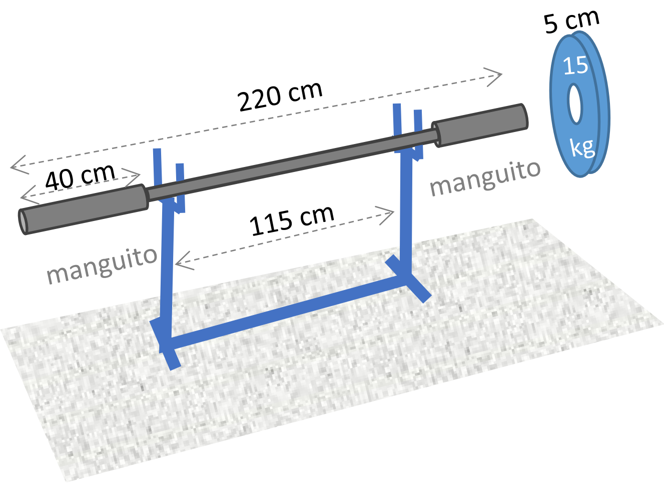
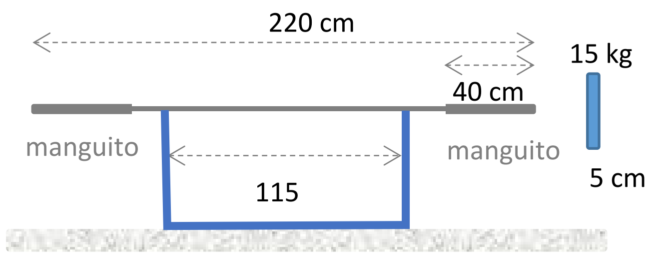
**Instrucciones**: **RAZONAR LAS RESPUESTAS** Tiempo: 2h 15

| DATOS | Densidades | Agua 1000 kg/m$^3$ | Aire 1.29 kg/m$^3$ | 1 litro = 1 dm$^3$ | 1 bar = 10$^5$ Pa |
|---|---|---|---|---|---|
| Acero: | Límite de elasticidad | $E_{el}$= 2.94 10$^8$ N/m$^2$ | Módulo de Young | E = 21.6 10$^{10}$ N/m$^2$ | |
| | Límite de rotura | $E_R$= 7.85 10$^8$ N/m$^2$ | | | |

1. [3 PUNTOS] Una barra de halterofilia olímpica es homogénea, su masa es 20 kg y su longitud 220 cm. Las zonas donde se puede colocar discos se denominan manguitos y miden 40 cm. La barra se apoya sobre los dos brazos de un soporte, que están separados 115 cm y equidistantes del centro de la barra. Se dispone solamente de discos de 15 kg y anchura 5 cm.

   Hallar el peso máximo que se puede cargar en uno solo de los manguitos (con el otro vacío) sin que se vuelque la barra.

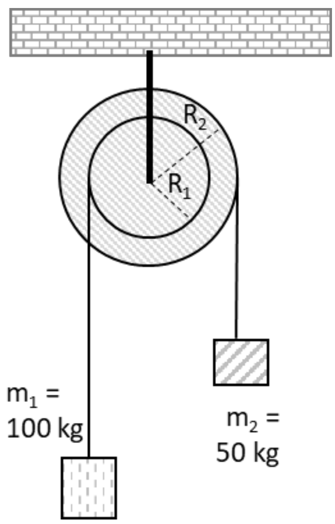



2. [3 PUNTOS] La polea de la figura tiene una masa de 50 kg, momento de inercia 8 kg m$^2$, radio interior $R_1$ = 0.3 m y radio exterior $R_2$ = 0.5 m. El sistema parte de la posición mostrada desde el reposo.

   a) Hallar al cabo de 2 s la velocidad angular de la polea (dar sentido de giro)

