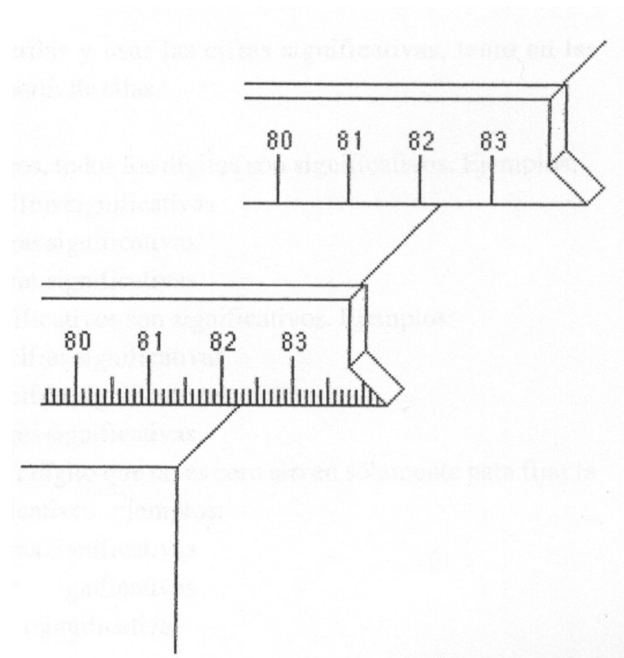
TRABAJO EN EL LABORATORIO

(estos apuntes se corresponden con la base del tema 2 de Física I)

Toda medida implica la comparación con un patrón o unidad de medida. Por tanto, las mediciones constan de una unidad que nos indica lo que fue medido y un número que indica cuántas de esas unidades fueron medidas. Ejemplo: 36 m

2.2 Errores en las medidas

Toda medición, no importa con cuánto cuidado se realice, implica cierto grado de incertidumbre. La incertidumbre o error de una medición depende de la precisión del dispositivo utilizado y de la habilidad de la persona que la realizó.



La incertidumbre de una medición se puede ilustrar con las dos reglas que se muestran en la figura. Las mediciones corresponden a la longitud de una mesa.

La escala de la regla que aparece en la parte superior de la figura está graduada en centímetros. Usando esta escala se puede decir con certidumbre que la longitud debe estar entre 82 y 83 centímetros.

La escala de la regla inferior muestra más subdivisiones y tiene *mayor precisión* porque está graduada en milímetros. Con esta regla se puede decir que la longitud está entre 82.2 y 82.3 centímetros.

Toda medición debe contener dos clases de información: (1) la magnitud de la medición y (2) la incertidumbre de la misma. Por ejemplo, en el caso anterior, la medida con la segunda regla se expresaría:

$$l = 82.2 \pm 0.1 \text{ cm (ó } 82.25 \pm 0.05 \text{ cm)}$$

Esto significa que se espera que la longitud se encuentre en el intervalo 82.1 a 82.3 cm, con gran probabilidad. La estimación de los errores es fundamental, pues sin ellos no se puede extraer consecuencias de los resultados experimentales. Si por ejemplo, nos solicitan fabricar una pieza para un motor con una longitud de 823 mm y una tolerancia de 1 mm, no sirve medirla con la primera regla, porque no podremos determinar si la pieza es válida.

a) Términos importantes y tipos de errores

Valor verdadero: al realizar una medida en general se busca el valor verdadero de una magnitud. Esto significa que partimos de la hipótesis de que este valor verdadero existe (y suele asumirse además que no cambia con el tiempo). Estas hipótesis en algunos casos pueden ser de difícil justificación. Por ejemplo, al medir la longitud de una varilla de un cierto grosor, la longitud varía en función de los puntos exactos que tomemos, con lo que el valor verdadero de la longitud de la varilla es un término ambiguo. Podría hablarse del valor verdadero de la distancia entre dos puntos de la varilla. Sin embargo, este valor también varía con las fluctuaciones térmicas, por lo que habría que especificar que el valor verdadero corresponde a una temperatura. Determinar el valor verdadero que se desea medir requiere explicar con detalle y precisión el experimento. En cualquier caso, el valor verdadero no se puede conocer, por lo que al medir obtenemos una estimación del valor verdadero.

Error: el error es la diferencia entre el valor medido y el valor verdadero. Como este último no se puede conocer, tampoco el error se puede conocer. Tan sólo se puede estimar su valor. La incertidumbre que se asocia a la medida es una estimación del error.

