudiantes a la siguiente pregunta: "Cómo interpreta o da sentido simbólicamente a $Ax = b$, donde A es una matriz 2x2, y x y b son vectores 2x1 (Figura 3).

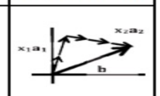
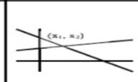
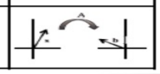
Interpretation of Ax=b	Symbolic Representation	Geometric Representation
Linear combination (LC) interpretation $x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} = \mathbf{b}$	A: set of column vectors $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2})$ **x**: weights (x_1, x_2) on column vectors of A **b**: resultant vector	
System of equations interpretation $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$	A: entries viewed as coefficients $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ **x**: solution (x_1, x_2) **b**: two real numbers (b_1, b_2)	
Transformation interpretation $T: \mathbf{x} \mapsto \mathbf{b}$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$	A: matrix that transforms **x**: input vector **b**: output vector	

Figura 3: Three views of Ax=b (Larson & Zandieh, 2013, p. 12)

No me extenderé más en esta dimensión de la evolución, ya que el campo ha visto muchas otras igualmente importantes. La segunda dimensión que me gustaría destacar es el paso de perspectivas cognitivas a institucionales.

3. **La evolución hacia perspectivas institucionales.** En esta evolución, el centro de atención se desplaza desde el estudiante como sujeto cognitivo hacia las instituciones que condicionan lo que puede o no puede aprender. Las dificultades de los estudiantes se convierten en síntomas de disfunciones más sistémicas. La Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD) que se desarrolló y ganó influencia a partir de la década de 1990 (véase (Chevallard, 2019) para una presentación actualizada), desempeñó un papel importante en esta evolución, como se destaca en (Artigue, Batanero y Kent, 2007). Un trabajo pionero en esta dirección fue la Tesis Doctoral de mi estudiante Frédéric Praslon (Praslon, 2000). Ciertamente no tuvo la resonancia que hubiera tenido si él, después de su tesis, no hubiera abandonado sus prometedoras investigaciones para dedicarse a la enseñanza.

En su Tesis Doctoral, Praslon examina la enseñanza del concepto de derivada y su entorno en la transición del bachillerato a la universidad. En aquel momento, en los liceos[5] franceses, el plan de estudios ponía este concepto en primer plano, y no los conceptos a menudo considerados más fundamentales de límite y continuidad. Esta elección se basaba en la riqueza de los problemas que el concepto de derivada permite abordar y resolver, problemas que pueden así motivar su introducción y ayudar a darle sentido. Para llevar a cabo su estudio, Praslon se basó en la noción

[5] Los liceos en Francia corresponden a los tres últimos años de enseñanza secundaria con alumnos de 15 a 18 años

de praxeología, que se utiliza en la TAD para modelar cualquier tipo de práctica humana. Una praxeología, en su forma más simple (praxeología puntual), se define como un 4-tupla compuesta por: un tipo de tarea, una técnica para llevarla a cabo, un discurso llamado tecnología que describe, explica y justifica la técnica, y una teoría, conjunto de afirmaciones más generales que justifican el discurso tecnológico sí mismo. Los dos primeros componentes constituyen el bloque práctico de la praxeología y los otros dos constituyen su bloque teórico, los dos bloques constituyéndose en interacción dialéctica. La evolución de las prácticas se acompaña de una estructuración progresiva de las praxeologías puntuales en praxeologías locales que federan alrededor de un mismo discurso tecnológico un conjunto de praxeologías puntuales, luego en praxeologías regionales que agrupan praxeologías locales que comparten una misma teoría.

Praslon compara, a través del estudio de múltiples documentos, las praxeologías matemáticas respectivamente en funcionamiento en la serie S, la serie científica del bachillerato general, y en el primer año del DEUG[6] A en la universidad, la formación destinada a los futuros matemáticos y físicos. Muestra en particular que, contrariamente a lo que se afirma a menudo en aquella época, la transición del liceo a la universidad en este campo no es una transición entre matemáticas informales y formales, entre mundo proceptual o simbólico y mundo formal, entre aproximaciones intuitivas y rigurosas. Muestra que esta transición consiste más en una multiplicidad de micro rupturas a las que los profesores universitarios son tanto menos sensibles por no ser rupturas radicales. Subestiman las dificultades resultantes y dejan su gestión esencialmente a los estudiantes. Las principales rupturas identificadas son las siguientes:

- Una aceleración de la velocidad de introducción de nuevos objetos.
- Una creciente diversidad de tareas.
- Mayor autonomía requerida en los procesos de resolución.
- Nuevos equilibrios entre lo particular y lo general, entre las dimensiones de herramienta y objeto de los conceptos matemáticos
- Objetos más controlados por definiciones, resultados más sistemáticamente demostrados, y demostraciones que ya no son sólo como "guinda sobre el pastel", sino que adquieren un valor de método.

