Algoritmos

Indice

- Definición y propiedades
- Representación
- Algoritmos alternativos y equivalentes
- Programación estructurada
- Pseudocódigo
- Análisis de algoritmos
- Desarrollo
- Algoritmos iterativos
- Algoritmos recursivos
- Colección de algoritmos

Definición

- **Algoritmo** es una secuencia ordenada de instrucciones que resuelve un problema concreto
- Ejemplos:
  - Algoritmo de la media aritmética de N valores.
  - Algoritmo para la resolución de una ecuación de segundo grado.
- Niveles de detalle de los algoritmos:
  - Alto nivel: no se dan detalles.
  - Bajo nivel: muchos detalles.

Algoritmos en la vida diaria$_1$

- **Receta (Algoritmo) de cocina**: Camarones con mayonesa de albahaca.
- Ingredientes - **Input** (datos de entrada o iniciales)
- Resultado u **Output**

Algoritmos en la vida diaria$_2$

Ingredientes (para 4 porciones):

- 2 cucharadas de aceite de oliva
- ½ cucharadita de ajo picado fino
- 2 tazas de camarones medianos, sin caparazón y desvenados
- 1 cucharadita de sal
- ½ cucharadita de pimienta
- 2 cucharadas de albahaca picada

Mayonesa de albahaca:

- 1 taza de mayonesa baja en grasa
- 4 cucharadas de albahaca
- 3 pimientas negras molidas
- ½ limón, el jugo

Guarnición:

- 2 aguacates grandes, maduros en rebanadas
- 1 limón en cuartos
- 4 hojas de lechuga escarola
- 8 jitomates cherry partidos por la mitad
- Salsa picante al gusto

Algoritmos en la vida diaria$_3$

Preparación: (Algoritmo)

1. En una sartén caliente **agrega** el aceite de oliva, **agrega** el ajo, camarones, sal, pimienta y albahaca. **Cocínalos** 1 minuto. **Apaga** el fuego y deja los camarones un minuto más. Pasa los camarones a un tazón que esté sobre agua con hielo, déjalos dentro solamente el tiempo necesario para que se **enfríen**.
2. En un tazón **mezcla** todos los ingredientes de la mayonesa albahaca.
3. **Corta** los aguacates en rebanadas y acompaña los camarones. **Sirve** en un plato decorado con hojas de lechuga, tomates cherry, limón y si lo deseas agrega un poco de salsa picante.

Propiedades

Necesarias o básicas:

- Corrección (sin errores).
- Validez (resuelve el problema pedido)
- Precisión (no puede haber ambigüedad).
- Repetitividad (en las mismas condiciones, al ejecutarlo, siempre se obtiene el mismo resultado).
- Finitud (termina en algún momento). Número finito de órdenes no implica finitud.
- Eficiencia (lo hace en un tiempo aceptable)

Deseables:

- Generalidad
- Fácil de usar
- Robustez

Representación Verbal

- **Verbal**: usa oraciones del lenguaje natural.

Pago Bruto

Si las horas trabajadas son menores o iguales a 40, el pago es el producto del número de horas trabajadas y la tarifa (100 €/hora). Si se ha trabajado más de 40 horas, el pago es de 150 (50% más de la tarifa normal) por cada hora en exceso a 40.