Exactitud: una medida es tanto más exacta cuanto más se acerque al valor verdadero. Como este valor no se conoce, es difícil de cuantificar. Cualitativamente, sin embargo, podemos suponer que una medición con un cronómetro manual será menos exacto que otra en que se usa un dispositivo electrónico.

Precisión: una medición es precisa si las diferentes medidas fluctúan poco. Una medición precisa no implica exactitud, si bien una medida exacta sí implica precisión.

Estos términos nos llevan a distinguir dos tipos de errores:

Errores aleatorios: son errores que fluctúan en una serie de medidas. Están siempre presentes en cualquier medición. Cuanto menores sean más preciso es el resultado.

Errores sistemáticos: son constantes en una serie de medidas (en general se relacionan con la calibración del aparato de medida). La repetición de medidas con el mismo aparato no reduce los errores sistemáticos. Por esta razón, estos errores son potencialmente más peligrosos que los errores aleatorios. Cuanto menores sean más exacto es el resultado.

En ausencia de error sistemático, los errores aleatorios hacen que las distintas medidas fluctúen en torno al valor verdadero. Si existen errores sistemáticos, las medidas fluctúan en torno a otro valor.

b) Formas de expresar el error

Error absoluto: expresión del error en las mismas unidades que el valor de la medida.

Error relativo: error absoluto dividido por la magnitud medida.

Ejemplo: $l = 82.2 \pm 0.1$ cm. Error absoluto = 0.1 cm. Error relativo = 0.1/82.2 = 0.0012 ó 0.12%

2.3 Error de una magnitud medida experimentalmente

a) Una sola medida**:** el error absoluto se toma igual a la precisión del instrumento de medida Δx_{ins}**.**

b) Varias medidas: si solo se realiza una medida se puede subestimar el error, por lo que conviene realizar numerosas medidas. Las fluctuaciones de estas medidas se aprovechan para estimar el error.

Al realizar *n* medidas de una magnitud, *x*, se toma el valor medio como la mejor estimación de la magnitud:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Las fluctuaciones de las medidas pueden describirse mediante la varianza, que se estima mediante:

$$\operatorname{var} x = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \langle x \rangle\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]$$

Al estimar el valor medio mediante un número finito de medidas, *n*, se comete un error, Δx_n :

$$\Delta x_n = \sqrt{\operatorname{var}\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{\operatorname{var} x}{n}}$$

Finalmente, el error de la medida es la combinación de este error Δx_n con el error del instrumento, Δx_{ins}:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{\mathrm{ins}}^2 + \Delta x_n^2} = \sqrt{\Delta x_{\mathrm{ins}}^2 + \frac{\operatorname{var} x}{n}}$$

Por tanto, el resultado del proceso de medida se expresa como $\langle x \rangle \pm \Delta x$

Nota: en algunos experimentos, en los que no se busca el valor verdadero, como la longitud de la varilla explicado antes, se utiliza $\operatorname{var} x$ y no $\operatorname{var} \bar{x}$ para la estimación del error (que en este caso se refiere a la variabilidad de la medida, no al error en la estimación del valor medio; este asunto se discutirá en clase; además se explicará que es más ventajoso realizar *n* medidas repetidas y no una medida *n* veces).

Error en la estimación del error: no se debe olvidar que la fórmula anterior es una estimación del error. Nos podemos hacer una idea de su error mediante: $\sqrt{\operatorname{var} x / 2(n-1)}$

2.4 Propagación de errores

En la mayoría de experimentos no se mide directamente la magnitud de interés, sino que se miden otras magnitudes y luego se calcula la magnitud buscada mediante procesos matemáticos o a partir de una gráfica. El error de esta magnitud final se obtiene a a partir de los errores de las magnitudes medidas, lo que se denomina propagación del error.

a) Error de una magnitud obtenida de una gráfica

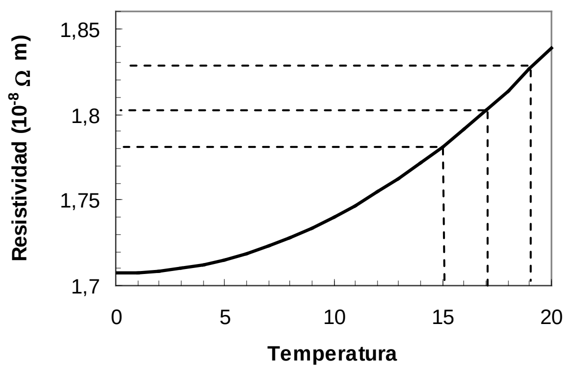
Cuando debamos deducir un valor con auxilio de una gráfica, $z = f(x)$, se determinarán los correspondientes valores de z, para $x + \Delta x$ y para $x - \Delta x$, y su error vendrá dado por:

$$\Delta z = \frac{z_{\max} - z_{\min}}{2}$$

Ejemplo. Determinar la resistividad de un material a partir de la gráfica si la temperatura es $t = 17 \pm 2$ºC.

