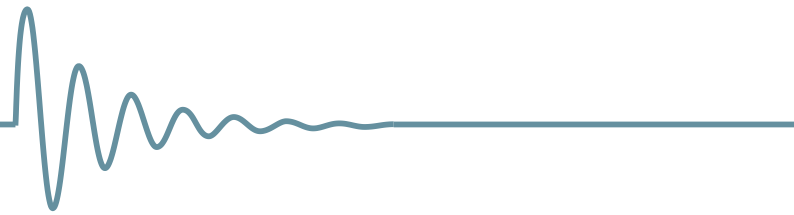
Tema 1

Introducción a las señales y los sistemas

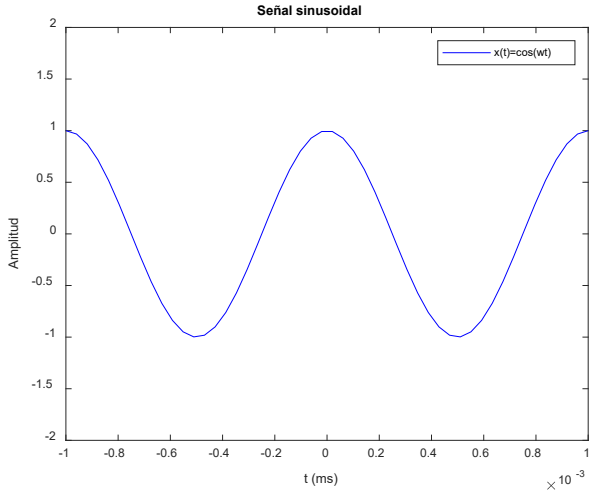


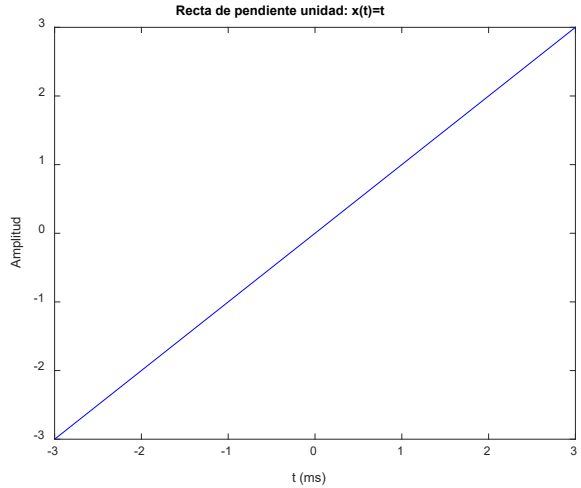
Concepto de señal (I)

- Señal: todo aquello que contiene información sobre la naturaleza o el comportamiento de algún fenómeno físico. Se podría de decir que una señal no es más que una portadora de información
    - Señales eléctricas
    - Señales acústicas
    - Señales de video
    - Señales de radio
    - Señales biológicas
    - ……
  - Representación matemática: función de una o más variables independientes que lleva información del proceso físico o matemático al que representa
    - Señales unidimensionales: $f(u)$
    - Señales multidimensionales: $f(u, v, w \cdots)$
    - $f(u) \in \mathbb{R}, u = t, \omega$
    - $f(u) \in \mathbb{C}, u = s, z$, siendo $s = \sigma + j\omega$; $z = re^{j\Omega}$

Clasificación de la señales: señales continuas y señales discretas (I)

- Señales *continuas*: señales definidas para todo instante de tiempo t, es decir, para un continuo de valores de la variable independiente. La variable independiente puede tomar cualquier valor real

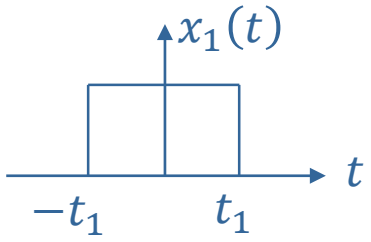


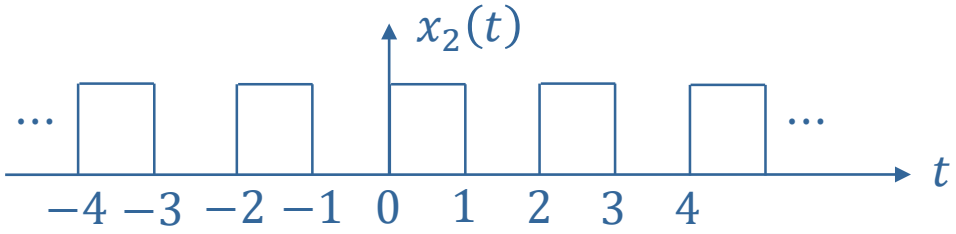


- El valor de $x(t)$ está especificado en todo instante t del intervalo de tiempos
- Definición matemática:
  - Sea t_1 un determinado instante temporal y sea ε un número real positivo infinitesimalmente pequeño, tal que $t_1^+ = t_1 + \varepsilon$ y $t_1^- = t_1 - \varepsilon$
  - Diremos que $x(t)$ es continua en t_1 si $x(t_1) = x(t_1^+) = x(t_1^-)$

Clasificación de la señales: señales continuas y señales discretas (II)

- Si $x(t_1) \neq x(t_1^+) \neq x(t_1^-)$, diremos que $x(t)$ es una *señal discontinua* en t_1 y la amplitud de la señal presentará un salto en ese punto
- Si $x(t)$ presenta un número finito o infinito numerable de discontinuidades diremos que la señal es *continua por tramos* si la amplitud del salto en cada discontinuidad es finita





- $x_1(t)$: función pulso rectangular
  - $Continua\ \forall t\ -t = \pm t_1; Amplitud\ discontinuidad = 1$

- $x_2(t)$: función tren de pulsos periódico
  - $Continua\ \forall t\ -t = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots; Amplitud\ discontinuidad = 1$

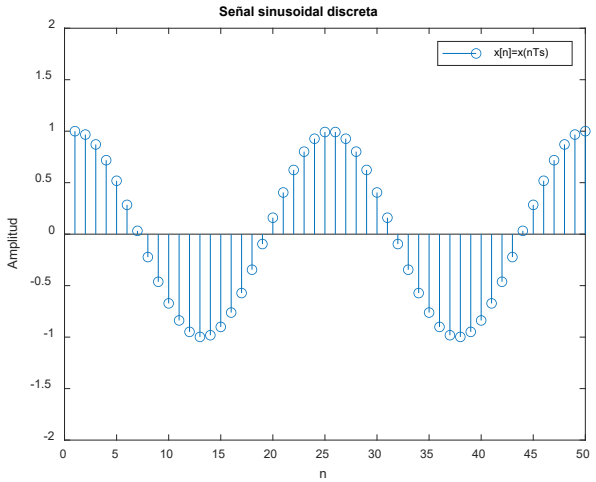
Clasificación de la señales: señales continuas y señales discretas (III)

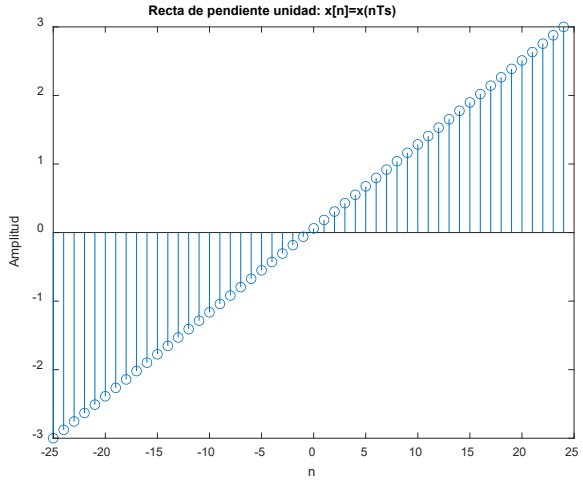
- Señales *discretas*: señales definidas para un conjunto discreto de valores de la variable independiente. También se las conoce como secuencias discretas.
  - Pueden generarse mediante proceso de muestreo:

$$x[n] = x(nT_s), n \in \mathbb{Z}\ y\ T_s\ periodo\ de\ muestreo$$

$$x[n] = \cdots x[-2], x[-1], x[0], x[1], x[2] \cdots$$

  - Cada muestra puede tomar cualquier valor en amplitud





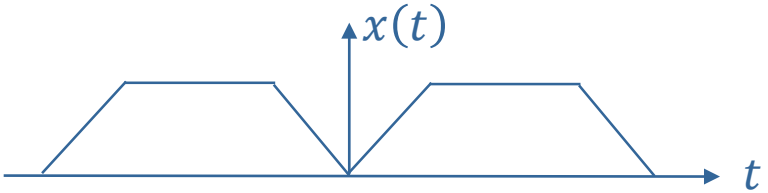
Clasificación de la señales: simetrías (IV)

- Las señales continuas y discretas pueden presentar determinadas simetrías
  - Si $x(t), x[n] \in \mathbb{R}$, hablaremos de simetría par/impar
  - Si $x(t), x[n] \in \mathbb{C}$, hablaremos de simetría conjugada

- Señales pares e impares

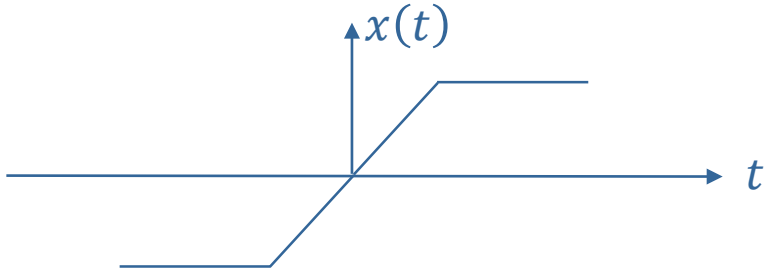
Simetría par

$$x(t) = x(-t)\ \forall t$$
$$x[n] = x[-n]\ \forall n$$



Simetría impar

$$x(t) = -x(-t)\ \forall t$$
$$x[n] = -x[-n]\ \forall n$$



$$x(0) = 0$$
$$x[0] = 0$$

Clasificación de la señales: simetrías (V)

- Toda señal, continua o discreta, puede escribirse como la suma de una señal par y otra impar.
- Si definimos

$$\begin{cases} x_p(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) + x(-t)\big) \\ x_i(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) - x(-t)\big) \end{cases}; \qquad \begin{cases} x_p[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[-n]\right) \\ x_i[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] - x[-n]\right) \end{cases}$$

entonces,

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$
$$x[n] = x_p[n] + x_i[n]$$

- Ejercicio: Calcular la parte par e impar de la señal $x(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