Si horas trabajadas = 25

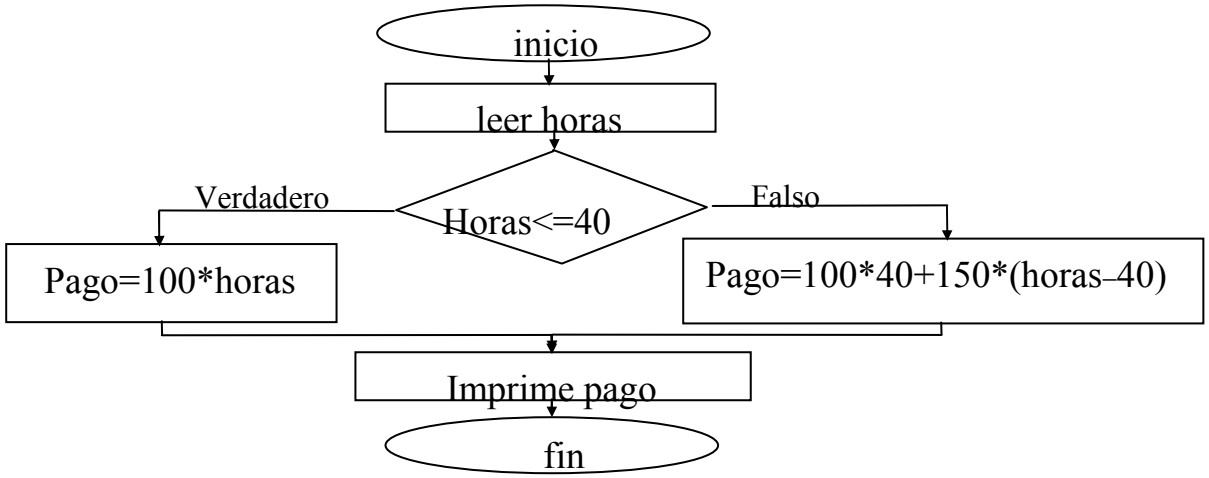
pago = 100x25=2500

Si horas trabajadas = 50

pago = 100x40 + 150x(50-40)=5500

Representación Diagramas de flujo

- **Diagramas de flujo**: Representación gráfica mediante cajas conectadas con flechas. Símbolos habituales:
- *Cajas ovales*: indican inicio y fin.
- *Cajas rectangulares*: representan acciones
- *Rombos*: representan decisiones a tomar. Contiene la condición que determina la dirección a seguir.

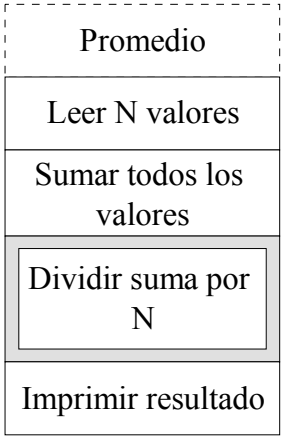


Representación Diagramas de cajas

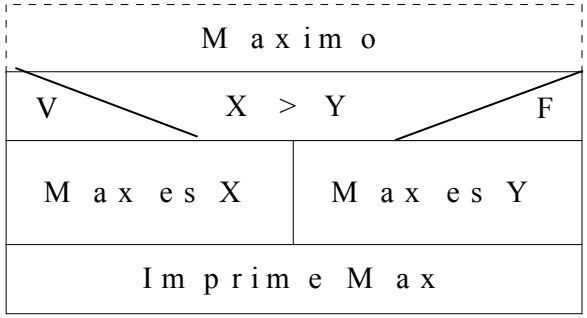
- **Diagramas de Bloques, Cajas o de Nassi-Shneiderman**

  Ventaja principal: **no** usan flechas. Básicamente se trata de cajas rectangulares que se apilan de acuerdo al algoritmo.

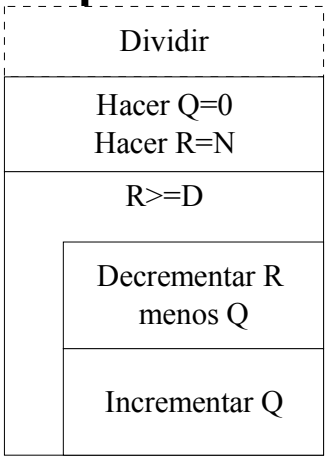
Secuencia



Selección



Repetición



Representación NS EasyCode

- **Diagramas de Bloques, Cajas o de Nassi-Shneiderman**

Programa que soporta NS: **EasyCode**

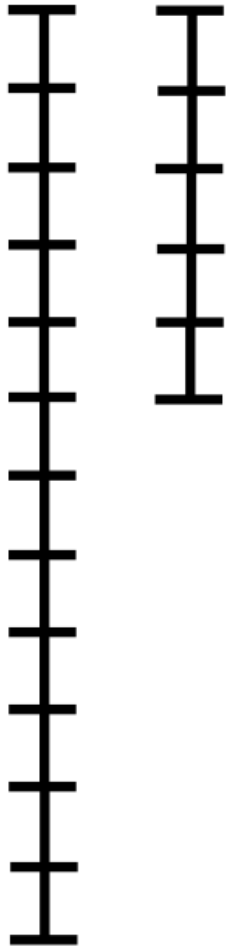
http://www.easycode.de/v8_cpp.html?&L=1

- genera código a partir del diagrama de cajas.
- a partir del código genera el diagrama de cajas.