Error = $(1.83 - 1.78)/2 = 0.03\ 10^{-8}\ \Omega$ m

Resistividad = $1.80 \pm 0.03\ 10^{-8}\ \Omega$ m



b) Medidas indirectas

Sea una magnitud f que depende de otras que se miden experimentalmente x, y, z según la fórmula $f(x,y,z)$. El error en f puede estimarse a partir de:

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z$$

donde Δx, Δy, Δz son los errores en x , y , z y ∂ significa derivada parcial.

Ejemplo. Determinar el volumen de un cilindro a partir de las medidas de su longitud, $l = 12.25 \pm 0.03$ cm y de su diámetro $d = 1.062 \pm 0.007$ mm.

El volumen es: $V = \dfrac{\pi d^2}{4} l = \dfrac{\pi\ 1.062}{4} 12.25 = 10.2176 \text{ mm}^3$

Su error : $\Delta V = \left|\dfrac{\partial V}{\partial l}\right|\Delta l + \left|\dfrac{\partial V}{\partial d}\right|\Delta d = \dfrac{\pi d^2}{4}\Delta l + \dfrac{2\pi dl}{4}\Delta d = \dfrac{\pi\ 1.062^2}{4} 0.03 + \dfrac{2\pi\ 1.062\ 12.25}{4} 0.007 = 0.17\ cm^3$

O, más sencillo: $\Delta V = \dfrac{V_{\text{MAX}} - V_{\min}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi(d+\Delta d)^2}{4}(l+\Delta l) - \dfrac{\pi(d-\Delta d)^2}{4}(l-\Delta l)\right) = 0.17\ cm^3$

Por lo tanto, V = 10.22 ± 0.17 cm^3 (Nota: error relativo longitud 0.2%, diámetro 0.7% y volumen 1.7 %)

c) Ajuste de una recta por mínimos cuadrados

En muchas ocasiones, puede establecerse una relación lineal entre dos magnitudes, x e y, que pueden medirse experimentalmente. En este caso no interesa medir siempre el mismo valor de las dos magnitudes, sino dejarlas que varíen para comprobar el cumplimiento de la ley lineal y obtener los parámetros de la recta. Por supuesto, los valores experimentales no se hallarán exactamente sobre una recta, sino distribuidos más o menos simétricamente a un lado y a otro de la misma. Para hallar la ecuación de la recta correspondiente se recurre al método de los mínimos cuadrados, con lo que se logra que los puntos experimentales queden distribuídos simétricamente a ambos lados de ella y lo más próximos posible.

La ecuación buscada es $y = \mathbf{m}\, x + c$ y sus parámetros, m y c, se obtienen a partir de las medidas x_i e y_i :

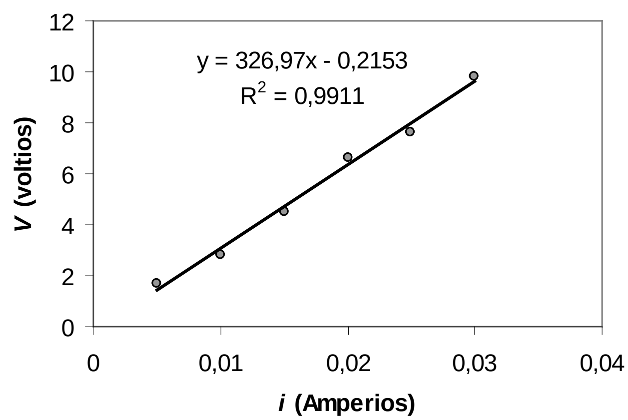
$$m = \frac{Txy}{Tx} \pm \sqrt{\frac{Tx\,Ty - Txy^2}{(n-2)\,Tx^2}}$$

$$c = \bar{y} - \frac{Txy}{Tx}\bar{x} \pm \sqrt{\frac{Tx\,Ty - Txy^2}{(n-2)\,Tx^2}\left(\frac{Tx}{n} + \bar{x}^2\right)}$$