Para hacerlas visibles y ayudar a tenerlas en cuenta en la enseñanza, Praslon diseñará un conjunto de tareas que, según sus análisis, se encuentran en el vacío didáctico resultante entre el liceo y la universidad. Se trata de tareas que a priori se pueden resolver con el conocimiento del liceo, pero que son muy poco probables en él. Presentan ciertas características de las tareas universitarias, pero se supone que no son problemáticas para los estudiantes que ingresan al DEUG A en aquella época y no se trabajan. Un ejemplo representativo es la siguiente tarea.

[6]Diplôme d'etudes universitaires générales.

- Se considera la función f periódica de período 1 definida por $f(x) = x.(1 - x)$ sobre el intervalo $[0, 1[$(gráfico dado sobre $[-3, 3]$, ver figura 4)

Q1. Se pide si f es continua, derivable.

Q2. Se introduce la noción de derivada simétrica y se pide calcular las derivadas y derivadas simétricas de F si existen en $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0$ y compararlas.

Q3. Los estudiantes deben decidir sobre la validez de las siguientes tres conjeturas, justificando sus respuestas:

- C1.Toda función par definida sobre $\mathbb{R}$ tiene una derivada simétrica en 0.
- C2.Toda función par definida sobre $\mathbb{R}$ tiene una derivada en 0.
- C3. Si una función definida sobre $\mathbb{R}$ tiene una derivada en a, tiene también una derivada simétrica en a y las dos son iguales.

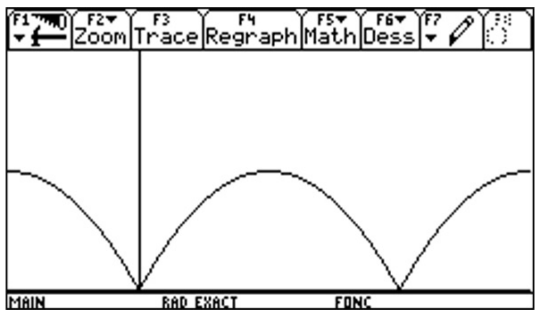


Figura 4: Representación gráfica de la función f

De hecho, en aquella época, se trata de un ejemplo representativo del vacío didáctico identificado entre liceo y universidad. La expresión analítica proporcionada para la función f es una expresión polinómica familiar para los alumnos de secundaria, pero sólo es válida en un intervalo, y no están muy familiarizados con las funciones definidas a trozos. Sin embargo, se proporciona una representación gráfica que excede la amplitud de un período. Mostrar la continuidad y la derivabilidad de una función es un tipo de tarea clásica en bachillerato, y los alumnos desarrollan rutinas discursivas para resolverlo, basándose en el hecho de que las operaciones usuales y la composición conservan estas propiedades. En este caso, las rutinas conocidas no son suficientes; sin embargo, la representación gráfica muestra claramente un punto anguloso. No es común que los alumnos de secundaria sean introducidos a una nueva noción con una definición formal sin actividades preliminares, aquí:

$$f's(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(f(a+h) - f(a-h))}{2h}$$

Sin embargo, esta definición se aproxima a la, familiar, de la derivada. Por último, los alumnos de secundaria no se enfrentan comúnmente a la cuestión de la validez de afirmaciones generales como las que se proponen en las tres conjeturas de la tercera pregunta, pero las respuestas a las preguntas anteriores deberían ayudarles a abordarlas. Por lo tanto, la tarea es factible con las herramientas de análisis del liceo, pero poco probable en la enseñanza secundaria. Tampoco corresponde a un tipo de tarea que se encuentre en las hojas de trabajo de la universidad, incluso al principio del curso.

Las respuestas de los estudiantes que empiezan en la universidad muestran que un tercio de ellos no perciben el problema de derivabilidad en la pregunta 1. Estos estudiantes activan su rutina habitual diciendo que f es continua y derivable en $[0, 1[$ porque es una función polinómica y que, por periodicidad, estas propiedades se extienden a $\mathbb{R}$. Sólo la cuarta parte da una respuesta correcta y argumentada. Estas respuestas se basan generalmente en la lectura de la representación gráfica y la identificación de los puntos angulosos. Las respuestas a la pregunta Q2 muestran que la gran mayoría de los estudiantes son capaces de interpretar la definición y utilizarla en casos no problemáticos. Pero casi siempre caen en la trampa del 0, incluso aquellos que habían dado una respuesta correcta a Q1. Finalmente, los estudiantes quedan visiblemente desorientados por Q3. Hay pocas respuestas y favorecen como contraejemplo la función valor absoluto que es obviamente para ellos el ejemplo prototípico de función continua no derivable. Este fue un trabajo pionero. Pero tiene repercusiones en varios trabajos actuales, por ejemplo los citados por Rudolf Biehler en un reciente simposio sobre la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo (Biehler, 2019) en relación con las diferencias culturales entre la educación secundaria y la superior, y las estrategias desarrolladas en el contexto de los llamados *bridging courses* que se multiplican para ayudar a los estudiantes a adaptarse a la cultura universitaria.