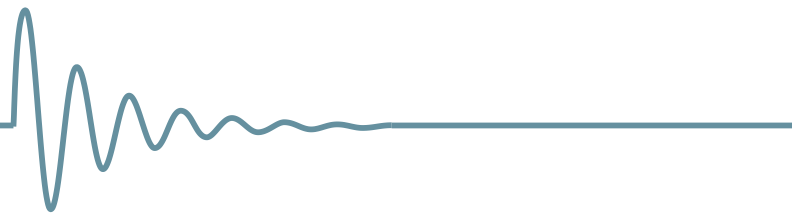
Clasificación de la señales: simetrías (VI)

- Señales simétricas conjugadas
  - La señal compleja $x(t)$ tiene simetría conjugada si $x(-t) = x^*(t)$ o equivalentemente, $x(t) = x^*(-t)$. (Podríamos realizar mismos cálculos para señales discretas)
  - Sea $x(t) = a(t) + jb(t)$ (1)
  - Complejo conjugado de $x(t)$: $x^*(t) = a(t) - jb(t)$ (2)
  - De (1): $x(-t) = a(-t) + jb(-t)$ (3)
  - Por definición: $x(-t) = x^*(t)$ luego podemos escribir (3) como:

$$x^*(t) = a(-t) + jb(-t)$$

Y comparando con (2): $a(t) = a(-t)$ y $b(t) = -b(-t)$

- Una señal compleja tiene simetría conjugada si su parte real es par y su parte imaginaria es impar



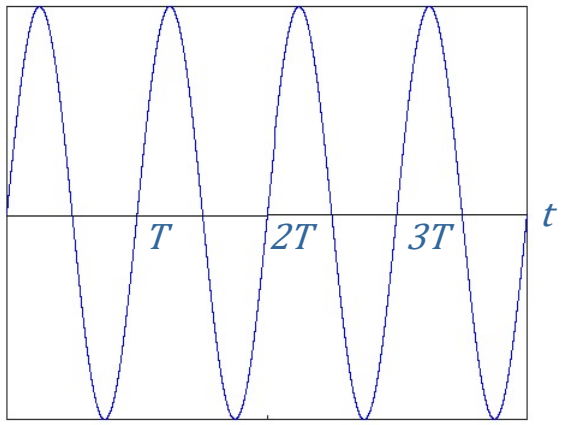
Clasificación de la señales: periodicidad (VII)

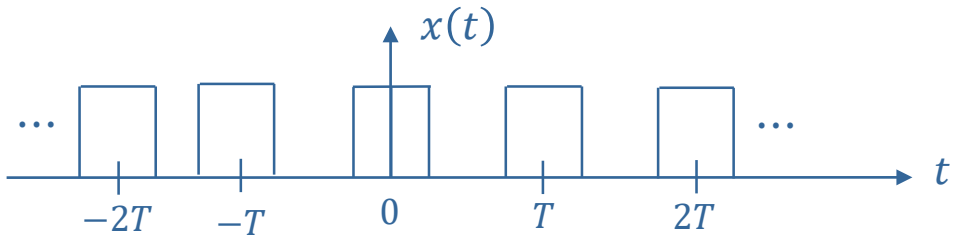
- Señales continuas periódicas
  - La señal $x(t)$ es periódica si existe un $T \in \mathbb{R}\ y\ T > 0$ tal que

$$x(t) = x(t+T)\ \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Si la señal $x(t)$ es periódica de periodo T, también lo es para cualquier múltiplo del periodo:

$$x(t) = x(t+mT)\ \ m \in \mathbb{Z}$$





Clasificación de la señales: periodicidad (VIII)

- Periodo fundamental (T_0): valor mínimo del periodo para el que se satisface la condición de periodicidad
- Frecuencia fundamental (f_0): $f_0 = \frac{1}{T_0},\ Hz$ o $ciclos/s$
- Frecuencia angular (ω_0): $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}\, radianes/s$

- Ejemplo: Sea $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$

$$x(t+T) = A\sin(\omega(t+T)+\phi) =$$
$$= A\sin(\omega t + \omega T + \phi)$$

$x(t) = x(t+T)$ si se cumple que $\omega T = m2\pi$ o $T = m\frac{2\pi}{\omega},\ m \in \mathbb{Z}^+$

El periodo fundamental vendrá dado por $T = \frac{2\pi}{\omega},\ m = 1$

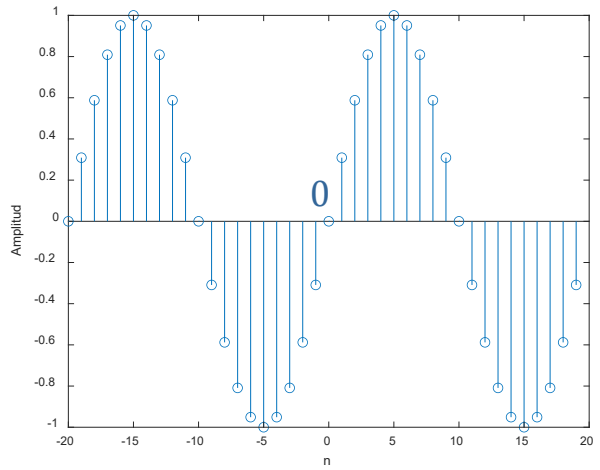
Clasificación de la señales: periodicidad (VIII)

- Señales discretas periódicas
  - La señal $x[n]$ es periódica si existe un $N \in \mathbb{Z}\ y\ N > 0$, es decir $N \in \mathbb{N}$, tal que

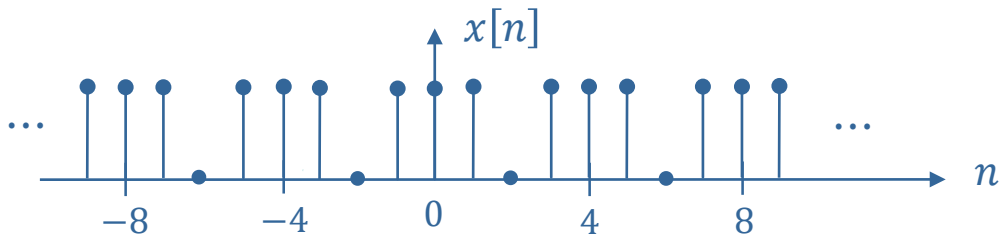
$$x[n] = x[n+N]\ \forall n \in \mathbb{Z}$$

Si la señal $x[n]$ es periódica de periodo N, también lo es para cualquier múltiplo del periodo:

$$x[n] = x[n+mN]\ \ m \in \mathbb{Z}$$



N=20



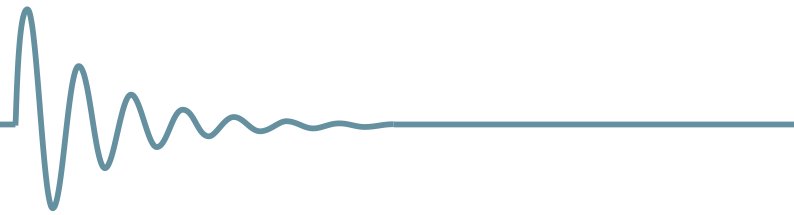
$N = 4$

Clasificación de la señales: periodicidad (IX)

- Periodo fundamental (N_0): menor entero positivo para el que se satisface la condición de periodicidad
- Frecuencia angular (Ω_0): $\Omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{N} radianes$

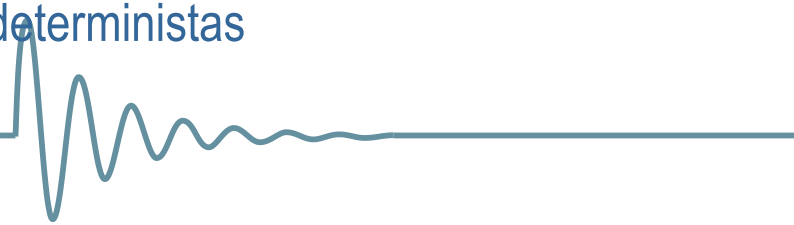
- Resumen:

- $$\left.\begin{array}{l} x(t) = x(t+T) \;\; \forall t, T \in \mathbb{R}; \mathrm{T} > 0 \\ x[n] = x[n+N] \;\; n, N \in \mathbb{Z}; \; N > 0 \end{array}\right\}; \quad \begin{array}{l} T \in \mathbb{R}^+ \\ N \in \mathbb{Z}^+(\mathbb{N}) \end{array}$$



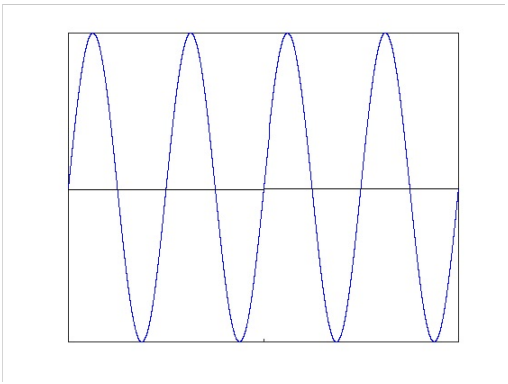
Clasificación de la señales: deterministas y aleatorias (X)

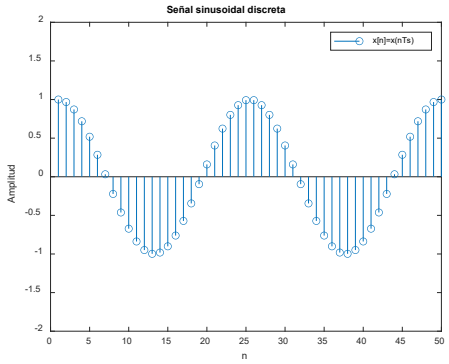
- Modelos deterministas: El valor de la señal se puede determinar para cualquier instante de tiempo. No existe incertidumbre y por tanto el valor de la señal se puede predecir. Si conocemos $x(t)\ o\ x[n]$, conocemos la amplitud de la señal para todos los valores de $t\ o\ n$:
  - Si $x(t) = 2t^2, x(2{,}3) = 10{,}58$
  - Cualquiera de los ejemplos anteriores (señales sinusoidales, pulsos rectangulares,…)
- Modelos aleatorios: No se puede conocer el valor concreto de la señal para cualquier instante de tiempo; existe incertidumbre sobre el valor concreto que toma la señal; toman valores aleatorios y por tanto se caracterizan estadísticamente: valor medio, valor cuadrático medio, desviación estándar, correlación, …. Si decimos que se conoce $x(t)$, estamos suponiendo que conocemos valores estadísticos de la señal pero no sabemos con certeza el valor de la señal en ese instante:
  - Comunicaciones: el modelo estocástico es el único capaz de representar la información de contiene la señal
  - En esta asignatura trabajaremos con modelos deterministas