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$
$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum y_i$
$Tx = \sum x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2$
$Ty = \sum y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum y_i\right)^2$
$Txy = \sum x_i y_i - \frac{1}{n}\sum x_i \sum y_i$

Ejemplo. Determinar el valor de una resistencia mediante la ley de Ohm $V = R\, i$
Se miden los valores de la diferencia de potencial V para ciertos valores de la intensidad i que recorre la resistencia R.

i (Amperios) - x_i	V (Voltios) - y_i
0,005	1,69
0,010	2,80
0,015	4,49
0,020	6,62
0,025	7,63
0,030	9,81



A partir de estos valores se realizan las operaciones indicadas y se obtiene la resistencia $R = 327 \pm 15\ \Omega$

Nota: en los apartado b) y c) pueden usarse métodos más sencillos para estimar el error, similares al del apartado a).

2.5 Cifras significativas

En cualquier medición, las *cifras significativas son los dígitos que se conocen con certeza más uno o dos dígitos inciertos*. Por ejemplo la medición 82.2 centímetros tiene tres cifras significativas. Sería incorrecto decir que la longitud de la mesa de la primera figura, medida con la regla de abajo, es de 82.2577 cm. Este valor de seis cifras significativas es incorrecto porque indica una precisión mayor que la que el instrumento utilizado puede proporcionar.

Se han desarrollado reglas para escribir y usar las cifras significativas, tanto en las mediciones como en valores calculados a partir de ellas.

Regla 1. En números que no contienen ceros, todos los dígitos son significativos.

3.1428	cinco cifras significativas
469	tres cifras significativas

Regla 2. Todos los ceros entre dígitos significativos son significativos.

7.053	cuatro cifras significativas
302	tres cifras significativas

Regla 3. Los ceros a la izquierda sirven para fijar la posición del punto decimal y no son significativos.

0.0056	dos cifras significativas
0.0789	tres cifras significativas

Regla 4. En números con punto decimal, los ceros a la derecha del último dígito diferente de cero son significativos.

43.0	tres cifras significativas
0.00200	tres cifras significativas
0.40050	cinco cifras significativas

Regla 5. En números sin punto decimal y que terminan con ceros, estos ceros pueden ser o no significativos. Para poder especificar el número de cifras significativas, se requiere información adicional.

Se evitan confusiones expresando los números en notación científica. Cuando están expresados en esta forma, todos los dígitos se interpretan como significativos.

$3.6\ 10^{5}$	dos cifras significativas
$3.60\ 10^{5}$	tres cifras significativas
$2\ 10^{-5}$	una cifra significativa

a) Redondeo

Tres reglas rigen el proceso de eliminar los dígitos no significativos del resultado de una operación.

Regla 1. Si el primer dígito que se va a eliminar es menor que 5, ese dígito y todos los dígitos que le siguen se eliminan. Ejemplo: 54.234 redondeado a tres cifras significativas se convierte en 54.2

Regla 2. Si el primer dígito que se va a eliminar es mayor que 5, o si es 5 seguido de dígitos diferentes de cero, todos los dígitos siguientes se suprimen y el valor del último dígito que se conserva se aumenta en una unidad. Ejemplo: 54.36, 54.359 y 54.3598 redondeados a tres cifras significativas quedan como 54.4

Regla 3. Si el primer dígito que se va a eliminar es un 5 que no va seguido de ningún otro dígito o sólo de ceros, se aplica la regla par-impar. Es decir, si el último dígito que se va a conservar es par, su valor no cambia, y tanto el 5 como los ceros que lo siguen se suprimen. Pero si el último dígito a conservar es impar, entonces su valor se aumenta en uno. La intención de esta regla par-impar es promediar los efectos del redondeo. Ejemplos:

54.2500 con tres cifras significativas se vuelve 54.2
54.3500 con tres cifras significativas se vuelve 54.4

b) Cifras significativas y cantidades calculadas

Para conocer el número de cifras significativas de una magnitud calculada se suele usar el método de propagación de errores (ver 1.5.b). Sin embargo, existen unas reglas sencillas que pueden aplicarse para simplificar el cálculo del número de cifras significativas en ciertas operaciones matemáticas.

Multiplicación y división. El resultado debe tener el mismo número de cifras significativas que el dato inicial con menos cifras significativas.

2.0 g / 3 cm^3 = 0.6666667 se redondea a 0.7 g/cm^3 (1 cifra significativa)
2.0 g / 3.00 cm^3 = 0.6666667 se redondea a 0.67 g/cm^3 (2 cifras significativas)

Suma y resta. El resultado no debe tener dígitos más allá de la posición del último dígito común a todos los números sumados o restados.