Las investigaciones utilizando la TAD para analizar los procesos de transición entre bachillerato y universidad, así como dentro de la propia universidad se expandieron rápidamente. Bosch, Fonseca y Gascón (2004), analizando la transición en España en torno al concepto de límite, mostraron un giro praxeológico entre bachillerato y universidad. En el bachillerato dominan praxeologías puntuales, demasiado aisladas y centradas en su bloque práctico para permitir la constitución de praxeologías locales suficientemente completas. La enseñanza universitaria, en cambio, se sitúa inmediatamente a nivel de praxeologías regionales, con una entrada por el bloque teórico, sin que las praxeologías locales que estas praxeologías regionales unifican, hayan sido suficientemente desarrolladas. En adición, se observan cambios en la distribución topogenética de las respectivas responsabilidades de los profesores y estudiantes, ya notados por Praslon.

Carl Winslow (Winslow, 2008), también contribuyó a la teorización distinguiendo dos tipos de evoluciones praxeológicas, una que se produce en la transición secundaria/superior, la otra que aparece en los estudios universitarios, generalmente, más tarde. En la primera, lo que está esencialmente en juego es la compleción de las praxeologías y su interconexión, mientras que en la segunda, es el nivel discursivo de estas primeras praxeologías, su bloque teórico, el que se convierte en objeto de estudio, a través de tipos de tareas no encontradas o muy marginales hasta entonces. Se puede establecer un vínculo con una de las rupturas mencionadas por Praslon, a saber, los nuevos equilibrios que intervienen entre las dimensiones herramienta y objeto de los conceptos matemáticos, pero su inclusión en el concepto de praxeología renueva su descripción y análisis. Esta conceptualización ha sido explotada desde entonces por varios investigadores.

Dos de mis estudiantes de doctorado también contribuyeron a estas investigaciones: Analia Bergé (2005) y Ridha Najar (2010), como describí en (Artigue, 2017a). La Tesis Doctoral de Bergé se centra en el estudio del concepto de completitud y la continuidad del conjunto de los números reales. Específicamente, después de un estudio epistemológico profundizado, la autora examina la evolución de la relación institucional con la completitud a lo largo de la Licenciatura de matemáticas en la Universidad de Buenos Aires, y lo que resulta para los estudiantes. Cuatro cursos son analizados. Analia Bergé muestra que funcionan como instituciones aisladas y que se deja a los estudiantes el trabajo de conectar las perspectivas que proponen sobre la completitud, desde un estado de concepto preconstruido encapsulado en poderosos teoremas como el teorema de los valores intermedios y evidencias gráficas, en el primer curso, hasta el de concepto matemático trabajado explícitamente como objeto y extendido luego a espacios más generales en el marco del estudio de los espacios métricos, en el ultimo curso. También muestra, mediante cuestionarios y entrevistas, que incluso los estudiantes que aprueban los exámenes asociados, durante mucho tiempo no distinguen la completitud topológica de la línea real de la densidad de su orden, estando ambas asociadas a la *ausencia de huecos*. Tampoco son capaces de identificar dónde interviene la completitud en la demostración de los teoremas fundamentales del Cálculo y del Análisis Matemático, y cuál es su papel en este campo. Es sólo cuando su estudio se sitúa en espacios más generales, que su relación con la completitud parece evolucionar. Estos resultados fueron luego confirmados por investigaciones adicionales (véase (Vivier & Durand-Guerrier 2016) por ejemplo).

La Tesis Doctoral de Ridha Najar trata sobre la transición del bachillerato a la universidad en el campo de las funciones. El contexto es el de las clases preparatorias de las grandes escuelas de ingeniería en Túnez, las cuales acogen a estudiantes brillantes y muy motivados después del bachillerato. La tesis muestra que, de hecho, la principal ruptura institucional entre el bachillerato y la universidad en este contexto es la evolución de praxeologías centradas en funciones de una variable real y tipos de tareas de Cálculo y Análisis Matemático elemental, hacia praxeologías donde las funciones se conciben como objetos conjuntistas u homomorfismos entre estructuras algebraicas. El análisis detallado de estas praxeologías permite comprender en cuánto se diferencian de las praxeologías del bachillerato en cuanto a técnicas, modos de razonamiento y uso de recursos semióticos. Considere por ejemplo el tipo de tarea: *demostrar que una aplicación es biyectiva*. En el bachillerato, es un tipo de tarea familiar en el contexto de funciones de una variable real. Algunas técnicas se han rutinizado: estudiar las variaciones de la función, la mayoría de las veces usando su derivada; utilizar la propiedad asegurando que una función f continua y estrictamente monótona sobre un intervalo I de $\mathbb{R}$ es una biyección de I sobre f(I). En la universidad, muy rápidamente, el contexto es diferente. Para demostrar la biyectividad, hay que volver a su definición o utilizar características específicas de los homomorfismos en álgebra abstracta y álgebra lineal. Las técnicas y los discursos tecnológicos son radicalmente diferentes. La siguiente tarea, que Najar estudió con minuciosidad, común en las primeras hojas de trabajo sobre conjuntos y aplicaciones, es un buen ejemplo.