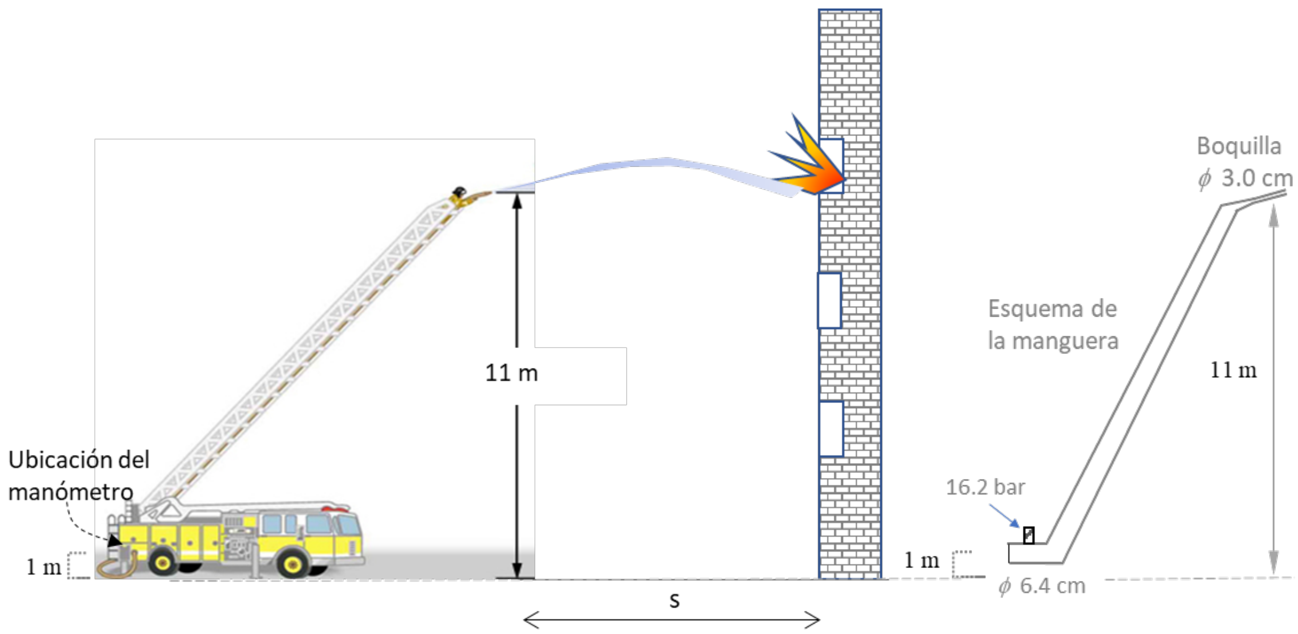
   b) Analizar qué diámetro debe tener el cable de acero que une polea y techo.



3. [4 PUNTOS] La figura muestra un bombero que trata de apagar un fuego. El bombero se sitúa a la misma altura que el fuego, 11 m. Una bomba impulsa el agua desde el depósito del camión, que inicialmente alberga 4000 litros. El **manómetro** de la manguera en el camión (a 1 m de altura sobre el suelo) marca una presión de 16.2 bar. La manguera tiene un diámetro de 6.4 cm, salvo en su parte final, en la boquilla que aguanta el bombero, cuyo diámetro es 3.0 cm.

   a) Estimar cuánto tarda en vaciarse el depósito.

   b) Estimar hasta qué distancia s del edificio se puede alejar el bombero si siente demasiado calor.



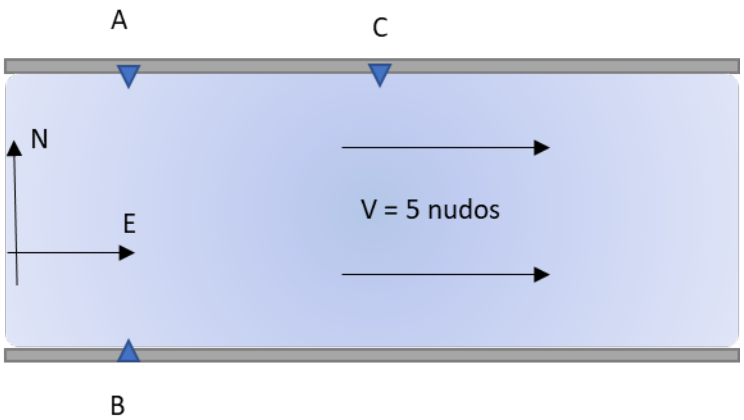
**Instrucciones**: **RAZONAR LAS RESPUESTAS** Tiempo: 2h 15

| DATOS | 1 litro = 1 $dm^3$ | Densidades ($kg/m^3$): agua 1000 | 1 nudo = 1852 m / hora |
|---|---|---|---|
| Rumbo efectivo: rumbo respecto al fondo marino | | Rumbo verdadero: rumbo respecto al agua | |

## TEMAS 1 a 5

1. [2 PUNTOS] Un pesquero navega con velocidad de máquinas (verdadera) de 6 nudos y rumbo verdadero de 0º. A las 9:00 divisa un faro a 10 millas con demora 90º y una lancha a 6 millas con demora 135º. A las 9:45 divisa el faro a 12 millas con demora 120º y a la lancha a la misma distancia y demora que a las 9:00 (6 millas, 135º). Determinar:
   a) la velocidad de la lancha respecto al faro (efectiva), al agua (verdadera) y respecto al pesquero.
   b) la velocidad de la corriente

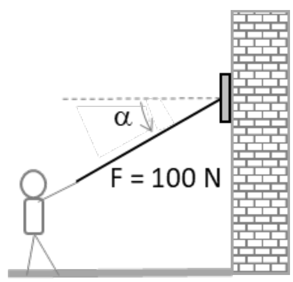
2. [2 PUNTOS] Un río de 0.5 millas de anchura fluye de O a E con una velocidad de corriente de 5 nudos. Una piragua, cuya velocidad **respecto al agua** es de 8 nudos, navega desde un punto A en la orilla hasta un punto B a la misma altura en la orilla opuesta y regresa hasta A (trayectoria perpendicular a la corriente). Otra piragua navega desde A a igual velocidad respecto al agua hacia el O hasta un punto C a 0.5 millas de A y regresa contracorriente hasta A.
   Determinar cuál de las piraguas realiza el recorrido en menos tiempo.