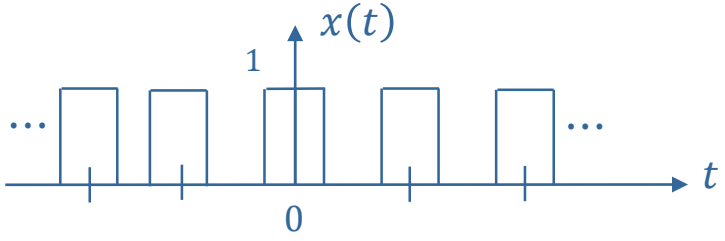


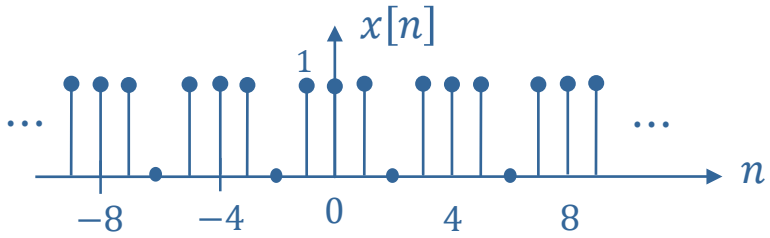
Clasificación de la señales: analógicas y digitales (XI)

- Señal analógica: la amplitud de la señal puede tomar un valor entre un conjunto infinito de valores
- Señal digital: la amplitud de la señal puede tomar un valor entre un conjunto finito de valores









- Continuo / discreto: variable independiente
- Analógico / digital: valores que toma la señal

Parámetros de interés de las señales (I)

- Existen una serie de medias que proporcionan información sobre la naturaleza y la magnitud de las distintas señales. Las principales son:
- **Valor medio**: es la media temporal de la amplitud de la señal
  - *Señales continuas*
    - Intervalo finito: $\bar{x} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)dt$ o $\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$
    - Intervalo infinito: $\bar{x} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$
    - Si señal periódica: $\bar{x} = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t)dt$
  - *Señales discretas*
    - Intervalo finito: $\bar{x} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]$ o $\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n]$
    - Intervalo infinito: $\bar{x} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n]$
    - Si señal periódica: $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]$

Parámetros de interés de las señales (II)

- **Valor pico**: valor máximo del módulo de la señal
  - *Señales continuas*
    - $x_p = \max|x(t)|\,, \quad t \in \mathbb{R},$
  - *Señales discretas*
    - $x_p = \max|x[n]|\,, \quad n \in \mathbb{Z},$
- **Potencia instantánea**: potencia en un instante dado
  - *Señales continuas*
    - $P_i = |x(t)|^2$
  - *Señales discretas*
    - $P_i = |x[n]|^2$
- **Energía**: medida cuadrática y no negativa
  - *Señales continuas*
    - $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt\,; \qquad E_x = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2\, dt, \quad t_1 < t < t_2$
  - *Señales discretas*
    - $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2\,; \qquad E_x = \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2, \quad n_1 \leq n \leq n_2$

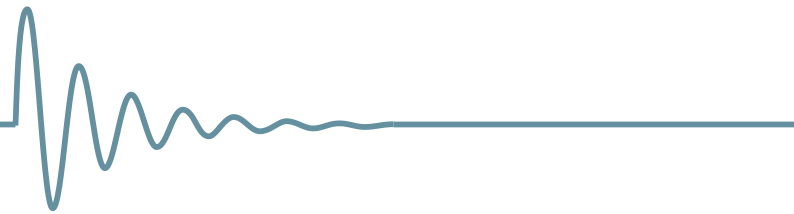
Parámetros de interés de las señales (III)

- **Potencia**: medida cuadrática y no negativa de interés para señales de energía infinita y representa la energía por unidad de tiempo
  - *Señales continuas*
    - Señal aperiódica: $P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$
    - Señal periódica: $P_x = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt$
  - *Señales discretas*
    - Señal aperiódica: $P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$
    - Señal periódica: $P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2$

- **Tres clases importantes de señales:**
  - **Señales de energía**: señales de energía finita y potencia media nula, $0 < E_x < \infty;\ \ P_x = 0$
  - **Señales de potencia**: señales de potencia media finita y energía infinita, $0 < P_x < \infty;\ E_x = \infty$
  - Si no satisfacen ninguno de los requisitos anteriores no se consideran ni de energía ni de potencia, $E_x = \infty; P_x = \infty\ (x(t) = t)$

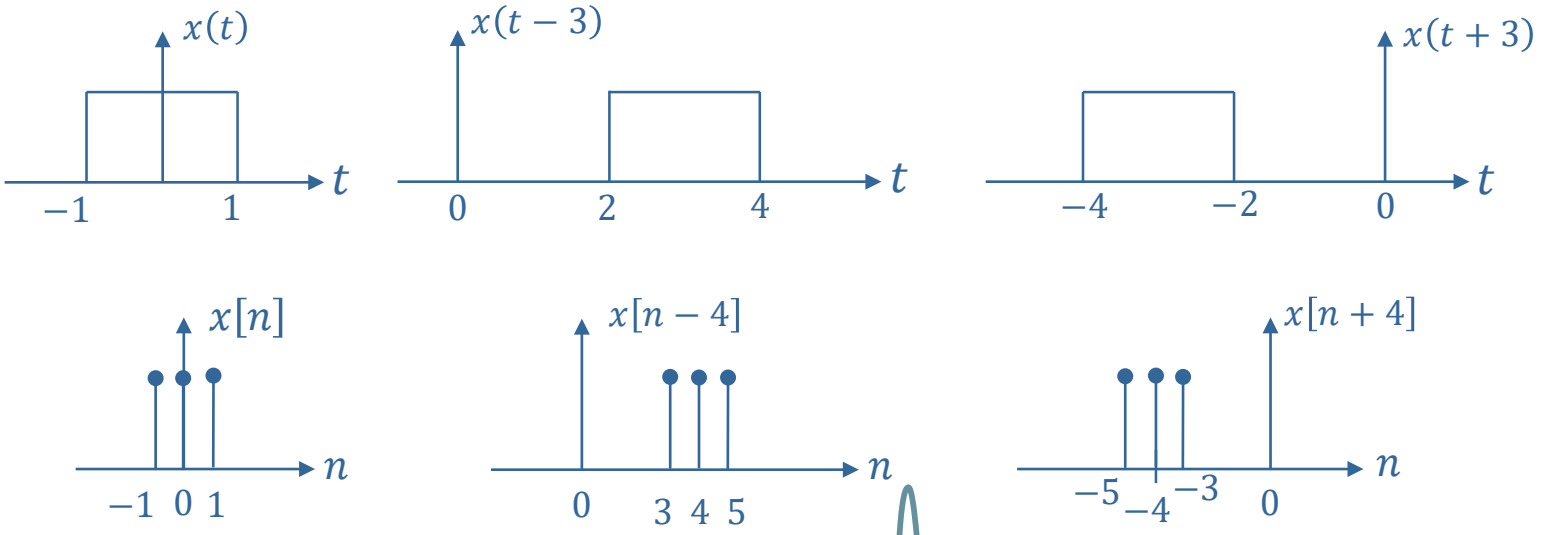
Operaciones básicas en señales (I)

- **Operaciones sobre la señal**:
  - Escalado en amplitud:
    - $y(t) = Ax(t);\ \ y[n] = Ax[n]$
  - Suma:
    - $y(t) = x_1(t) + x_2(t);\ \ y[n] = x_1[n] + x_2[n]$
  - Multiplicación:
    - $y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t);\ \ y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n]$
  - Diferenciación:
    - $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$
  - Integración:
    - $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$



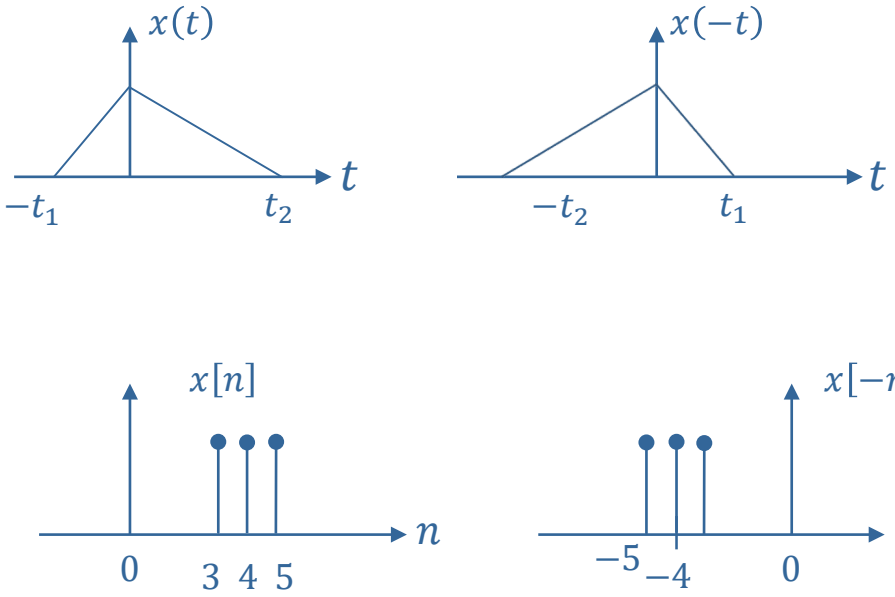
Operaciones básicas en señales (II)

- **Operaciones sobre la variable independiente**: ¿Cómo cambia $x(t)$ o $x[n]$ cuando se transforma t o n?
  - **Desplazamiento temporal**:
    - $x(t) \rightarrow y(t) = x(t - t_0),\ t_0 \in \mathbb{R};\ \ x[n] \rightarrow y[n] = x[n - n_0],\ n_0 \in \mathbb{Z}$
      - Si $t_0 > 0$ o $n_0 > 0$, señal retrasada t_0 segundos o n_0 muestras (la forma de la onda se desplaza hacia la derecha con respecto al eje de tiempos)
      - Si $t_0 < 0$ o $n_0 < 0$, señal adelantada t_0 segundos o n_0 muestras (la forma de la onda se desplaza hacia la izquierda con respecto al eje de tiempos)



Operaciones básicas en señales (III)

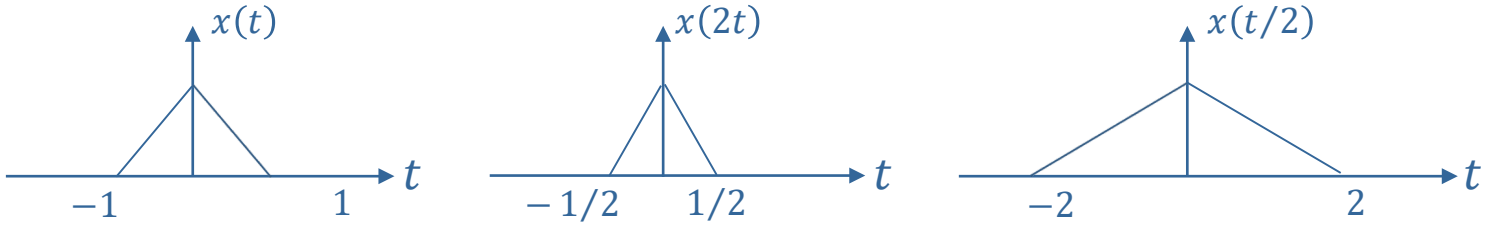
- **Reflexión**:
  - $x(t) \rightarrow y(t) = x(-t),\ t_0 \in \mathbb{R};\ \ x[n] \rightarrow y[n] = x[n - n_0],\ n_0 \in \mathbb{Z}$