Sean E, F, G y H tres conjuntos, H con por lo menos dos elementos, y f un elemento de $A(F,G)$, el conjunto de las aplicaciones de F hacia G, demostrar las equivalencias siguientes:

$$f \text{es sobreyectiva} \Leftrightarrow \forall g, h \in A(G,H), (g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h)$$

$$f \text{es inyectiva} \Leftrightarrow \forall g, h \in A(G,H), (f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h)$$

De manera más general, se ha utilizado el análisis praxeológico para estudiar los libros de textos y diversos recursos curriculares, para poner de relieve sus características y limitaciones. En la última década, el uso del TAD ha ido más allá de tales análisis praxeológicos, contribuyendo al desarrollo de ingenierías didácticas basadas en el paradigma de ?cuestionamiento del mundo? que Yves Chevallard propone para reemplazar el paradigma llamado "monumentalista" de visita de las obras matemáticas, y en el concepto asociado de REI (Recorrido de estudio e investigación) (Chevallard 2015). La Tesis Doctoral de Berta Barquero (2009) sobre la enseñanza de la modelización fue un trabajo pionero en este campo, pero desde entonces este tipo de investigación se ha desarrollado considerablemente. La comunidad didactica española ha contribuido particularmente a esta dimensión, bajo el impulso de Marianna Bosch y Josep Gascón (véanse, por ejemplo, las Tesis Doctoral de Catarina Oliveiro Lucas (2016) e Ignasi Fiorensi (2018)).

Como se señala en (Artigue, Batanero & Kent, 2007), los desarrollos que acabo de mencionar forman parte de una evolución más global de la investigación en educación matemática hacia perspectivas socioculturales. Ha tomado diferentes formas según los enfoques teóricos favorecidos, como se muestra claramente en el número especial de la revista Research in Mathematics Education titulado: "Institutional, sociocultural and discursive approaches to research in university mathematics education" (Nardi, Biza, González-Martín, Gueudet and Winslow, 2014), resultando de los trabajos realizados, en particular, en el marco de los coloquios CERME. Tal como lo expresan los editores en la introducción de este número especial: *Based on our experience [...], we see the emergence of institutional, sociocultural and discursive approaches to research in UME (University Mathematics Education) as a milestone.*

In this spirit, this SI (Special Issue) focuses on research into the teaching and learning of mathematics at university level which deploys theoretical frameworks that we see increasingly essential in the field. Our initial evidence base of studies is the collection of works read, presented, reviewed and discussed in WG14 at CERME7 and CERME8. The selected frameworks are: the Anthropological Theory of the Didactic, the Theory of Didactical Situations, Instrumental and Documentational Approaches, Communities of Practice and Inquiry, and the Theory of Commognition. The aim of this SI is to increase awareness of these approaches to both UME and general mathematics education research audiences ? and to offer fully operational examples of how these approaches are currently deployed effectively and efficiently.

En este trabajo no puedo entrar en más detalles sobre el estudio de esta diversidad, y remito al lector a este número especial. En efecto, quisiera mencionar, aunque más brevemente, otras dos evoluciones que considero importantes.

4. **La creciente atención prestada a las prácticas de enseñanza a nivel universitario.** Esta evolución refleja, al igual que la anterior, un fenómeno más global en educación matemática: la creciente atención prestada a los profesores, a sus conocimientos, sus prácticas, su preparación, su formación continua y desarrollo profesional, más allá de los alumnos y estudiantes. El interés internacional suscitado por los modelos desarrollados para estudiar el conocimiento de los profesores, en particular el modelo MKT (Mathematical Knowledge for Teaching) desarrollado por Deborah Ball y sus colegas (Ball, Hill & Bass, 2005), la creación del JMTE (Journal of Mathematics Teacher Education), desarrollos teóricos específicos como el doble enfoque ergonómico y didáctico sobre las prácticas de enseñanza desarrollado en Francia (Robert & Rogalski 2002), la extensión de la aproximación instrumental antes mencionada a la aproximación documental de lo didáctico (Gueudet & Trouche 2009; Trouche, Gueudet & Pepin 2019) dan testimonio de ello.

En el caso de la educación universitaria, el trabajo empezado por Barbara Jaworski y Elena Nardi en la Universidad de Oxford hace casi 20 años (Nardi, Jaworski, Hegedus 2005; Nardi 2008) desempeñó un papel pionero. Hoy en día, estas investigaciones están en plena expansión, como se puede ver en la entrada que se les dedica en la nueva versión de la Enciclopedia de Educación Matemática (Nardi & Rasmussen 2019).

