Tema 3

Representación de Fourier: introducción

Funciones base de los sistemas LTI (I)

- Funciones base del tema 2: impulsos desplazados
  - Si representamos la señal de entrada como combinación lineal de impulsos desplazados y escalados, la respuesta del sistema LTI es una combinación lineal de las respuestas al impulso desplazadas y escaladas.
  - Sistemas discretos: Suma de convolución

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

-
  - Sistemas continuos: Integral de convolución

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Funciones base de los sistemas LTI (II)

- Funciones base del tema 3: exponenciales complejas
  - Sistemas discretos: $\phi[n] = z^n, \;\; z = re^{j\Omega}$
  - Sistemas continuos: $\phi(t) = e^{st}, \; s = \sigma + j\omega$
  - $\phi(t), \phi[n]$ son funciones propias (autofunciones, funciones características o vector característico) de los sistemas LTI

> *Dada una matriz cuadrada $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, diremos que el vector $x \in \mathbb{C}^m$ es un vector propio o característico y $\lambda \in \mathbb{C}$ el valor propio o característico si $Ax = \lambda x$, es decir, que multiplicar un vector característico x por una matriz es equivalente a multiplicar el vector característico por un escalar λ*

  - El efecto o acción del sistema sobre la señal de entrada si esta es una función propia, se reduce a una multiplicación escalar:

$$H\{\phi[n]\} = \lambda\phi[n]; \quad H\{\phi(t)\} = \lambda\phi(t)$$

Funciones base de los sistemas LTI (III)

- Si representamos las señales de entrada en términos de las funciones propias de los sistemas LTI, $\phi[n]$ y $\phi(t)$, entonces tanto la entrada como la salida serán una superposición lineal de estas funciones base

  – Sistemas discretos:

$$x[n] = \sum_k a[k]\phi_k[n] \quad \longrightarrow \quad y[n] = H\{x[n]\} = \sum_k a[k]\lambda_k\phi_k[n]$$

  – Sistemas continuos:

$$x(t) = \sum_k a[k]\phi_k(t) \quad \longrightarrow \quad y(t) = H\{x(t)\} = \sum_k a[k]\lambda_k\phi_k(t)$$

Funciones base de los sistemas LTI (IV)

- Sistemas LTI continuos

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

- Como el sistema LTI es continuo

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- Si $x(t) = e^{st}$ entonces,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{st}H(s) = x(t)H(s)$$

donde $H(s) = \lambda\ es$ el valor propio asociado a la exponencial e^{st}

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

Funciones base de los sistemas LTI (V)

- $y(t) = x(t) \cdot H(s)$ y $s = \sigma + j\omega$

$$x(t) = \sum_k a[k]e^{s_k t} \longrightarrow y(t) = H\{x(t)\} = \sum_k a[k]H(s_k)e^{s_k t} =$$

$$= \sum_k a[k]H(\sigma_k + j\omega_k)e^{(\sigma_k + j\omega_k)t}$$

  - Si $\sigma = 0$, transformada de Fourier:

$$x(t) = \sum_k a[k]e^{j\omega_k t} \longrightarrow y(t) = x(t)H(j\omega) = \sum_k a[k]H(j\omega_k)e^{j\omega_k t}$$

y $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$

  - Si $\sigma \neq 0$, transformada de Laplace

Funciones base de los sistemas LTI (VI)

- Sistemas LTI discretos

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

- Como el sistema LTI es discreto

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

- Si $x[n] = z^n$ entonces,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} = z^n H(z)$$

  – $H(z) = \lambda\ es$ el valor propio asociado a la exponencial compleja z^n

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

Funciones base de los sistemas LTI (VII)

- $y[n] = x[n]H(z) = z^n H(z)$ y $z = re^{j\Omega}$

$$x[n] = \sum_k a[k] z_k^n \longrightarrow \; y[n] = H\{x[n]\} = \sum_k a[k] H(z_k) z_k^n =$$

$$= \sum_k a[k] H\left(r_k e^{j\Omega_k}\right)\left(r_k e^{j\Omega_k}\right)^n$$

  - Si $r = 1$, transformada de Fourier

$$x[n] = e^{j\Omega n} \; \longrightarrow y[n] = x[n]H\left(e^{j\Omega}\right)$$

y $H\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\Omega n}$

  - Si $r \neq 1$, transformada z

Ortogonalidad de las exponenciales complejas (I)

- Ortogonalidad: papel fundamental en la representación de Fourier
  - Producto Interno:
    - Sean $\phi(t)$ y $\psi(t)$ dos funciones periódicas de periodo T. Se define el producto interno como:

$$\langle \phi(t), \psi(t) \rangle = \int_{\langle T \rangle} \phi(t)\psi^*(t)dt$$