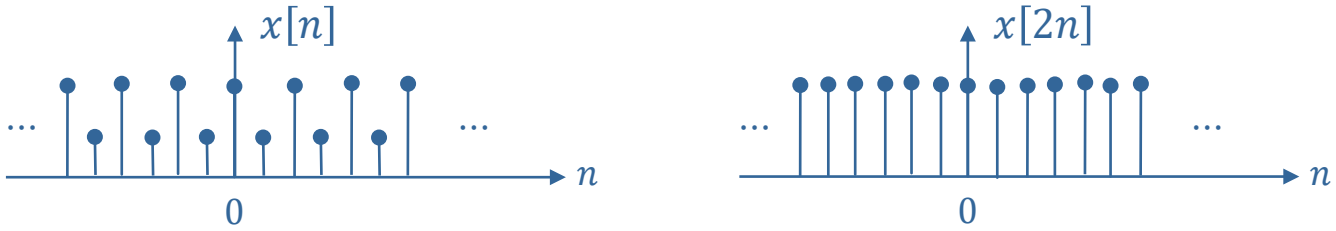
- Casos de interés
  - Señales pares
  - Señales impares

Operaciones básicas en señales (IV)

- **Escalado temporal**:
  - $x(t) \rightarrow y(t) = x(at), \quad a, t \in \mathbb{R}$
    - Si $|a| > 1 \implies y(t)\ es\ una\ versión\ comprimida\ de\ x(t)$
    - Si $|a| < 1 \implies y(t)\ es\ una\ versión\ expandida\ de\ x(t)$

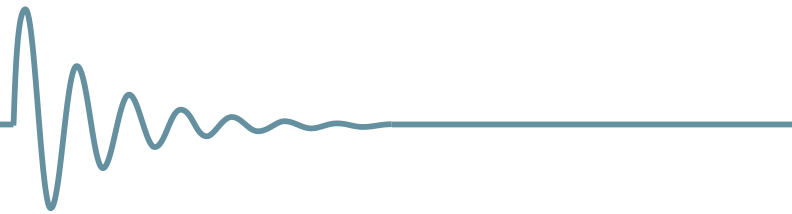


- Y si la señal es discreta?: $x[n] \rightarrow y[n] = x[kn], \quad k, n \in \mathbb{Z}$



Operaciones básicas en señales (V)

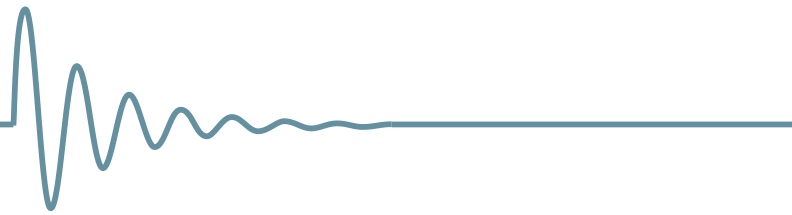
- *Las operaciones de reflexión y desplazamiento o escalado y desplazamiento no son conmutativas*
- *Escalado y reflexión si son conmutativas*
- ¿Cómo determinar el orden de las operaciones?
  - $y(t) = x(at \pm b) = x\left(a\left(t \pm \frac{b}{a}\right)\right)$
  - $y(t) = x(-at \pm b) = x\left(-a\left(t \mp \frac{b}{a}\right)\right)$
    - Escalar por el factor a. Si a negativo, reflejar la señal $x(t)$
      - » $reflejar\ y\ escalar \equiv escalar\ y\ reflejar$
    - Desplazar la señal b/a. Se retrasa o adelanta en función del signo de b/a
      - » Si $b/a\ negativo \Longrightarrow\ adelanto$
      - » Si $b/a\ positivo \Longrightarrow\ retraso$



Señales elementales (I)

- Interés en análisis de señales:
  - Sirven de base para otras.
  - Modelan situaciones reales

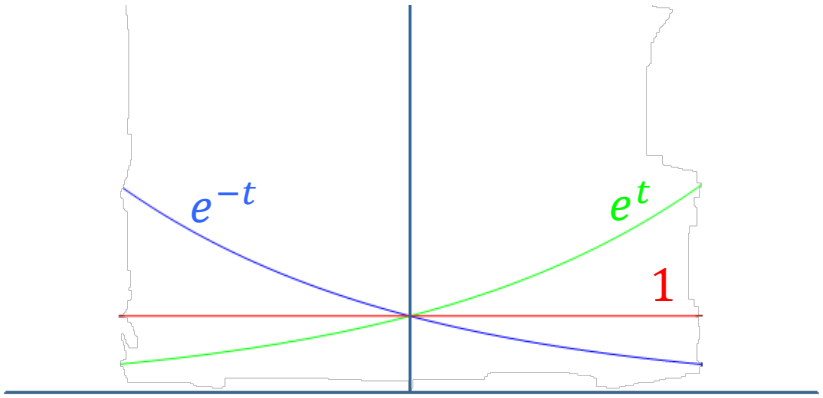
- ¿Qué señales vamos a estudiar?
  - Señales exponenciales y sinusoidales.
    - Continuas.
    - Discretas.
    - Propiedades de periodicidad.
  - Impulso, escalón y rampa.
    - Discretas.
    - Continuas.



Señales elementales: exponencial compleja continua (I)

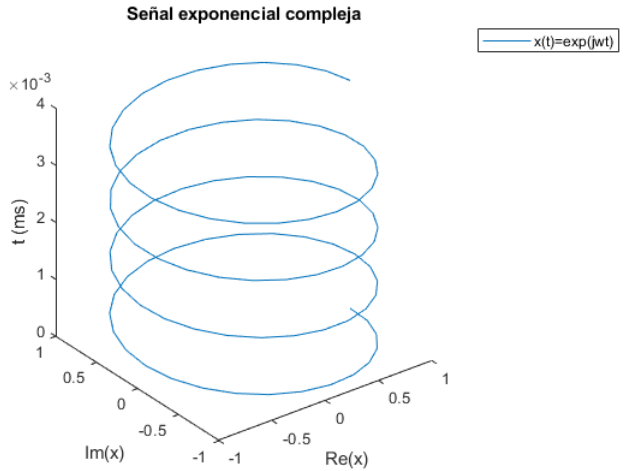
- **Señales exponenciales complejas**.
  - Papel fundamental en el tratamiento de señales.
  - $x(t) = Ae^{st}, \quad A, s \in \mathbb{C}; \;\; s = \sigma + j\omega$

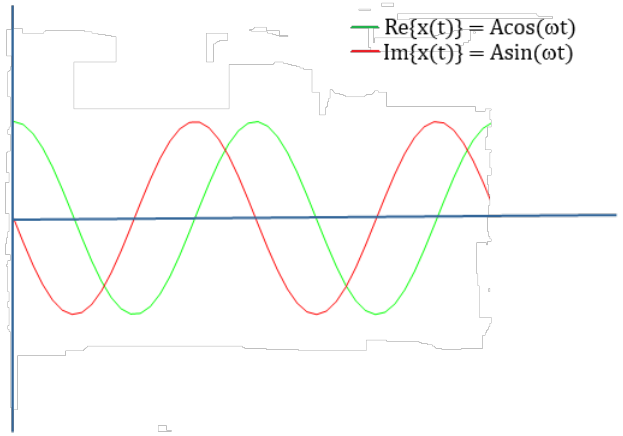
  - Exponenciales reales: $x(t) = Ae^{st}, \quad A, s \in \mathbb{R}; \; s = \sigma$
    - $x(t) = Ae^{\sigma t}$
      - $\sigma > 0 \Longrightarrow x(t)$: *exponencial real creciente*
      - $\sigma < 0 \Longrightarrow x(t)$: *exponencial real decreciente*
      - $\sigma = 0 \Longrightarrow x(t)$: *constante*



Señales elementales: exponencial compleja continua (II)

- **Exponenciales con exponente imaginario**: $x(t) = Ae^{st}, \quad A \in \mathbb{C}; \; s = j\omega$
  - $x(t) = Ae^{j\omega t}, \quad A \in \mathbb{C}, \; \omega \in \mathbb{R}$
    - $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\,\sin(\omega t) \Longrightarrow x(t) = A\,\cos(\omega t) + j\,A\,\sin(\omega t)$





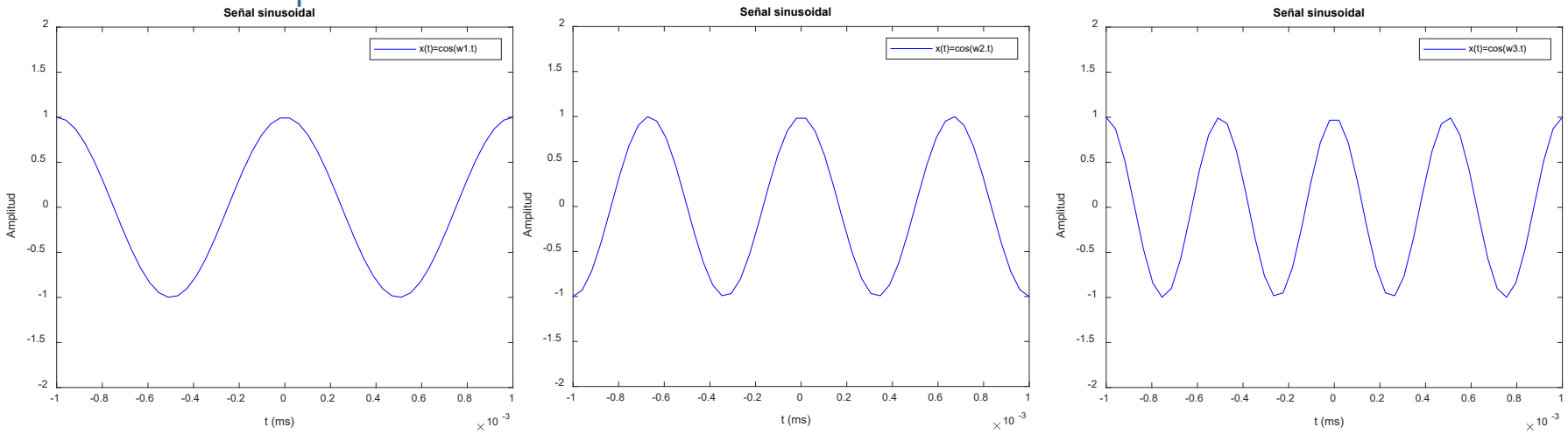
Señales elementales: exponencial compleja continua (III)