## TEMAS 6 a 7

3. [2 PUNTOS] Un piloto de 85 kg realiza con su avioneta un lazo vertical con un radio de 100 m. En el punto más bajo de su trayectoria su peso aparente (lo que marcaría una báscula situada bajo su asiento) es 300 kg (es decir, 300 g N).
   Determinar su velocidad en ese punto en km/h.

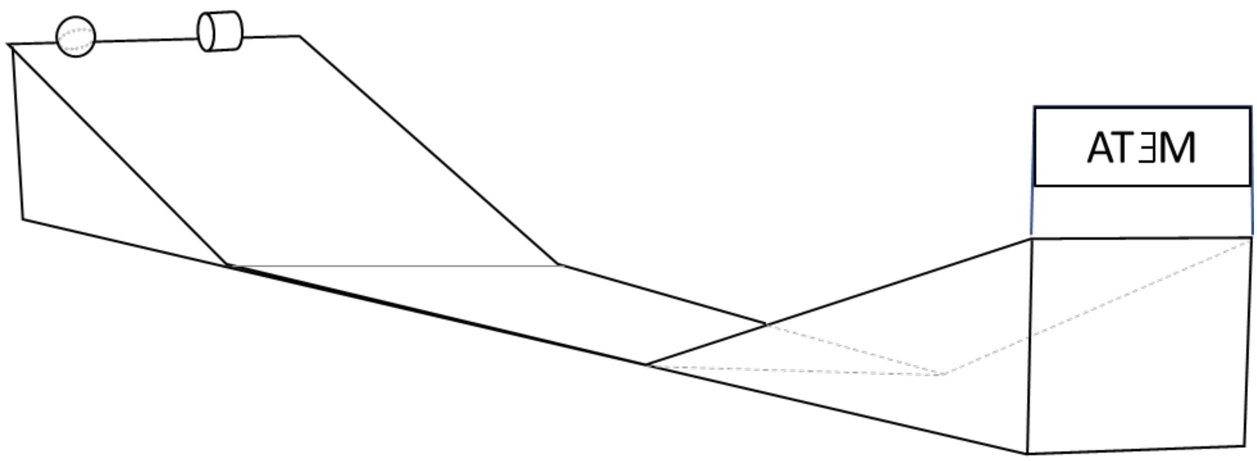
4. [2 PUNTOS] Un alumno empuja con un taco de billar un bloque de 5 kg contra una pared vertical. La fuerza del taco sobre el bloque es F = 100 N (módulo). El alumno puede variar el ángulo α que el taco forma con la horizontal entre 0 y 90º. Tanto el coeficiente de rozamiento estático como el cinético entre el bloque y la pared valen 0.4. Determinar para qué valores del ángulo α, la fuerza de rozamiento entre bloque y pared vale 25 N.



## TEMAS 8 a 9

| DATOS | 1 litro = 1 $dm^3$ | Densidades ($kg/m^{3)}$: agua 1000 Plomo 11200 Aluminio 2700 |
|---|---|---|
| 1 nudo = 1852 m / hora | Momento de inercia: cilindro 1/2 m $R^2$ esfera 2/5 m $R^2$ | |

5. [1 PUNTOS] Un cilindro y una esfera de igual masa y radio se dejan en reposo a igual altura sobre un plano inclinado, de forma que ruedan hacia abajo por el plano, recorren un segmento horizontal y suben por otro plano inclinado. En todos los tramos del recorrido ruedan sin deslizar.
¿Cuál llegará antes al final de su recorrido?
Dibujar las fuerzas sobre la esfera en los tres tramos (bajada, segmento horizontal, subida).