    - Sean $\phi[n]$ y $\psi[n]$dos funciones periódicas de periodo N. Se define el producto interno como:

$$\langle \phi[n], \psi[n] \rangle = \sum_{n=\langle N \rangle} \phi[n]\psi^*[n]$$

donde $n = \langle N \rangle$ significa que n recorre N enteros consecutivos

Ortogonalidad de las exponenciales complejas (II)

- Función base: exponencial compleja discreta

  $\phi_k[n] = e^{jk\Omega_0 n}; \quad \phi_m[n] = e^{jm\Omega_0 n}$, N periódicas

- Analizamos el producto interno:

$$I_{k,m} = \langle \phi_k[n], \phi_m[n] \rangle = \sum_{n=\langle N \rangle} \phi_k[n] {\phi_m}^*[n] =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\Omega_0 n} \left(e^{jm\Omega_0 n}\right)^* = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\Omega_0 n} e^{-jm\Omega_0 n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\Omega_0 n}$$

- Como k y m están restringidos al mismo intervalo de N valores enteros consecutivos

$$I_{k,m} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\Omega_0 n} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} e^0 = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N, & k = m \\[2ex] \dfrac{1 - e^{j(k-m)\Omega_0 N}}{1 - e^{j(k-m)\Omega_0}} = \dfrac{1 - e^{j(k-m)2\pi}}{1 - e^{j(k-m)\Omega_0}} = 0, & k \neq m \end{cases}$$

Exponenciales complejas separadas múltiplos enteros de la frecuencia fundamental son ortogonales entre si

Ortogonalidad de las exponenciales complejas (III)

- Función base: exponencial compleja continuas

  $\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}; \quad \phi_m(t) = e^{jm\omega_0 t}$, T periódicas

- Analizamos el producto interno:

$$I_{k,m} = \langle \phi_k(t), \phi_m(t) \rangle = \int_{\langle T \rangle} \phi_k(t)\phi_m{}^*(t)\,dt = \int_0^T e^{jk\omega_0 t}\left(e^{jm\omega_0 t}\right)^* dt$$

$$= \int_0^T e^{jk\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t}\,dt = \int_0^T e^{j(k-m)\omega_0 t}\,dt =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^T e^0\,dt = \int_0^T dt = T, & k = m \\ \displaystyle\frac{1}{j(k-m)\omega_0} e^{j(k-m)\omega_0 t}\Big]_0^T = \frac{e^{j(k-m)\omega_0 T} - 1}{j(k-m)\omega_0} = \frac{e^{j(k-m)2\pi} - 1}{j(k-m)\omega_0} = 0, & k \neq m \end{cases}$$

Exponenciales complejas continuas separadas múltiplos enteros de la frecuencia fundamental también son ortogonales entre si

Representación de Fourier

- Representar señales periódicas como una suma ponderada de exponenciales complejas relacionadas armónicamente

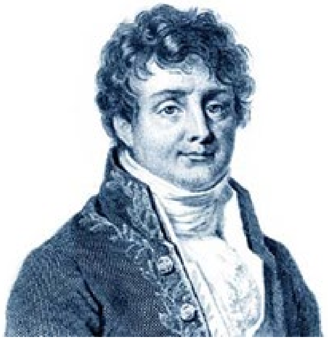
$$x(t) = \sum_k A[k] e^{jk\omega_0 t}; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$x[n] = \sum_k A[k] e^{jk\Omega_0 n}; \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

- Los pesos, $A[k]$, representan la contribución de cada exponencial a la señal total y describen el comportamiento de la señal en función de la frecuencia

Tiempo	Periódica	Aperiódica
Continua	Series de Fourier (FS)	Transformada de Fourier (FT)
Discreta	Series de Fourier (DTFS/DFT)	Transformada de Fourier (DTFT)

Joseph Fourier (I)



» Jean-Baptiste Joseph Fourier [Auxerre (Francia), 1768 - París, 1830]. Matemático y científico francés. Elaboró un método matemático para determinar la conducción del calor mediante la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes. Estas "series de Fourier" permitieron resolver problemas de física e ingeniería, como en los sistemas de telecomunicaciones. Descubrió el teorema que lleva su nombre y que permite el estudio de cualquier fenómeno ondulatorio.

- Hijo de sastre, huérfano a los ocho años, fue recogido por el organista de la catedral, seguidor de las teorías de Rousseau, quién le enseñaría a leer y escribir y le formaría en sus mismos ideales. Ingresó en la Escuela militar de Auxerre, donde destaca en todas las materias y especialmente en matemáticas, y posteriormente fue enviado al noviciado de Saint-Benoit-sur-Loire, donde le encargaron del curso de matemáticas.