- *Ecuación de periodicidad caso continuo*:
  - $x(t) = x(t+T), \forall t, T \in \mathbb{R}, T > 0$
  - Si $x(t) = e^{j\omega t}$, $x(t+T) = e^{j\omega(t+T)} \Longrightarrow e^{j\omega t} = e^{j\omega(t+T)} = e^{j\omega t} \cdot e^{j\omega T}$
    - Para que la señal sea periódica debe cumplirse que $e^{j\omega T} = 1 \Longrightarrow \omega T = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
      - Periodo fundamental: $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$
      - $e^{j\omega t}$ y $e^{-j\omega t}$ tienen el mismo periodo fundamental: $T|_{\omega} = T|_{-\omega}$
        - » Las frecuencias negativas giran en sentido contrario
    - La exponencial compleja $x(t)$, con exponente imaginario, es una señal periódica en el tiempo independientemente del valor de ω

- Señales sinusoidales:
  - Si $x(t) = A\cos(\omega t + \phi) = \frac{Ae^{j(\omega t+\phi)} + Ae^{-j(\omega t+\phi)}}{2} = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega t} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega t}$
    - Las dos exponenciales tienen amplitudes complejas
  - Otra forma de escribir una señal sinusoidal:
    - $A\cos(\omega t + \phi) = A \cdot Re\{e^{j(\omega t+\phi)}\}$ y $A\sin(\omega t + \phi) = A \cdot Im\{e^{j(\omega t+\phi)}\}$

Señales elementales: exponencial compleja continua (IV)

- Si se aumenta la magnitud de ω, el ritmo de oscilación es más rápido y en consecuencia disminuye el periodo T
- Si se disminuye la magnitud de ω, el ritmo de oscilación es más lento y en consecuencia aumenta el periodo T

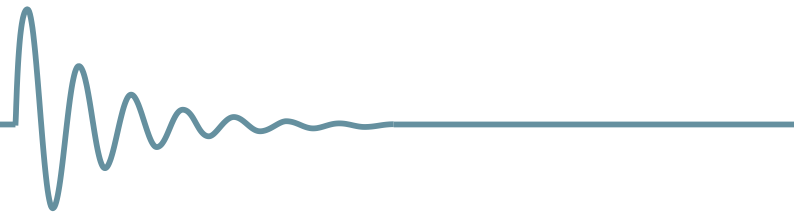


$$|\omega_1| < |\omega_2| < |\omega_3|; \quad T_1 > T_2 > T_3$$

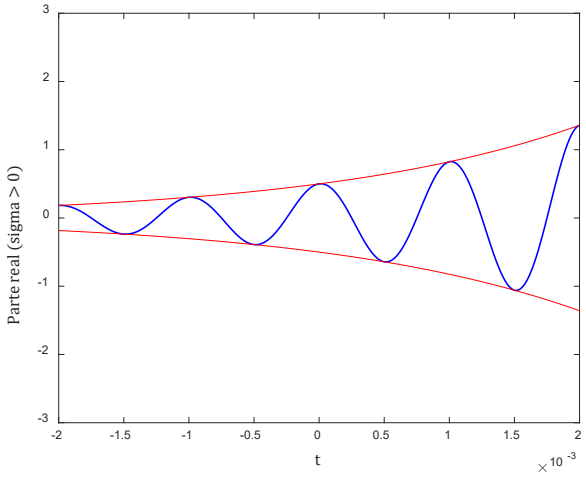
- Señales armónicamente relacionadas: conjunto de exponenciales complejas de frecuencia fundamental múltiplo de ω_0
  - $x_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots; T_k = \frac{T_0}{|k|} = \frac{2\pi}{|k|\omega_0}$

Señales elementales: exponencial compleja continua (V)

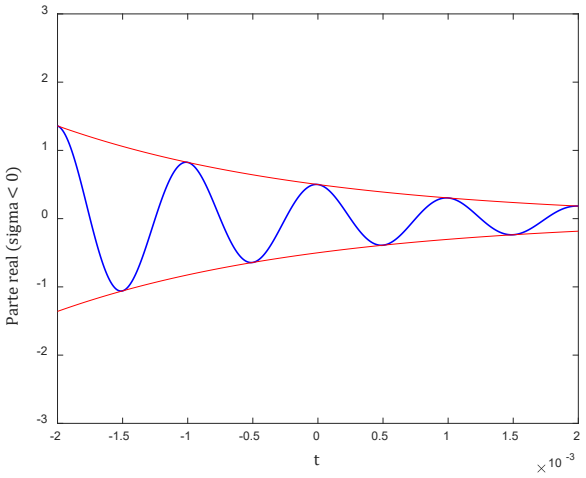
- Caso general:
  - $x(t) = Ae^{st}, \quad A, s \in \mathbb{C}; \begin{cases} s = \sigma + j\omega \\ A = |A|e^{j\theta} \end{cases}$
  - Podemos escribir la exponencial compleja general como:
    - $x(t) = Ae^{st} = |A|e^{j\theta}\, e^{(\sigma+j\omega)t} = |A|e^{\sigma t}\, e^{j(\omega t+\theta)}$
  - Y por la relación de Euler:
    - $x(t) = |A|e^{\sigma t}\, \cos(\omega t + \theta) + j\, |A|e^{\sigma t} \sin(\omega t + \theta)$
    - $\pm|A|e^{\sigma t}$: magnitud de la exponencial compleja (envolvente)
    - Si $\sigma = 0$
      - $Re = A\cos(\omega t + \phi)$
      - $Im\{x(t)\} = \mathrm{A}\sin(\omega t + \phi)$
    - Si $\sigma > 0$: sinusoide multiplicada por exponencial creciente
    - Si $\sigma < 0$: sinusoide multiplicada por exponencial decreciente



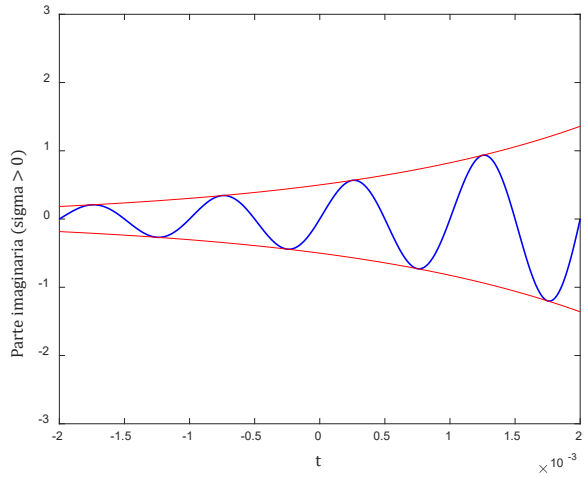
Señales elementales: exponencial compleja continua (VI)

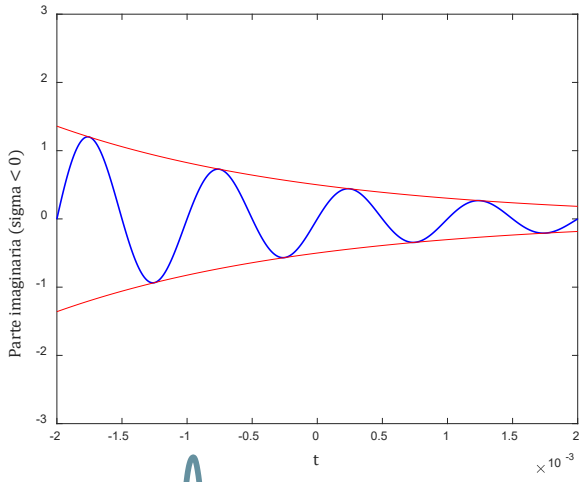


$\sigma > 0$



$\sigma < 0$

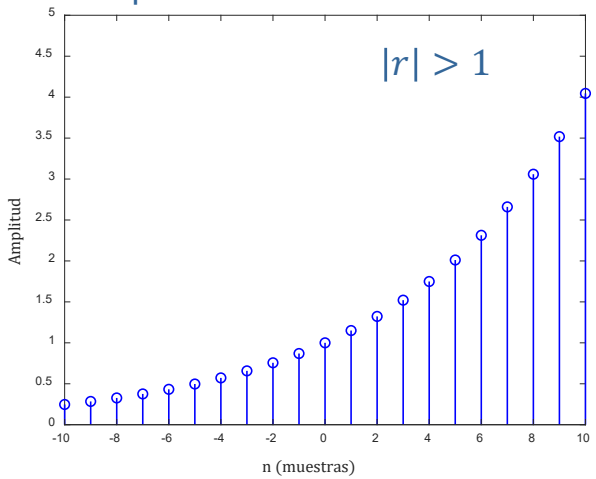




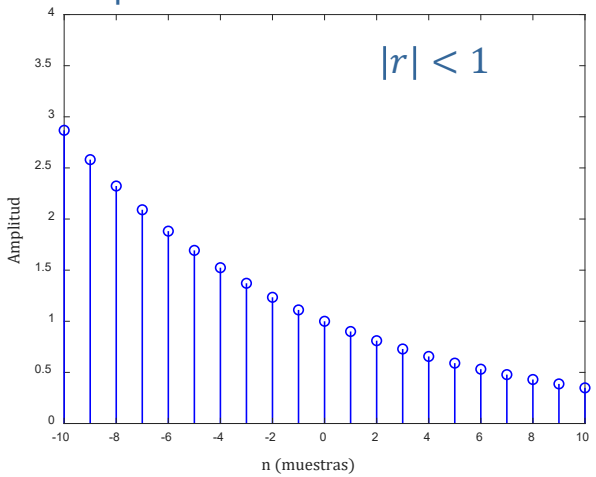
Señales elementales: exponencial compleja discreta (I)

- Forma general de la secuencia:
  - $x[n] = Ar^n, \quad A, r \in \mathbb{C}\ y\ r = e^{\beta} \Rightarrow x[n] = Ae^{\beta n}$
  - Si $A\ y\ r \in \mathbb{R}$:

Exponencial real creciente

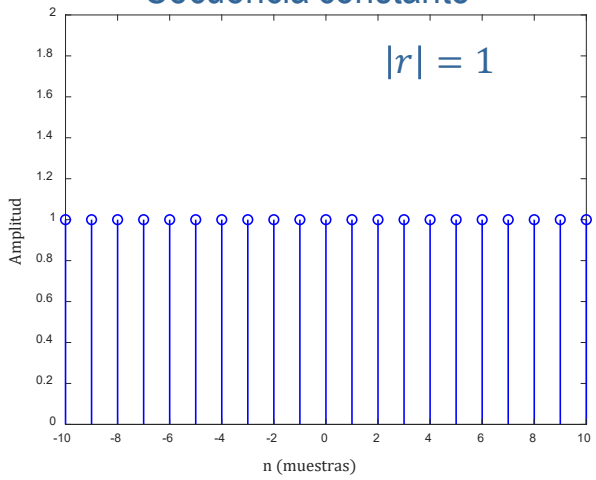


Exponencial real decreciente

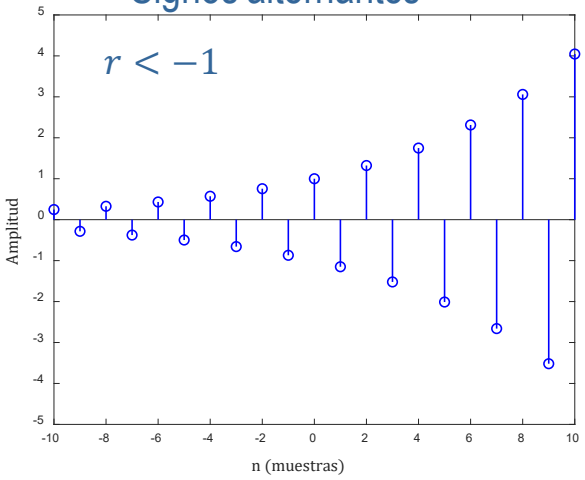


Señales elementales: exponencial compleja discreta (III)

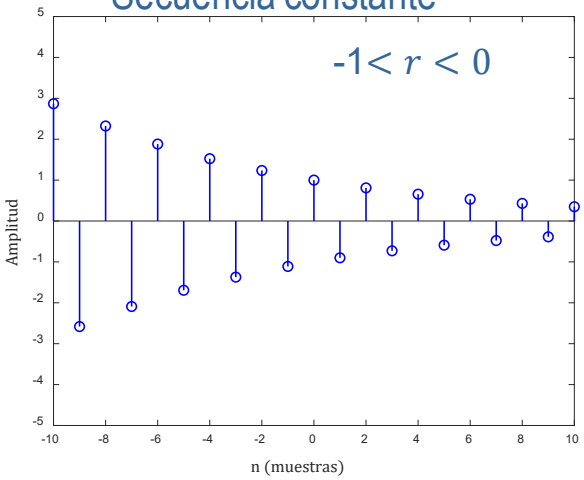
Secuencia constante



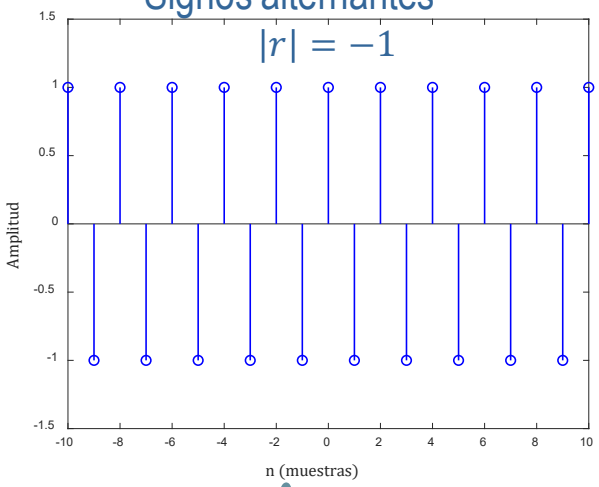
Signos alternantes



Secuencia constante



Signos alternantes



Señales elementales: exponencial compleja discreta (IV)

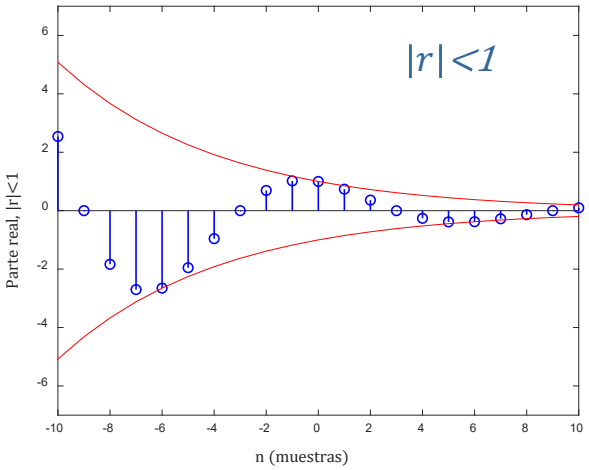
- **Exponenciales con exponente imaginario**:
  - $x[n] = Ar^n, \;\; A, r \in \mathbb{C}\; y\; r = |r|e^{\beta} = |r|e^{j\Omega}$
    - $Si\; |r| = 1 \quad \Longrightarrow \quad x[n] = Ae^{j\Omega n} = A\cos(\Omega n) + jA\sin(\Omega n)\,, \quad \Omega \in \mathbb{R}$

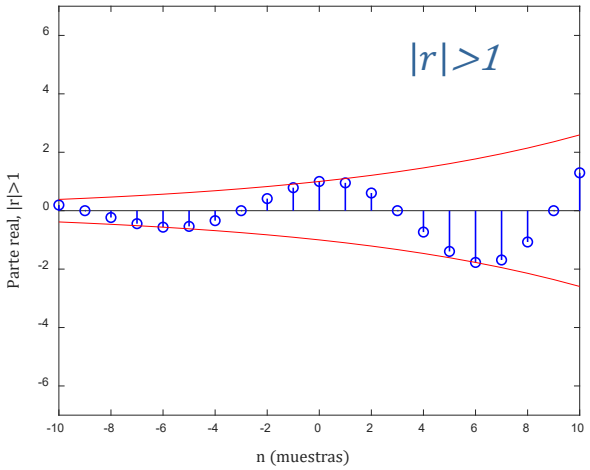
    - Ecuación de periodicidad en caso discreto:
      - $x[n] = x[n+N]\; \forall n, N \in \mathbb{C}\; y\; N > 0$
      - $x[n] = e^{j\Omega n},\; x[n+N] = e^{j\Omega(n+N)} \Longrightarrow e^{j\Omega n} = e^{j\Omega(n+N)} = e^{j\Omega n} \cdot e^{j\Omega N}$
    - Para que la señal sea periódica: $e^{j\Omega N} = 1 \Longrightarrow \Omega N = m2\pi, \;\; m, N \in \mathbb{Z}$
      - $\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{m}{N} \in \mathbb{Q},$
    - La exponencial compleja $x[n]$, con exponente imaginario, **no** es una señal periódica en n para cualquier del valor de Ω

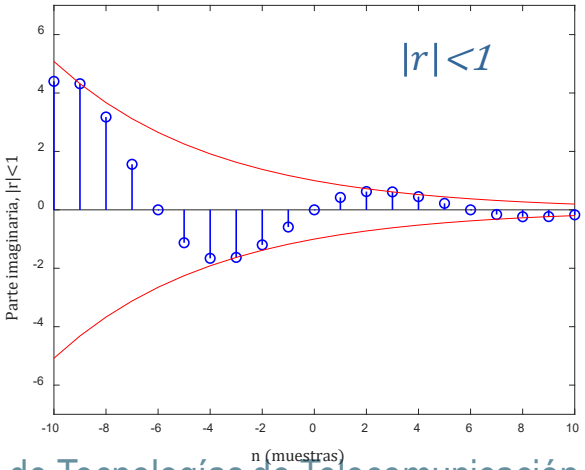
- Exponenciales complejas relacionadas armónicamente:
  - $\phi_k[n] = e^{jk\Omega_0 n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- Sólo existen N exponenciales complejas discretas relacionadas armónicamente (periódicas de periodo N): $e^{j(k+N)\Omega_0 n} = e^{jk\Omega_0 n} e^{jN\Omega_0 n} = e^{jk\Omega_0 n} e^{j2\pi n} = e^{jk\Omega_0 n}$

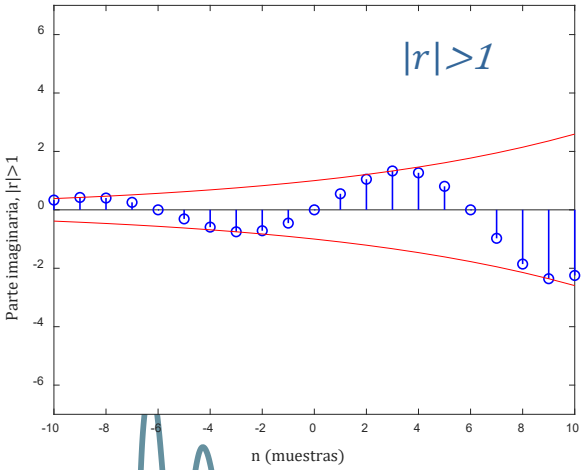
Señales elementales: exponencial compleja discreta (V)

- **Caso general**: $A, r \in \mathbb{C}$
  - Escribimos A, r en forma polar: $A = |A|e^{j\theta}$; $r = |r|e^{j\Omega}$
  - $x[n] = Ar^n = |A||r|^n e^{j(\Omega n+\theta)} = |A||r|^n \cos(\Omega n + \theta) + j|A||r|^n \sin(\Omega n + \theta)$