Estas investigaciones llevan a cuestionar las prácticas de enseñanza dominantes en la universidad, en particular el sistema tradicional de cursos magistrales, con resultados que pueden ser muy diferentes de un estudio a otro. También estudian las numerosas prácticas innovadoras que se están estableciendo, por ejemplo las estrategias de IOE (Inquiry Oriented Education) o IBE (Inquiry Based Education) implementadas en varios estudios en los Estados Unidos (ver por ejemplo el trabajo de Rasmussen y Kwon sobre ecuaciones diferenciales (Rasmussen & Kwon 2007)). Estas investigaciones sobre las prácticas docentes también cuestionan la influencia que las prácticas de investigación y las epistemologías de los docentes universitarios tienen o podrían tener en sus prácticas docentes. Cada vez más, las ?cámaras? están entrando en los auditorios, sesiones de tutoría y de apoyo a los estudiantes, lo que permite un estudio detallado de las prácticas docentes, como ha ocurrido durante muchos años en la educación primaria y secundaria. Además de estas observaciones detalladas, que generalmente conciernen a un número reducido de profesores, existen también estudios a gran escala como el realizado por (Bressoud, Mesa & Rasmussen 2015) sobre la enseñanza del Cálculo en los Estados Unidos. La cuestión de la preparación de los docentes universitarios también comienza a ser considerada seriamente, aunque todavía está lejos de ser un caso general (Jaworski 2020). Se están organizando colaboraciones entre matemáticos y didactas, apoyadas teóricamente por enfoques en términos de comunidades de práctica y comunidades de práctica e investigación. Las actividades realizadas dentro de la red INDRUM lo demuestran, al igual que los artículos publicados en IJRUME.

5. **Una atención creciente a la formación matemática de los estudiantes no especialistas.** La investigación sobre cuestiones relacionadas con la formación matemática de estudiantes que no van a especializarse en matemáticas: futuros ingenieros, biólogos, economistas, etc., es todavía muy minoritaria en este campo de investigación. Trabajos pioneros como el desarrollado por Kent, Noss y Hoyles sobre la formación para las carreras de ingeniería en la década de los 90, permanecieron relativamente aislados durante mucho tiempo. Sin embargo, la situación parece estar cambiando, como lo demuestra la entrada sobre este tema en la nueva versión de la Enciclopedia de Educación Matemática (Hochmuth, 2020). A estas cuestiones se han dedicado tesis recientes que permiten ir más allá de la visión aplicacionista de las matemáticas que predomina en tales cursos. La Tesis Doctoral de Berta Barquero (2009), que propuso un taller de larga duración para estudiantes de economía, en paralelo a la enseñanza habitual, en forma de REI sobre la modelización de evoluciones de poblaciones, se cita a menudo como un trabajo pionero en esta dirección.

Es también el caso de la Tesis Doctoral de Avenilde Romo Vázquez (2009) que codirigí con Corine Castela. Utilizando una metodología de inmersión, su autora estudió cómo estudiantes de una formación de ingeniería en Francia, gestionaban las necesidades matemáticas a las que se enfrentaban en la realización de proyectos profesionales de ingeniería. Esta investigación también condujo a un afinamiento del modelo praxeológico de TAD para tener mejor en cuenta la circulación del saber entre las diferentes instituciones involucradas, más allá de la única institución matemática universitaria, y componentes del discurso tecnológico, de naturaleza pragmática, que juegan un papel esencial en tales contextos (Castela & Romo Vazquez 2011).

La Tesis Doctoral, más reciente, de Catarina Oliveira Lucas (2015) también se inscribe en este campo de investigación, ya que examina la enseñanza del Cálculo, en la transición del bachillerato a la universidad superior y propone un REI para estudiantes en la carrera de medicina nuclear. Permaneciendo en el mundo de habla española, también podría mencionar la Tesis Doctoral de Josefa Perdomo Díaz sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales a estudiantes del Grado en Química (2010), que descubrí durante mi estancia en la Universidad de La Laguna, así como el reciente trabajo de Alejandro González-Martín (2018). En efecto, él continúa trabajando sobre la noción de integral, pero sus investigaciones se sitúan hoy en el contexto de carreras de ingeniería y, en particular, sobre la manera en que los cálculos que, para un matemático, dependen de esta noción, se hacen y enseñan en cursos de resistencia de materiales.

Cada vez más, estas investigaciones no se limitan a observar cómo se enseñan las matemáticas en los cursos de matemáticas para no especialistas y los efectos resultantes sobre los estudiantes, sino que estudian cómo las matemáticas viven en las propias disciplinas de ingeniería, qué necesidades matemáticas afrontan los profesores de estas disciplinas y cómo las satisfacen, cómo, utilizando el lenguaje de TAD, las matemáticas hallan su lugar en sus praxeologías, en qué tipos de tareas, en qué técnicas, apoyadas por cuáles discursos tecnológicos y teóricos. Buscan establecer o fortalecer las conexiones entre enseñanzas clásicamente aisladas.