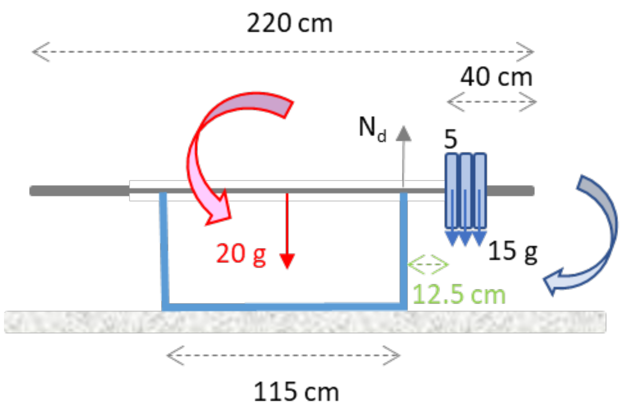


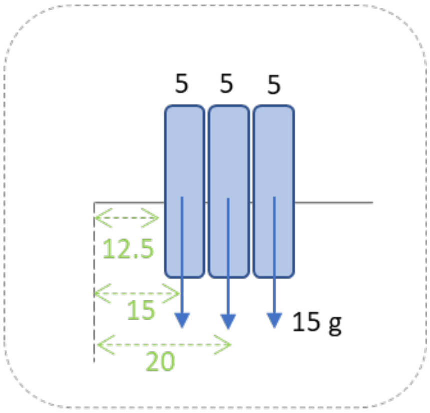

6. [0.5 PUNTOS] Se tienen dos objetos de idéntica forma y volumen, uno de plomo y otro de aluminio, ambos completamente sumergidos en agua. Escoger la opción verdadera:
   a) La fuerza de empuje sobre el objeto de plomo es mayor que sobre el objeto de aluminio
   b) La fuerza de empuje sobre ambos objetos es la misma
   c) La fuerza de empuje sobre el objeto de plomo es menor que sobre el objeto de aluminio
   d) No se puede precisar la fuerza de empuje porque no se sabe si los objetos están apoyados en el fondo o suspendidos de un cable

7. [0.5 PUNTOS] Un muelle de 8 cm de longitud se estira 2 cm cuando se cuelgan de él 20 g y se estira 3 cm cuando se cuelgan 30g, ¿se puede determinar cuánto se estirará si colgamos 4 kg del muelle?

| **Parte 1** | SOLUCIONES |
|---|---|

1. [3 PUNTOS] Una barra de halterofilia olímpica es homogénea, su masa es 20 kg y su longitud 220 cm. Las zonas donde se puede colocar discos se denominan manguitos y miden 40 cm. La barra se apoya sobre los dos brazos de un soporte, que están separados 115 cm y equidistantes del centro de la barra. Se dispone solamente de discos de 15 kg y anchura 5 cm. Hallar el peso máximo que se puede cargar en uno solo de los manguitos (con el otro vacío) sin que se vuelque la barra.




La distancia desde el punto derecho de apoyo de la barra hasta el comienzo del manguito es:

d = (220/2) – 40 – (115/2) = 12.5 cm

Queremos estudiar el límite en el que la barra está a punto de volcar; en esa situación, no habrá normal en el soporte izquierdo (la barra no se apoya en él, solo en el soporte derecho y gira respecto a él). Tomamos el soporte derecho como punto para hallar los momentos de las fuerzas. Respecto a ese punto, el peso de la barra crea un momento que tiende a girar la barra en sentido antihorario, mientras el peso de los discos tiende a girar en sentido horario. Si el momento del peso de la barra es mayor al de los discos, la barra no vuelca, porque aparecería fuerza en el soporte izquierdo para compensar. Pero si el momento de los discos supera el de la barra, la barra vuelca.

Momento del peso de la barra = 20 g (115 / 2) = 11270 N cm

Momento del primer disco = 15 g (12.5 + 2.5) = 2205 N cm SUMA = 2205

Momento del segundo disco = 15 g (12.5 + 2.5 + 5) = 2940 N cm SUMA = 5145

Momento del tercer disco = 15 g (12.5 + 2.5 + 10) = 3675 N cm SUMA = 8820

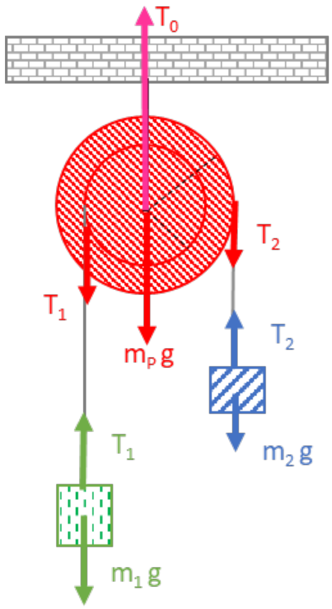
Parece claro que si añadimos un cuarto disco la suma ya sobrepasará al momento de la barra:

Momento del cuarto disco = 15 g (12.5 + 15 + 2.5) = 4410 N cm SUMA = 13230

M de cuatro discos = 2205 + 2940 + 3675 + 4410 = 13230 > M barra = 11270 N cm vuelca

M de tres discos = 2205 + 2940 + 3675 = 8820 N cm < M barra = 11270 N cm no vuelca

⇨ el máximo número de discos de 15 kg que pueden colocarse es 3.




2. [3 PUNTOS] La polea de la figura tiene una masa de 50 kg, momento de inercia 8 kg $m^2$, radio interior $R_1$ = 0.3 m y radio exterior $R_2$ = 0.5 m. El sistema parte de la posición mostrada desde el reposo.
a) Hallar al cabo de 2 s la velocidad angular de la polea (dar sentido de giro)
b) Analizar qué diámetro debe tener el cable de acero que une polea y techo.

a) La figura muestra las fuerzas sobre $m_1$, sobre $m_2$ y sobre la polea. Como el momento de $m_1 g$ es mayor que el de $m_2 g$ (100 g 0.3 > 50 g 0.5), el sistema gira en sentido antihorario, y escribimos con este criterio las ecuaciones de movimiento:

$m_1\, g - T_1 = m_1\, a_1$
$T_2 - m_2\, g = m_2\, a_2$
$T_1\, R_1 - T_2\, R_2 = I\, \alpha$