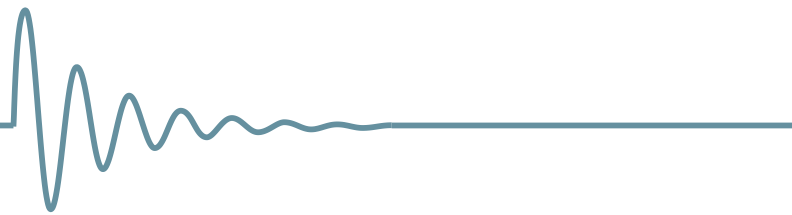




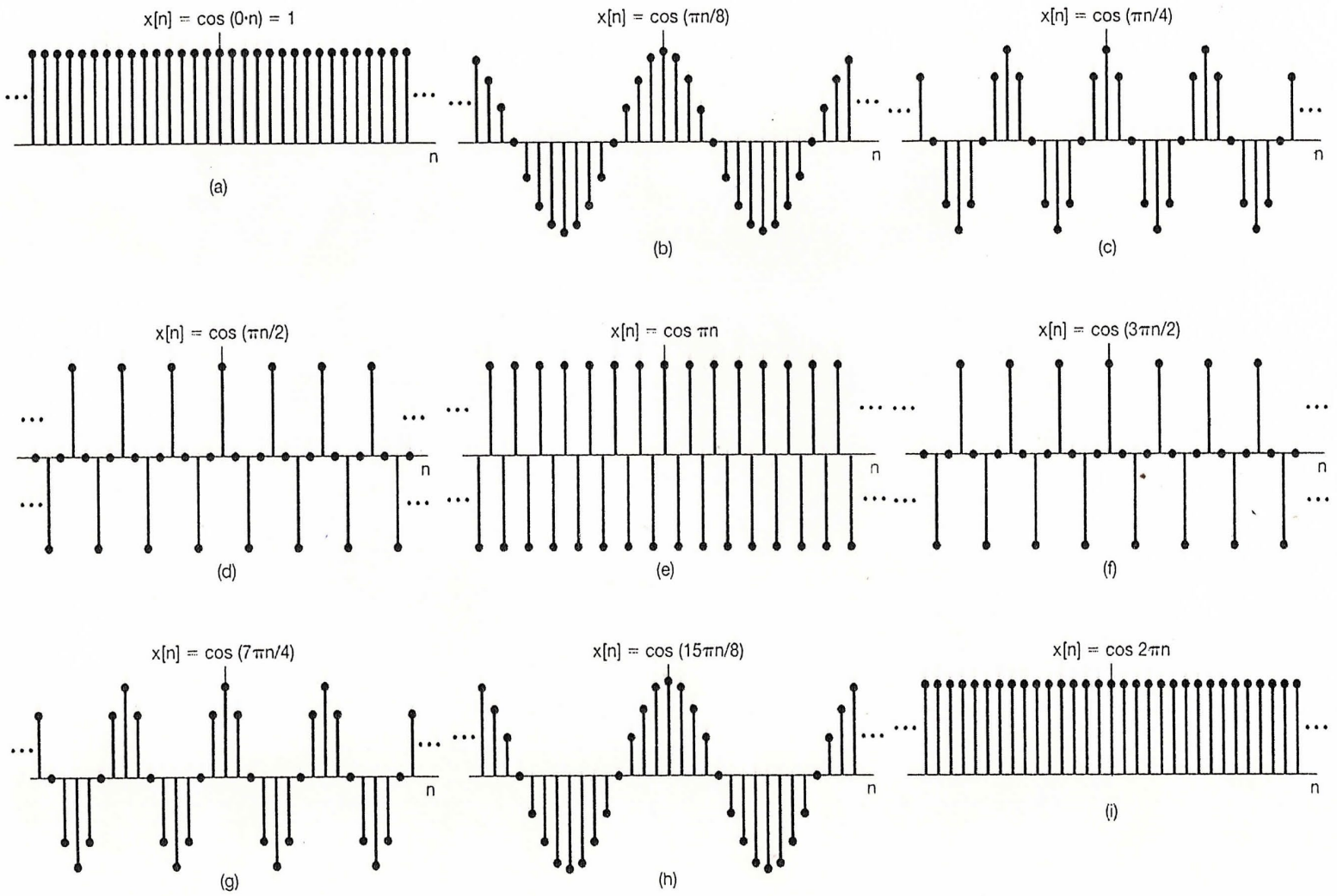


Señales elementales: exponencial compleja continua vs discreta (I)

- $x(t) = e^{j\omega t}$ y $x[n] = e^{j\Omega n}$ presentan propiedades diferenciadas
  - $e^{j\omega t}$:
    - Es periódica para cualquier valor de ω
    - Son distintas para cada valor de ω
    - Cuanto mayor es la magnitud de ω menor es T
  - $e^{j\Omega n}$:
    - Exponenciales complejas discretas separadas múltiplos enteros de 2π son indistinguibles, es decir, una exponencial discreta a frecuencia Ω es idéntica a una de frecuencia $\Omega + 2\pi$
      - » $e^{j\Omega n} = e^{j(\Omega+2\pi)n}, \quad \Omega \in \mathbb{R}$.
      - » Sólo es necesario analizar las exponenciales complejas en un intervalo frecuencial de longitud 2π ($[0,\ 2\pi]$ *o* $[-\pi,\ \pi]$)
    - No son periódicas para cualquier frecuencia
    - Si la exponencial analizada es periódica, N no disminuye cuando Ω crece ($\mathrm{N_{min}} = \mathrm{N_{\omega=\pi}};\ \mathrm{e^{j\pi n}} = (-1)^{\mathrm{n}}$)



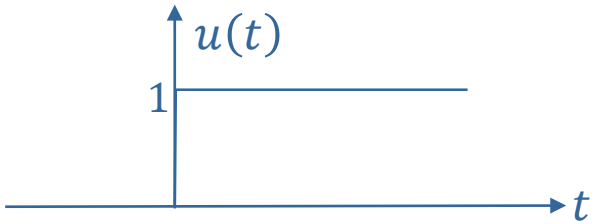
Señales elementales: ej. velocidad oscilación exp.compleja discreta (I)

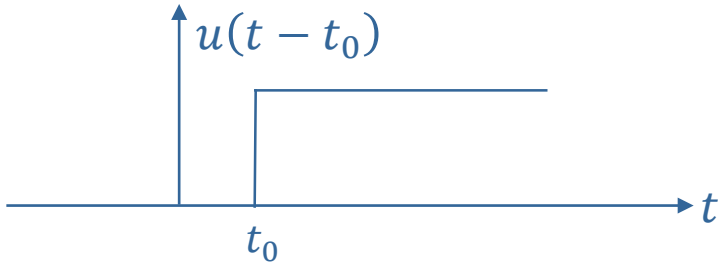


Señales elementales: escalón unitario (I)

- **Función escalón unitario**: $u(t)$
  - $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$;

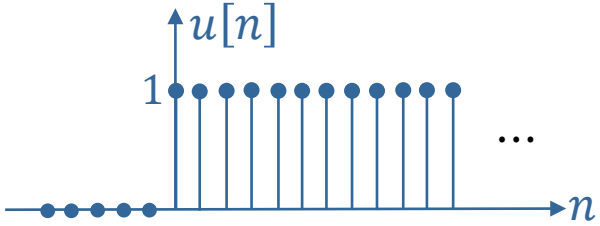
$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1, & t > t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases}$$

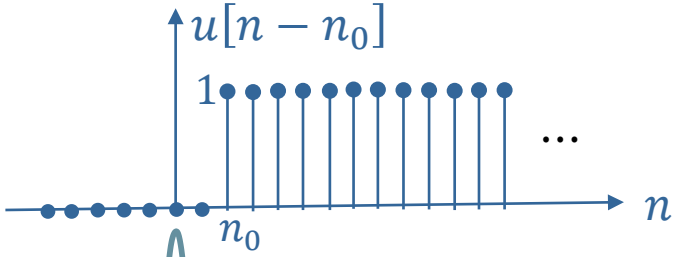




  - **Función escalón unitario**: $u[n]$
  - $u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$;

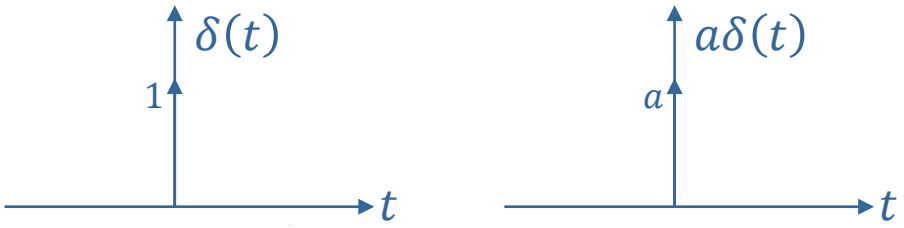
$$u[n - n_0] = \begin{cases} 1, & n \geq n_0 \\ 0, & n < n_0 \end{cases}$$





Señales elementales: función impulso unitario (I)

- Función impulso unitario – delta de Dirac: $\delta(t)$
  - Estrictamente hablando no es una función matemática, sino una distribución o una función generalizada
    - $\delta(t) = 0 \; si \; t \neq 0$ y $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$



  - Propiedades:
    - Muestreo: $\begin{cases} x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \\ x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0) \end{cases}$
    - Integración: $\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$; por tanto, $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$

Señales elementales: función impulso unitario (II)

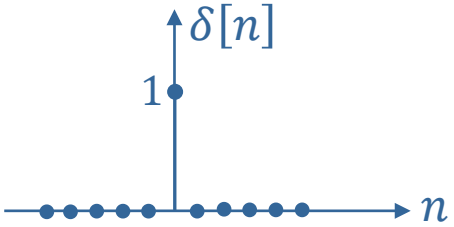
- Selección o filtrado : $\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(\tau)d\tau = x(0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(\tau-\tau_0)d\tau = x(\tau_0) \end{cases}$

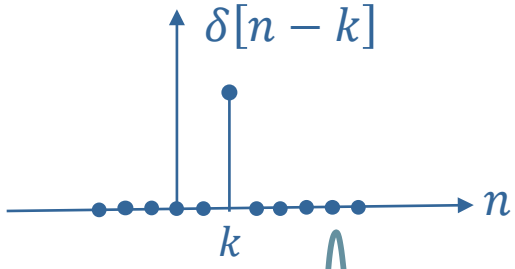
- Escalado: $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

- Función par: $\delta(t) = \delta(-t)$

– Función impulso unitario – delta de Kronecker : $\delta[n]$

– $\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$; $\delta[n-\mathrm{k}] = \begin{cases} 1, & n = \mathrm{k} \\ 0, & n \neq \mathrm{k} \end{cases}$

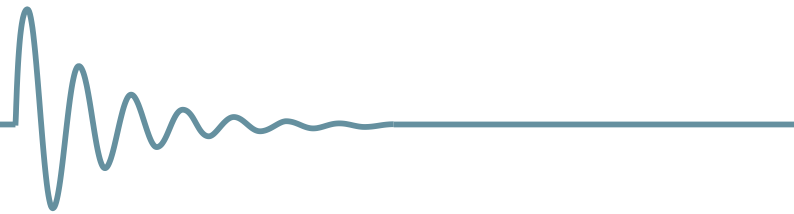




Señales elementales: función impulso unitario (III)

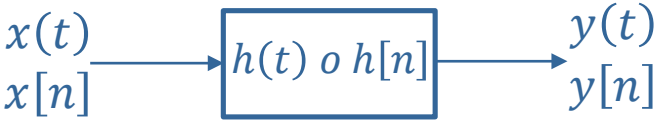
- Además:
  - $x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$
  - $x[n]\delta[n-k] = x[\mathrm{k}]\delta[n-\mathrm{k}]$

- Se relaciona con $u[n]$:
  - $\delta[n] = u[\mathrm{n}] - u[n-1]$
  - $u[n] = \sum_{l=-\infty}^{n} \delta[l]$

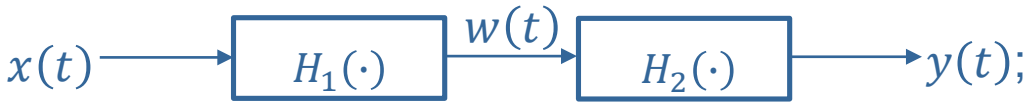


Sistemas y propiedades básicas de los sistemas (I)