6. **De la comprensión a la acción.** Desde su emergencia, la investigación didáctica sobre la enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario ha buscado no sólo comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje, sino también desarrollar acciones didácticas en sintonía con las visiones epistemológicas, cognitivas y didácticas que sustentaban la investigación, y nutriéndose de los conocimientos que ésta producía. El estudio ICMI (Holton 2001), por ejemplo, reservó un espacio importante para la presentación y el análisis de experimentos y proyectos sustanciales realizados en diferentes contextos, como el "Analysis-project " en la Universidad de Warwick que se inspiraba directamente en la obra de David Tall, las enseñanzas basadas en el concepto de debate científico teorizado por Marc Legrand en la Universidad de Grenoble, las enseñanzas en forma de proyectos y con enfoque en procesos de modelización implementadas desde su creación en la Universidad de Roskilde, con impulso de Mogens Niss, el proyecto *Active/Interactive Classroom* fuertemente apoyado en las tecnologías digitales, en la Universidad de Duke en los Estados Unidos.

En las ultimas décadas, se multiplicaron las experimentaciones e innovaciones, la investigación sobre y para la innovación, como se la llama en el capítulo dedicado a la UME (University Mathematics Education) en el reciente libro, ya mencionado, publicado para conmemorar los 20 años de existencia de la sociedad europea ERME. Esta investigación y las realizaciones asociadas se basan en diversas teorías: la teoría de las situaciones didácticas, la TAD, la teoría de comunidades de prácticas e investigación, RME (Realistic Mathematics Education), la teoría de commognición, ya mencionadas en este texto, pero también la teoría APOS que, asociada al ciclo de enseñanza ACE , acompaña la investigación en este campo desde los años 80 (Arnon et al. 2014), enfoques en términos de resolución de problemas como el desarrollado por Manuel Santos Trigo y Matías Camacho Machín utilizado en la Tesis Doctoral de Josefa Perdomo ya citada, o la teoría onto-semiótica OSA (Godino, Batanero & Font, 2007), especialmente en lo que se refiere al mundo hispánico.

En las realizaciones recientes, más allá de esta diversidad, me parece importante hacer hincapié en algunos puntos sobresalientes:

- el desarrollo de *bridging-courses* y de estructuras de apoyo para los estudiantes, para facilitar su aculturación universitaria;
- la promoción del trabajo colaborativo, tanto entre estudiantes como entre docentes, matemáticos y didáctas de las Matemáticas, y el creciente papel de la tecnología como apoyo a la comunicación entre estudiantes, estudiantes y docentes, y entre docentes;
- la ampliación impresionante de la gama de recursos tecnológicos disponibles para sustentar el trabajo personal de los estudiantes, sus aprendizajes, y el trabajo de los docentes;
- el desarrollo de acciones dirigidas a la formación de tutores y académicos universitarios.

Sin embargo, hay que reconocer que la mayoría de las acciones y experimentos siguen siendo a pequeña escala, y que no es fácil asegurar la sostenibilidad de las iniciativas, incluso cuando se demuestre su eficacia. Hay obstáculos sistémicos que afrontar, entre los que destaca el hecho de que la evaluación y la promoción de los matemáticos universitarios generalmente tiene poco en cuenta su actividad de enseñanza, y que su formación inicial no les prepara bien para enfrentarse a las dificultades que encontrarán en su enseñanza. También es indudablemente necesario, como se subraya en (Artigue, 2017b), cuestionar la concepción tradicional de la relación entre teoría y práctica, de la difusión de los resultados de la investigación en Didáctica de las Matemáticas. Hay que construir y fortalecer colaboraciones entre comunidades que respeten la diversidad de sus conocimientos respectivos, porque solo así se pueden producir resultados sostenibles.

7. **Conclusiones.** En este texto, ápartiendo de la conferencia que di hace 25 años en la misma Universidad de La Laguna, he tratado de mostrar el desarrollo de la investigación didáctica sobre la enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario en el último cuarto de siglo. He intentado mostrar que este desarrollo se ha producido, tanto consolidando y enriqueciendo las perspectivas epistemológicas y cognitivas presentes desde la emergencia de este campo de investigación, como abriendo el campo a nuevas perspectivas, socioculturales y antropológicas, semióticas, a otras problemáticas como la de las prácticas docentes, en línea con evoluciones más globales del campo didáctico. Otras evoluciones de las problemáticas son más específicas, como las vinculadas a la transición entre bachillerato y universidad, a la enseñanza de las matemáticas para no especialistas, o a dominios matemáticos avanzados como

el de las estructuras algebraicas (Hausberger, 2018, 2020). He analizado este desarrollo, evocando textos de síntesis, los nuevos términos introducidos en la Enciclopedia de Educación Matemática, y me he referido a algunas investigaciones que me son particularmente familiares y que me parecen emblemáticas de las evoluciones observadas. La visión presentada es necesariamente parcial y personal. Por ejemplo, solo me di cuenta realmente de la diversidad y riqueza de las investigaciones desarrolladas en el campo del Análisis Matemático, aquí en España, leyendo la excelente publicación (Azcárate, Camacho-Machín, González & Moreno, 2015) que he conocido últimamente. A pesar de estas limitaciones, espero haber mostrado claramente que, en los últimos 25 años, este campo de investigación ha producido un conjunto sustancial y coherente de conocimientos, ha inspirado un importante número de realizaciones didácticas y experiencias y que constituye hoy en día un campo de investigación muy dinámico que se ha dotado de medios institucionales, redes, revistas, grupos de trabajo, para favorecer los intercambios y las colaboraciones, y también la capitalización de los conocimientos.