Se necesita relacionar $a_1$, $a_2$ y $\alpha$ para poder resolver. Si suponemos que las cuerdas no deslizan, $\alpha = a_1 / R_1 = a_2 / R_2$ (p.ej. cuando la masa 1 cae s m, la cuerda 1 de desenrolla s m, el borde de la polea gira s m, y el ángulo barrido es s / $R_1$). Por tanto:

$100\, g - T_1 = 100\, \alpha\, 0.3$
$T_2 - 50\, g = 50\, \alpha\, 0.5$
$T_1\, 0.3 - T_2\, 0.5 = 8\, \alpha$

Al resolver: $T_1 = 930$ N $T_2 = 532$ N $\alpha = 1.66$ rad/s$^2$ $a_1 = 0.50$ m/s$^2$ $a_2 = 0.83$ m/s$^2$

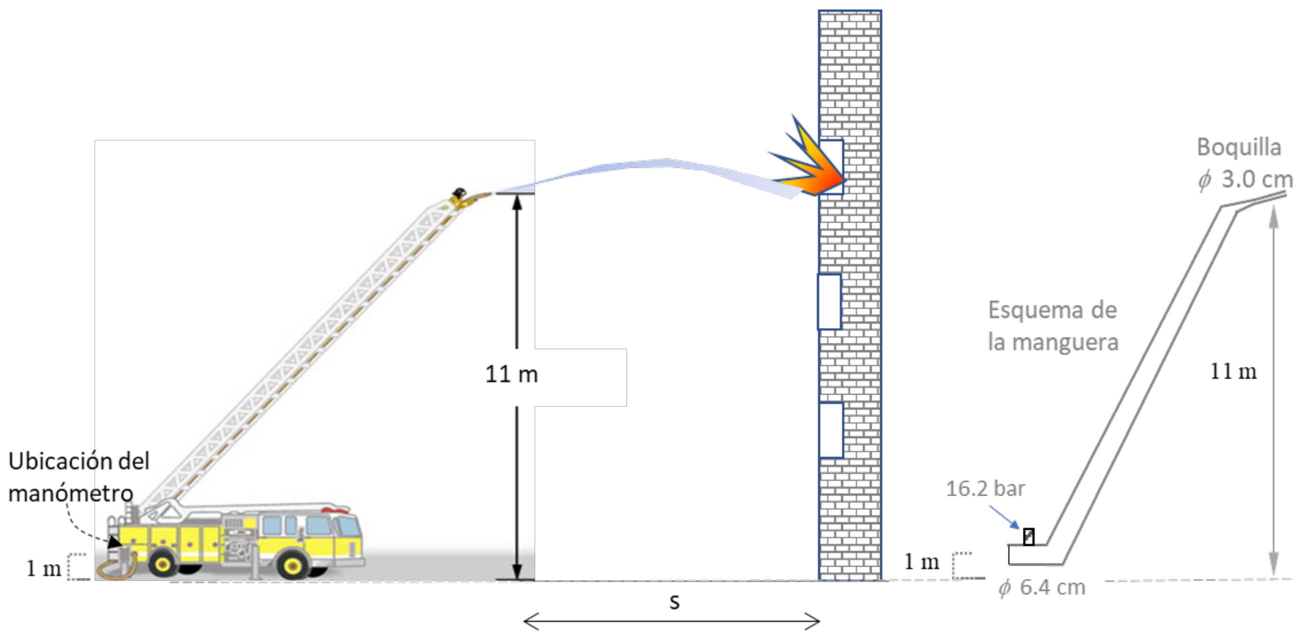
$\omega = \alpha\, t \Rightarrow \omega(2) = 1.66\ \ 2 = 3.32$ rad/s

b) Una ecuación que no hemos usado antes es la de las fuerzas verticales en la polea (que suman 0):

$T_0 = T_1 + T_2 + m_P\, g = 930 + 532 + 50\ 9.8 = 1952$ N

Para que no rompa:
$E_R = 7.85\ 10^8$ N/m$^2$ > 1952 / S => $S_{lim} = 2.49\ 10^{-6}$ m$^2$ => Diam lim rotura = 1.8 mm
Para que no quede deformado:
$E_E = 2.94\ 10^8$ N/m$^2$ > 1952 / S => $S_{lim} = 6.64\ 10^{-6}$ m$^2$ => Diam lim deformación = 2.9 mm

3. [4 PUNTOS] La figura muestra un bombero que trata de apagar un fuego. El bombero se sitúa a la misma altura que el fuego, 11 m. Una bomba impulsa el agua desde el depósito del camión, que inicialmente alberga 4000 litros. El **manómetro** de la manguera en el camión (a 1 m de altura sobre el suelo) marca una presión de 16.2 bar. La manguera tiene un diámetro de 6.4 cm, salvo en su parte final, en la boquilla que aguanta el bombero, cuyo diámetro es 3.0 cm. a) Estimar cuánto tarda en vaciarse el depósito. b) Estimar hasta qué distancia s del edificio se puede alejar el bombero si siente demasiado calor.