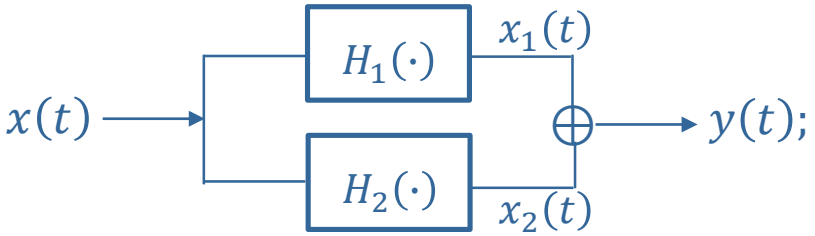
- Dispositivo físico u operador matemático que transforma una señal de entrada en una señal de salida.
  - $\begin{matrix} x(t) \longrightarrow y(t) \\ x[n] \longrightarrow y[n] \end{matrix}$;



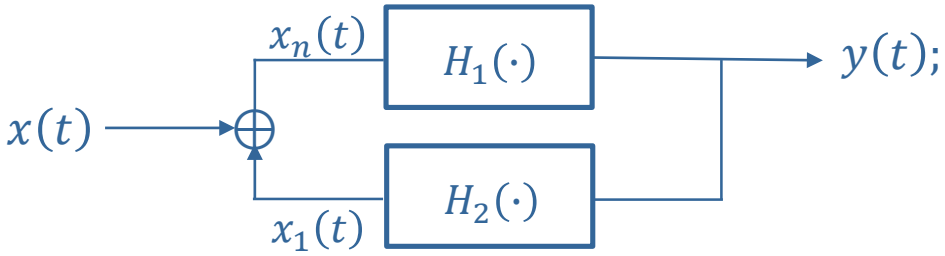
- Interconexión de boques:



$$\begin{cases} w(t) = H_1\big(x(t)\big) \\ y(t) = H_2\big(y(t)\big) \end{cases}$$



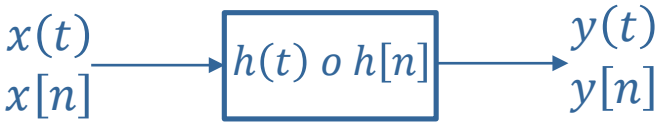
$$\begin{cases} x_1(t) = H_1\big(x(t)\big) \\ x_2(t) = H_2\big(x(t)\big) \\ y(t) = x_1(t) \pm x_2(t) \end{cases}$$



$$\begin{cases} y(t) = H_1\big(x_n(t)\big) \\ x_1(t) = H_2\big(y(t)\big) \\ x_n(t) = x(t) \pm x_1\,(t) \end{cases}$$

Sistemas y propiedades básicas de los sistemas (II)

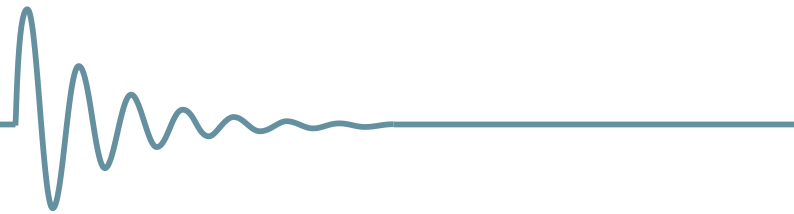
- Dispositivo físico u operador matemático que transforma una señal de entrada en una señal de salida.
  - $x(t) \longrightarrow y(t)$; $x[n] \longrightarrow y[n]$



- Propiedades:
  - **Memoria:**
    - En un sistema **sin memoria o instantáneo,** la salida en cada instante de tiempo t_0 o n_0 depende únicamente de la entrada en ese mismo instante de tiempo t_0 o n_0.
      - $v(t) = Ri(t)$
      - $y[n] = 3x^3[n] - 2x[n]$
    - En un sistema **con memoria o dinámico,** la salida en cada instante de tiempo depende de la entrada en, al menos, un instante de tiempo diferente.
      - $v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$
      - $y[n] = x[n-3]$
      - $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

Sistemas y propiedades básicas de los sistemas (III)

- **Causalidad:**
  - Un sistema es **causal o no anticipativo** si la salida en cualquier instante de tiempo depende únicamente de valores de la entrada en el momento presente y en el pasado ($y(t_0)$ depende de $x(t)$ para $t \leq t_0$; $y[n_0]$ depende de $x[n]$ para $n \leq n_0$).
    - Todos los sistemas sin memoria
    - $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$
    - $v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$
    - $y[n] = x[n-3]$
  - Un sistema que no es causal será **anticausal o anticipativo.**
    - $y[n] = x[n] - x[n+3]$
    - $y[n] = x[-n]$
    - $y(t) = x(t+1)$
    - $y[n] = \sum_{k=-M}^{M} x[n-k]$



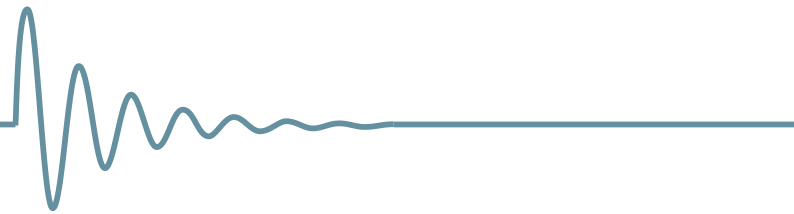
Sistemas y propiedades básicas de los sistemas (IV)

- **Estabilidad BIBO (Bounded Input-Bounded Output):**

  - Un sistema es **estable** si toda entrada acotada produce una salida también acotada. Si $|x(t)| < M_x \ \forall t \implies |y(t)| < M_y \ \forall t$, siendo M_x, M_y constantes reales finitas.
    - $y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$

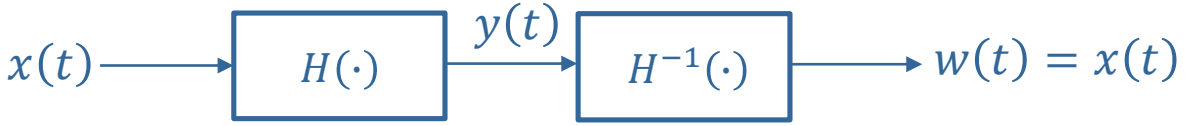
  - Si no cumple la condición anterior el sistema será **no BIBO - estable.**
    - $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \,; \quad x(t) = u(t)$

- Ejercicio: Analizar la estabilidad de un sistema cuya relación entrada-salida viene dada por:
  - $y[n] = r^n x[n], r \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$



Sistemas y propiedades básicas de los sistemas (V)

- **Invertibilidad:**
  - Un sistema es **invertible** si hay una relación biunívoca entre cada posible entrada y cada posible salida, es decir, si distintas entradas producen distintas salidas.
    - Si $x_1(t) \neq x_2(t) \Longrightarrow y_1(t) \neq y_2(t), \forall x_1, x_2, \forall t$
    - Se puede encontrar un sistema inverso que permite encontrar la entrada $x(t)$ a partir de la salida $y(t)$ proporcionada por el sistema invertible.



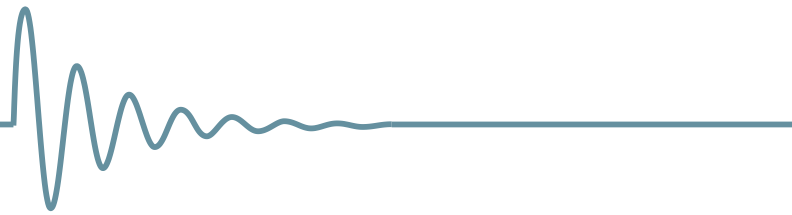
$$y(t) = 2x(t); \qquad y[n] = x[n+1]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\,; \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

  - Si dos entradas diferentes producen la misma salida, el sistema **no es invertible**
    - $y(t) = \cos\big(x(t)\big)$
    - $y(t) = x^2(t)$

Sistemas y propiedades básicas de los sistemas (VI)

- **Linealidad:**
  - Un sistema es **lineal** si satisface el principio de superposición, es decir, si la señal de entrada al sistema es una combinación lineal (superposición) de varias señales, la salida será la misma combinación de las respuestas del sistema a cada una de estas señales.
    - Aditividad: si $x(t) = x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow y(t) = y_1(t) + y_2(t)$
    - Homogeneidad: si $x(t) = \alpha x_1(t) \longrightarrow y(t) = \alpha y_1(t)$
  - que pueden combinarse en una única ecuación:
    - $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$
    - $x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \longrightarrow y[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$
  - Y que de forma general puede escribirse como
    - $x(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k x_k(t) \longrightarrow y(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k y_k(t)$
    - $x[n] = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k x_k[n] \longrightarrow y[n] = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k y_k[n]$



Sistemas y propiedades básicas de los sistemas (VII)

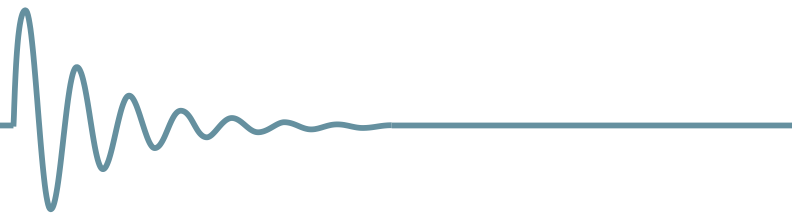
- Podríamos representar un sistema lineal como:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k x_k(t) \longrightarrow \boxed{H(\cdot)} \longrightarrow y(t) = H\{x(t)\} = H\left\{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k x_k(t)\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \alpha_k H\{x_k(t)\}$$

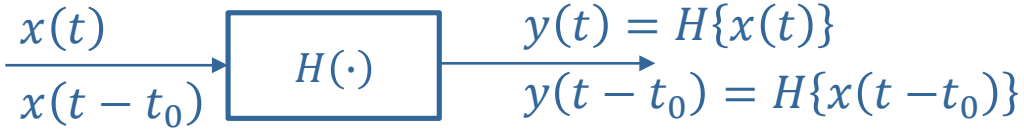
- Ejemplo de sistema lineal:
  - $y(t) = tx(t)$

- Si no se cumple el principio de superposición estaremos ante un sistema **no lineal:**
  - $y(t) = x^2(t)$



Sistemas y propiedades básicas de los sistemas (VI)

- **Invarianza temporal:**
  - Un sistema es **invariante en el tiempo** si sus propiedades se mantienen constantes con el tiempo. En este contexto, el sistema será invariante con el tiempo si un desplazamiento temporal de la señal de entrada produce idéntico desplazamiento en la señal de salida



  - que de forma general puede escribirse como
    - $x(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k x_k(t) \longrightarrow y(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k y_k(t)$
    - $x[n] = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k x_k[n] \longrightarrow y[n] = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k y_k[n]$
  - Ejemplos:
    - Sistema invariante en el tiempo: $y(t) = \cos\{x(t)\}$
    - Sistema no invariante en el tiempo: $y[n] = nx[n]$