REFERENCES

[1] Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Okta, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014).*APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* New York: Springer.

[2] Artigue M. (1991). Didactical research in analysis. In D. Tall (ed), *Advanced Mathematical Thinking,* p. 167-196. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

[3] Artigue M. (1996), Teaching and learning calculus and elementary analysis : epistemological, cognitive and didactic issues, *Actes du Colloque "25 Años de matemáticas en la Universidad de la Laguna"*, Tenerife, novembre 1994, 27-53.

[4] Artigue M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, n^o7(3), 245-274.

[5] Artigue, M. (2016). Mathematics Education Research at University Level: Achievements and Challenges. In E. Nardi, C. Winslow, & T. Hausberger, *Proceedings of INDRUM 2016 First conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 11-27). Montpellier : University of Montpellier and INDRUM. http://indrum2016.sciencesconf.org/conference/indrum2016/pages/indrum2016proceedings.pdf

[6] Artigue, M. (2017a). Theoretical approaches of institutional transitions : The case of ATD. In, R. Gller, R. Biehler, R. Hochmuth, & H.-G. Rck (Eds.), *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline. Conference Proceedings. Khdm Report 17-05* (pp. 405-412). Universittsbibliothek Kassel, Germany. http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hebis:34-2016041950121

[7] Artigue, M. (2017b). The Challenging Relationship between Fundamental Research and Action in Mathematics Education. In G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 145-164). New York: Springer.

[8] Artigue, M., Batanero, C., & Kent, P. (2007). Learning mathematics at post-secondary level. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1011-1049). Information Age Publishing, Inc., Greenwich, Connecticut.

[9] Azcárate, C., Camacho-Machín, M., González, M.T., Moreno, M. (Coords.) (2015). *Didáctica del Análisis Matemático. Una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM.* Universidad de La Laguna.

[10] Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching. Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator,* 30(3), 14-46.

[11] Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas.* Doctoral tesis. Universidad Autónoma de Barcelona.

[12] Bergé, A. (2004). *Un estudio de la evolución del pensamiento matemático: el ejemplo de la conceptualización del conjunto de los números reales y de la noción de completitud en la enseñanza universitaria.* Doctoral thesis. Universidad de Buenos Aires.

[13] Biehler, R. (2019). The transition from Calculus to Analysis–Conceptual analysis and supporting steps for students. In J. Monaghan, E. Nardi, & T. Dreyfus (Eds.), *Proceedings of the Conference Calculus in upper secondary and beginning university mathematics,* University of Agder, Kristiansand, 6-9 Aout, 2019 (pp. 4-17).

[14] Biza I, Giraldo V, Hochmuth R, Khakbaz A, Rasmussen C (2017). *Research on teaching and learning mathematics at the tertiary level: State-of-the-art and looking ahead.* ICME-13 Topical Surveys Book Series. New York: Springer Open.

[15] Biza, I., Jaworski, B., & Hemmi, K. (2014). Communities in university mathematics, *Research in Mathematics Education*, 16(2), 161-176.

[16] Bosch, M., Fonseca, C., & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 24(2/3), 205-250.

[17] Bressoud, D., V. Mesa, C. Rasmussen. 2015. *Insights and Recommendations from the MAA National Study of College Calculus.* MAA Press.

[18] Castela, C., & Romo Vazquez, A. (2011). Des mathématiques l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs, *Recherches en didactique des mathématiques*, 31(1), 79-130.

[19] Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. In Sung Je Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173-188). New York: Springer.

[20] Chevallard, Y. (2019). Introducing the Anthropological Theory of the Didactic: An attempt at a principled approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education,* 12, 1-44.

[21] Dorier, J.-L. (Ed.) *On the Teaching of Linear Algebra.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[22] Durand-Guerrier, V., Hochmuth, R., Goodchild S., Hogstad, N.M (2018). *Proceedings of the Second Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics.* Kristiansand, Norway: University of Agder and INDRUM.

[23] Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Bern: Peter Lang.

[24] Florensa Ferrando, I. (2018). *Contributions of the epistemological and didactic analysis: question-answer maps in engineering and in teacher education.* Doctoral thesis. Universitat Ramon Llull.

[25] González-Martín, A. (2005). *La generalización de la integral definida desde las perspectivas gráfica, numérica y algebraica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje.* Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna

[26] González-Martín, A. (2018). The use of integrals in Mechanics of Materials textbooks for engineering students: the case of the first moment of an area. In Durand-Guerrier, V., Hochmuth, R., Goodchild S., Hogstad, N.M (2018). *Proceedings of the Second Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics.* Kristiansand, Norway: University of Agder and INDRUM.