a) Se aplica Bernouilli (conservación de la energía) entre el comienzo de la manguera, donde se sitúa el manómetro, y la boquilla de salida (a presión atmosférica):

$P_1 + ½ \rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + ½ \rho v_2^2 + \rho g h_2 \Rightarrow$

$(16.2 + 1)\ 10^5 + ½\ 1000\ v_1^2 + 1000\ 9.8\ 1 = 1\ 10^5 + ½\ 1000\ v_2^2 + 1000\ 9.8\ 11$

Para relacionar las velocidades en ambos puntos se puede usar la ecuación de continuidad:

$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_1 = \phi_2^2/ \phi_1^2\ v_2 = (3/6.4)^2\ v_2 = 0.22\ v_2$

Se usa ahora esta relación en la ecuación de Bernouilli:

$(16.2 + 1)\ 10^5 + ½\ 1000\ (0.22\ v_2)^2 + 1000\ 9.8\ 1 = 1\ 10^5 + ½\ 1000\ v_2^2 + 1000\ 9.8\ 11 \Rightarrow v_2 = 56.7$ m/s

Gasto $= A_2 v_2 = 0.04\ m^3/s$

Tiempo en vaciarse $= 4\ m^3 / 0.04\ m^3/s = 100$ s

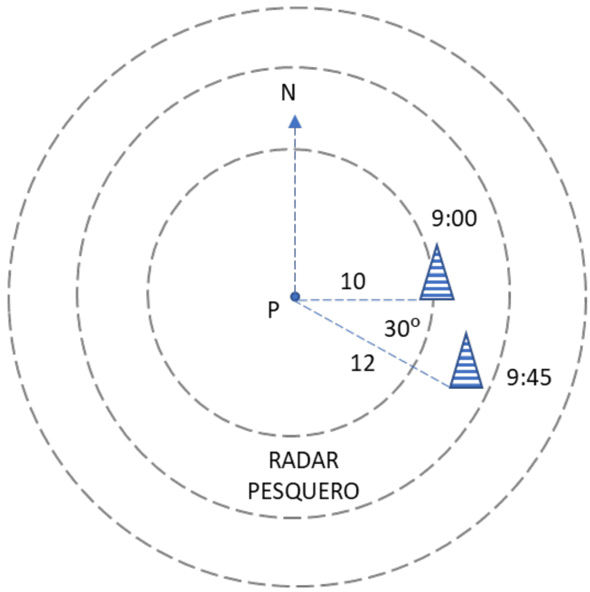
b) el máximo alcance a la misma altura se logra con un ángulo de 45º; analizamos el movimiento del chorro de agua como un tiro parabólico:

$y = 0 + v_0 \text{ sen } 45\ t – ½\ 9.8\ t^2 \Rightarrow 0 = 0 + 56.7 \text{ sen } 45\ t – ½\ 9.8\ t_v^2 \Rightarrow t_{vuelo} = 8.2$ s

Alcance: $s = v_0 \cos 45\ t = 56.7 \cos 45\ 8.2 = 328$ m (aprox)

| **Parte 2** | SOLUCIONES |
|---|---|

1. [2 PUNTOS] Un pesquero navega con velocidad de máquinas (verdadera) de 6 nudos y rumbo verdadero de 0º. A las 9:00 divisa un faro a 10 millas con demora 90º y una lancha a 6 millas con demora 135º. A las 9:45 divisa el faro a 12 millas con demora 120º y a la lancha a la misma distancia y demora que a las 9:00.
Determinar:
a) la velocidad de la lancha respecto al faro (efectiva), al agua (verdadera) y respecto al pesquero.
b) la velocidad de la corriente




a) La lancha no se mueve en el radar del pesquero, lo que significa que su velocidad respecto al pesquero es 0. Y además la velocidad efectiva y verdadera de ambas embarcaciones es la misma:

$\mathbf{v}_{\text{lancha / agua}} = \mathbf{v}_{\text{lancha / pesquero}} + \mathbf{v}_{\text{pesquero / agua}} = 6\,\mathbf{j}$ nudos

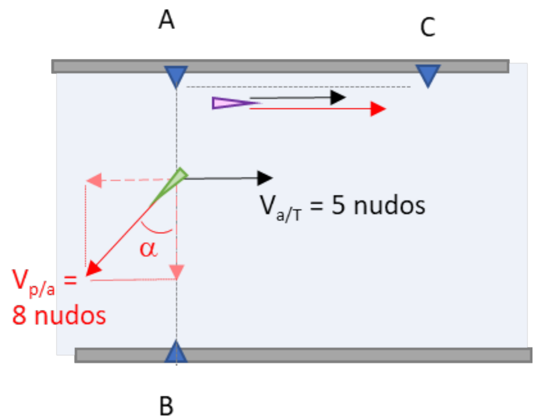
$\mathbf{v}_{\text{lancha / faro}} = \mathbf{v}_{\text{lancha / pesquero}} + \mathbf{v}_{\text{pesquero / faro}} =$