34.6 + 17.8 + 15 = 67.4 se redondea a 67

c) Error en magnitudes definidas y contadas

Además de magnitudes medidas se usan otras dos clases de números: los que se definen y los que se cuentan. A diferencia de las medidas, se puede especificar el valor exacto de tales números. Por ejemplo, se pueden contar con absoluta certeza el número de mesas que hay en clase o el número de dedos de una mano. Los números contados no están sujetos a error a menos que su número sea tan grande o las condiciones tan complicadas que no podamos estar seguros de llevar bien la cuenta. Por otro lado, los números definidos son relaciones exactas que han sido establecidas, como el número de segundos en una hora y el número de lados de un cuadrado. Los números definidos no están sujetos a error.

FORMATO DE UN INFORME

El informe debe ser redactado de forma que alguien que no haya estado en el laboratorio comprenda el trabajo realizado y pueda reproducirlo y rehacer vuestros cálculos. Además, un error muy común es redactarlo como el guión de una práctica a realizar, cuando es en realidad la descripción de un trabajo ya realizado.

A continuación se presenta un esquema para la realización de los informes:

1. *Introducción*: debe contener el título del experimento, los nombres de los autores, la fecha y cualquier otra circunstancia de interés. Además debe contener el objetivo del experimento y un breve resumen sobre los fundamentos teóricos.

2. *Procedimiento experimental*: descripción del dispositivo utilizado y de los pasos seguidos.

3. *Medidas experimentales*: han de escribirse siempre **todas las medidas** tomadas en el laboratorio, en forma de tabla cuando proceda.

4. *Análisis y discusión*: se describen en esta sección los resultados obtenidos a partir de las medidas experimentales, se detalla el cálculo de errores, se construyen gráficas si es necesario… También se pueden discutir las limitaciones del método o posibles problemas durante el experimento. Por último, se presentan las principales conclusiones a las que se ha llegado tras el análisis anterior.

5. *Referencias*. Es importante citar todas las fuentes utilizadas, evitar el plagio (si algo se copia literalmente debe ir entre comillas) y respetar los derechos de autor.

Biliografía complementaria

Física en la ciencia y en la industria, A. Cromer, editorial Reverté.

Expresion de la incertidumbre de medida en las calibraciones, norma EA-4/02, Empresa Nacional de Acreditación

Practical physics, G.L. Squires, editorial Cambridge University Press.

An introduction to uhncertainty and measurement, L. Kirkup y B. Frenkel, editorial Cambridge University Press.

Laboratorio de Física con soporte interactivo en Moodle, J. Ablanque, R. Benito, J. Losada y L. Seidel, Peason.

TABLA RESUMEN DE LA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE ERRORES

		Valor de la magnitud	Error
MAGNITUDES MEDIDAS	Una sola medición	medida x	Error del instrumento Δx_{ins}
	n mediciones	$\overline{x}$	$\sqrt{\Delta x_{\text{ins}}^2 + \dfrac{\text{var}\, x}{n}}$
MAGNITUDES CALCULADAS	Fórmula = *f(x,y,z)*	*f(x,y,z)*	$\Delta f = \left\|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right\|\Delta x + \left\|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right\|\Delta y + \left\|\dfrac{\partial f}{\partial z}\right\|\Delta z$ ó $\Delta f = \dfrac{f_{MAX} - f_{\min}}{2}$
	Ajuste mínimos cuadrados $y = \boldsymbol{m}\, x + \boldsymbol{c}$ a partir de medidas (x_i, y_i)	$m = \dfrac{Txy}{Tx}$ $c = \overline{y} - \dfrac{Txy}{Tx}\,\overline{x}$	$\Delta m = \sqrt{\dfrac{Tx\,Ty - Txy^2}{(n-2)\,Tx^2}}$ $\Delta c = \sqrt{\dfrac{Tx\,Ty - Txy^2}{(n-2)\,Tx^2}\left(\dfrac{Tx}{n} + \overline{x}^2\right)}$

Fórmulas utilizadas

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\text{var}\, x = \frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

$$Tx = \sum\left(x_i^2\right) - \frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2$$

$$Ty = \sum\left(y_i^2\right) - \frac{1}{n}\left(\sum y_i\right)^2$$

$$Txy = \sum x_i y_i - \frac{1}{n}\sum x_i \sum y_i$$