[27] Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics,* 71(3), 199-218. Hausberger T (2018) Structuralist Praxeologies as a Research Program on the Teaching and Learning of Abstract Algebra. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* 4(1):74-93.

[28] Hausberger, T. (2020). Abstract algebra teaching and Learning. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education (second edition)*. New York: Springer. Hochmuth, R. (2020). Service-Courses in University Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (second edition). New York: Springer.

[29] Godino, J.D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.

[30] Holton, D. (Ed.) (2001). *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[31] Jaworski, B. (2020). Preparation and Professional Development of University Mathematics Teachers. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education (second edition)*. New York: Springer.

[32] Jaworski, B. (2008). Building and sustaining inquiry communities in mathematics teaching development: Teachers and didacticians in collaboration. In K. Krainer, & T. Wood (Eds.) *International handbook of mathematics teacher education: The mathematics teacher educator as a developing professional* (vol. 3, pp. 335–361). Rotterdam: Sense Publishers.

[33] Lerman (Ed.) (2020). *Encyclopedia of Mathematics Education (second edition)*. New York: Springer.

[34] Larson, C., & Zandieh, M. (2013). Three interpretations of the matrix equation Ax=b. *For the Learning of Mathematics*, 33(2), 11-17.

[35] Najar, R. (2010). *Effets des choix institutionnels sur les possibilités d'apprentissage des étudiants. Cas des notions ensemblistes fonctionnelles dans la transition secondaire/supérieur.* Tesis Doctoral. Université Paris Diderot Paris 7 & Université virtuelle de Tunis.

[36] Nardi, E., Jaworski, B., & Hegedus, S. (2005). A spectrum of pedagogical awareness for undergraduate mathematics: From "tricks" to "techniques". *Journal for Research in Mathematics Education,* 36(4), 284-316.

[37] Nardi, E. (2008). *Amongst Mathematicians. Teaching and Learning Mathematics at the University Level*. New York: Springer.

[38] Nardi, E., Biza, I., González-Martín, A.S., Gueudet, G., & Winslow, C. (Eds.) (2014). Institutional, sociocultural and discursive approaches to research in university mathematics education. *Research in Mathematics Education*, 16(2).

[39] Nardi, E., Winslow, C., & Hausberger, T. (Eds.) (2016). *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (INDRUM 2016). Montpellier, France: University of Montpellier and INDRUM.

[40] Nardi, E., & Rasmussen, C. (2019). Teaching practices at university level. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education (second edition)*. New York: Springer.

[41] Oliveira, C. (2015). *Una posible "razón de ser" del Cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización functional*. Tesis Doctoral. Universidad de Vigo.

[42] Perdomo, J. (2010). *Construcción del concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria en escenarios de resolución de problemas*. Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna.

[43] Praslon, F. (2000). *Continuités et ruptures dans la transition Terminale S/DEUG Sciences en Analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement.* Tesis Doctoral. Université Paris Diderot Paris 7.

[44] Robert, A., & Rogalski, J. (2002). Le systme complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des mathématiques, des sciences et des Technologies*, 2(4), 505-528.

[45] Romo-Vazquez, A. (2009). *La formation de mathématiques des futurs ingénieurs.* Tesis doctoral. Université Paris-Diderot. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00470285/document

[46] Schneider M (1988) *Des objets mentaux "aire" et "volume" au calcul des primitives.* Thse de l'Université catholique de Louvain. http://www.ladimath.ulg.ac.be

[47] Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 209-246). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[48] Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[49] Thomas, M., de Freitas Druck, O., Huillet, D., Ju, M.K., Nardi, E., Rasmussen, C., & Xie, J. (2014). Key Mathematical Concepts in the Transition from Secondary School to University. In Sung Je Cho (Ed.) *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 265-284). New York: Springer.

[50] Trouche, L., Gueudet, G., & Pepin, B. (Eds.). (2019). *The "resource" approach to mathematics education.* New-York: Springer

[51] Vivier, L., & Durand-Guerrier, V. (2016). Densité de D, complétude de R et analyse réelle - Premire approche. *First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics*, Mar 2016, Montpellier, France. (hal-01337887).

[52] Winslow, C. (2008). Transformer la thorie en tches : la transition du concret l?abstrait en analyse relle. In A. Rouchier et al. (Eds.), *Actes de la XIIIe Ecole d?Et de Didactique des Mathmatiques* (pp. 1-12 ? cdrom). Grenoble : La pense sauvage.

[53] Winslow, C., Gueudet, G., Hochmuth, R., & Nardi, E. (2018). Research on university mathematics education. In Dreyfus T., Artigue M., Potari D., Prediger S. & Ruthven K. (Eds.), *Developing research in mathematics education-Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe*, (pp. 60?74). Oxon: Routledge.

[54] Winslow, C., & Rasmussen, C. (2020). University Mathematics Education. In S. Lerman(Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education (second edition).* New York: Springer.

E-mail address: martigue@gmail.com