$= 0 - \mathbf{v}_{\text{faro / pesquero}} = -\,[\,\mathbf{r}_{\text{final faro / pesq}} - \mathbf{r}_{\text{incial faro / pesq}}\,]\,/\,\text{tiempo} =$

$= -\,[\,(12\cos 30\,\mathbf{i} - 12\,\text{sen}\,30\,\mathbf{j}) - 10\,\mathbf{i}\,]$ millas / (0.75 horas) $= -0.52\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j}$ nudos

b) $\mathbf{v}_{\text{agua /faro}} = \mathbf{v}_{\text{agua / pesq}} + \mathbf{v}_{\text{pesq / faro}} = -\,\mathbf{v}_{\text{pesq / agua}} + \mathbf{v}_{\text{pesq / faro}} = -6\,\mathbf{j} + (-0.52\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j}) = -0.52\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$ nudos

2. [2 PUNTOS] Un río de 0.5 millas de anchura fluye de O a E con una velocidad de corriente de 5 nudos. Una piragua, cuya velocidad respecto al agua es de 8 nudos, navega desde un punto A en la orilla hasta un punto B a la misma altura en la orilla opuesta y regresa hasta A (trayectoria perpendicular a la corriente). Otra piragua navega desde A a igual velocidad respecto al agua hacia el O hasta un punto C a 0.5 millas de A y regresa contracorriente hasta A. Determinar cuál de las piraguas realiza el recorrido en menos tiempo.




La piragua que navega hacia B debe orientarse de forma que su componente hacia el O compense los 5 nudos de la corriente:

$8\,\text{sen}\,\alpha = 5 \Rightarrow \alpha = 38.7º$

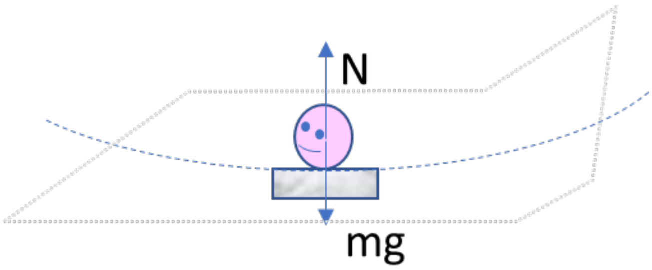
La velocidad hacia B (componente N-S) será por tanto: $8\cos 38.7º = 6.24$ nudos

$\text{tiempo}_{A\text{-}B\text{-}A} = d / v = 1 / 6.24 = 0.16$ horas

La piragua que navega hacia C navega a favor de corriente a la ida, pero en contra al volver:

$\text{tiempo}_{A\text{-}C\text{-}A} = d_1 / v_1 + d_2 / v_2 = 0.5 / (8+5) + 0.5 / (8-5) = 0.205$ horas

3. [2 PUNTOS] Un piloto de 85 kg realiza con su avioneta un lazo vertical con un radio de 100 m. En el punto más bajo de su trayectoria su peso aparente (lo que marcaría una báscula situada bajo su asiento) es 300 kg (es decir, 300 g N). Determinar su velocidad en ese punto en km/h.



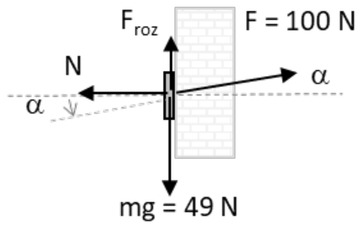

Sobre la persona solo actúa su peso (atracción de la Tierra) y la normal de la báscula. Por la 2ª ley, y dado que realiza una circunferencia:

$N - mg = ma = m\,v^2/R \Rightarrow 300\,g - 85\,g = 85\,v^2 / 100 \Rightarrow v = 49.78$ m/s = 179 km/h

4. [2 PUNTOS] Un alumno empuja con un taco de billar un bloque de 5 kg contra una pared vertical. La fuerza del taco sobre el libro tiene un módulo F = 100 N. El alumno puede variar el ángulo $\alpha$ que el taco forma con la horizontal entre 0 y 90º. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y la pared es 0.4. Determinar para qué valores del ángulo $\alpha$ la fuerza de rozamiento vale 25 N.

.