* (Colegio Oficial de Ingenieros de Telecomunicación (COIT))

Joseph Fourier (II)

- Ante los movimientos revolucionarios de finales de 1789, regresó a la Escuela militar de Auxerre, donde los le encargaron la cátedra de retórica y compartió la de matemáticas con su antiguo profesor M. Bonnard.
- A la edad de 14 años Fourier había completado el estudio de los seis volúmenes de la Théorie générale des équations algébriques, redactada por el prestigioso matemático Étienne Bézout, y un año más tarde fue premiado por su conocimiento del Traité théorique et expérimental d'hydrodynamique y del Traité élémentaire de méchanique statique, escritos por el matemático enciclopedista Charles Bossut.
- A los 20 años, Fourier escribió una memoria sobre las ecuaciones algebráicas, que fue presentada a la Academia de Ciencias, mereciendo el reconocimiento de Lagrange, Monge y Laplace.
- Durante la revolución francesa (1789-1799) fue nombrado miembro del Comité de Salud Pública de Auxerre y, gracias a la caída del poder de Robespierre, se libró de ser guillotinado.

Joseph Fourier (III)

- A finales de 1794 se incorporó a la Escuela Normal Superior de París donde contó con profesores como Lagrange y Laplace. En 1795 ocupó la cátedra de Análisis y Mecánica dejada por Lagrange.
- En 1798 el Directorio aprueba la Campaña de Egipto y encomienda su dirección al general Bonaparte. Por el carácter científico añadido a su carácter marcial, también es conocida como Expedición de Egipto, de la que Joseph Fourier forma parte como consejero científico con rango diplomático. Posteriormente es nombrado secretario del Instituto de Egipto, fundado por Napoleón, con la misión de debilitar la influencia inglesa en el Oriente. Fourier redactó el prefacio histórico de la obra Description de l'Egypte. En 1801 Fourier regresó de Egipto con una amplia colección de objetos, entre ellos una copia de la Piedra de Rosetta, que su amigo Jean-François Champollion, lograría descifrar en 1822.

Joseph Fourier (IV)

- Ya en Francia, en 1802 Napoleón lo nombra director del departamento de Estadística del Sena y prefecto del Departamento de Isère. En 1809 le concedió el título nobiliario de barón. En 1810 crea la Facultad Imperial de Grenoble, de la que Fourier será rector, y en 1815 la Academia del Delfinado.
- Comenzó a investigar los fenómenos de propagación y difusión del calor que le permitieron modelar la evolución de la temperatura a través de series trigonométricas. Estos trabajos mejoraron el modelado matemático de fenómenos físicos y contribuyeron a los fundamentos de la termodinámica.
- Sin embargo, la simplificación excesiva que proponen estas herramientas fue muy debatida, principalmente por sus maestros Laplace y Lagrange.
- En 1815 Fourier dimite de sus cargos para trasladarse a París. Fourier sobrevive a la caída de Napoleón y recibe honores de los Borbones. Es admitido en la Academia de Ciencias de Francia en 1817 y cinco años más tarde es nombrado secretario perpetuo de las secciones de matemáticas y física.

Joseph Fourier (V)

- Fourier descubrió el teorema que lleva su nombre, que también puede ser empleado en el estudio de la luz, del sonido y de cualquier fenómeno ondulatorio. Completó su estudio sobre la teoría matemática de la conducción del calor, encontró que algunas series sinusoidales relacionadas armónicamente eran útiles para representar la distribución de la temperatura a través de un cuerpo y lo publicó en un libro llamado Théorie analytique de la chaleur en 1822.
- En 1827, Fourier publicó un artículo en el que afirmaba que la atmósfera terrestre podría actuar como aislante (efecto invernadero).
- Estas series infinitas de funciones trigonométricas, ahora conocidas como las series de Fourier, constituyen la herramienta matemática básica del análisis empleado para analizar funciones periódicas a través de la descomposición de dicha función en una suma infinita de funciones sinusoidales mucho más simples (como combinación de senos y cosenos con frecuencias enteras). Las series de Fourier inspiraron a Ohm razonamientos análogos sobre el flujo eléctrico.
- Estas series fueron de notable importancia posterior para el avance del análisis matemático y con interesantes aplicaciones para la resolución de muchos problemas de física e ingeniería.

Joseph Fourier (VI)

- Es además una herramienta sumamente útil en la teoría matemática abstracta. Áreas de aplicación incluyen análisis vibratorio, acústica, óptica, procesamiento de imágenes y señales, y compresión de datos.
- En ingeniería, para el caso de los sistemas de telecomunicaciones, y a través del uso de los componentes espectrales de frecuencia de una señal dada, se puede optimizar el diseño de un sistema para la señal portadora del mismo.
- Otro trabajo importante del científico francés fue en el método de eliminación para la solución de un sistema de desigualdades, teoría muy usada actualmente para programación lineal.
- Jean-Baptiste Joseph Fourier falleció en París el 16 de mayo de 1830.
- Su nombre figura en la lista de los 72 científicos de la Torre Eiffel.
- Un cráter lunar lleva el nombre de Fourier y un asteroide descubierto en 1992 fue denominado (10101) Fourier.