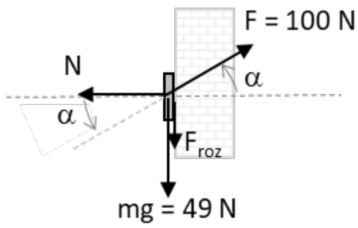
2ª ley de Newton:




Eje x $\quad N = F\cos\alpha$

Eje y $\quad F\,\text{sen}\,\alpha - mg \pm Froz = ma$

El signo ± se debe a que la fuerza de rozamiento puede ser hacia arriba o hacia abajo, en función del ángulo $\alpha$:




si $F\,\text{sen}\,\alpha < mg \Rightarrow 100\,\text{sen}\,\alpha < 49 \Rightarrow \alpha < 29.3^\circ$ $\quad F_{roz}$ es hacia arriba

si $F\,\text{sen}\,\alpha > mg \Rightarrow 100\,\text{sen}\,\alpha > 49 \Rightarrow \alpha > 29.3^\circ$ $\quad F_{roz}$ es hacia abajo

Para buscar en qué casos la $F_{roz}$ =25 N:

<u>Caso estático</u>: la $F_{roz}$ se ajusta al valor necesario para mantener el bloque estático; por tanto, será 25 cuando esa sea la diferencia entre $F\,\text{sen}\,\alpha$ y mg:

$F\,\text{sen}\,\alpha - mg \pm F_{roz} = 0 \Rightarrow \alpha = \text{arc sen}\,[\,(mg \pm F_{roz}) / F\,] = \text{arc sen}\,[\,(49 \pm 25) / 100\,] \Rightarrow$

$\alpha_1 = 47.7^\circ$ ($F_{roz}$ hacia abajo) y $\alpha_2 = 13.9^\circ$ ($F_{roz}$ hacia arriba)

Comprobamos en ambos casos, si $F_{roz\,MAX} = \mu N = \mu F\cos\alpha > 25$, porque en caso contrario la solución no sería válida: $\mu F\cos\alpha_1 = 0.4\;100\cos 47.7 = 26.9 > 25$ N y $\mu F\cos\alpha_2 = 0.4\;100\cos 13.9 = 38.8 > 25$ N => ambas son válidas

<u>Caso cinético</u>: la $F_{roz}$ toma el valor $\mu N = \mu F\cos\alpha \Rightarrow F_{roz} = \mu F\cos\alpha \Rightarrow \alpha_3 = \text{arc cos}\,[\,F_{roz} / \mu F\,] = 51.3^\circ$

Estas son las tres soluciones.

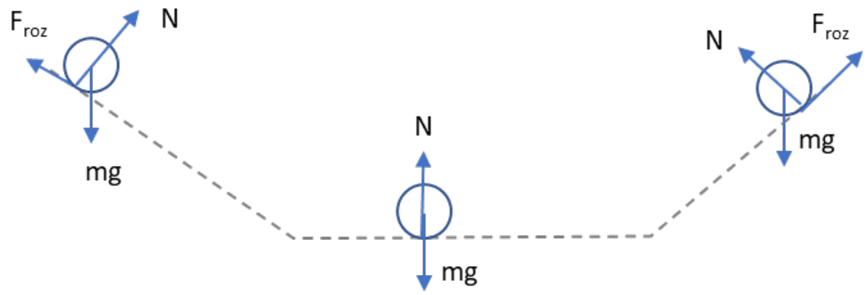
5. [1 PUNTOS] Un cilindro y una esfera de igual masa y radio se dejan en reposo a igual altura sobre un plano inclinado, de forma que ruedan hacia abajo por el plano, recorren un segmento horizontal y suben por otro plano inclinado. En todos los tramos del recorrido ruedan sin deslizar.
¿Cuál llegará antes al final de su recorrido?
Dibujar las fuerzas sobre la esfera en los tres tramos (bajada, segmento horizontal, subida).

La esfera tiene menor momento de inercia que el cilindro 2/5 $mR^2$ frente a ½$mR^2$, por lo que la energía cinética de rotación necesaria para alcanzar cierta velocidad v es menor en el caso de la esfera. Como ambos objetos parten de la misma altura, la esfera alcanzará mayor velocidad desde el primer momento y llegará antes a la meta.

Matemáticamente, tomamos por ejemplo el momento en que llegan al plano horizontal:

$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I v^2 / R^2 \Rightarrow v = [2mgh / (m+I/R^2)]^{1/2}$ es decir, a mayor I menor v

Para dibujar las fuerzas hay que tener en cuenta que la esfera rueda sin deslizar, por lo que **el punto de contacto no se mueve respecto al suelo**:




6. [0.5 PUNTOS] Se tienen dos objetos de idéntica forma y volumen, uno de plomo y otro de aluminio, ambos completamente sumergidos en agua. Escoger la opción verdadera:
   a) La fuerza de empuje sobre el objeto de plomo es mayor que sobre el objeto de aluminio
   b) La fuerza de empuje sobre ambos objetos es la misma
   c) La fuerza de empuje sobre el objeto de plomo es menor que sobre el objeto de aluminio
   d) No se puede precisar la fuerza de empuje porque no se sabe si los objetos están apoyados en el fondo o suspendidos de un cable

   El empuje depende del volumen sumergido que es igual para ambos.

7. [0.5 PUNTOS] Un muelle de 8 cm de longitud se estira 2 cm cuando se cuelgan de él 20 g y se estira 3 cm cuando se cuelgan 30g, ¿se puede determinar cuánto se estirará si colgamos 4 kg del muelle?

Se puede concluir que el muelle se deformará totalmente o se romperá. Según la ley de Hooke le correspondería alargarse 4 m, lo que es inviable para un muelle de 8 cm.