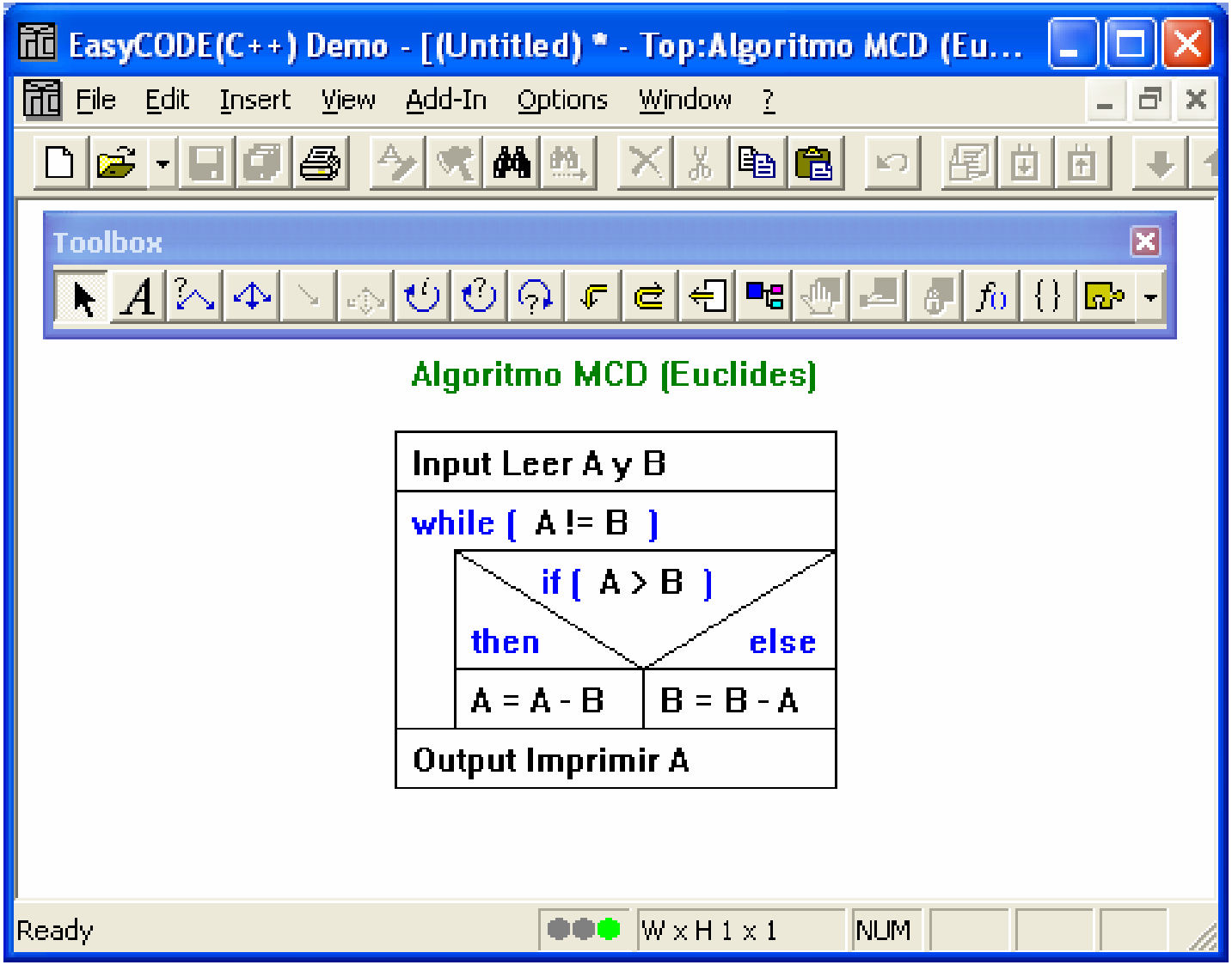
Ejemplo NS : Máximo común divisor

- **Algoritmo de Euclides:** formulación geométrica del problema del MCD: encontrar una "medida" común para el largo de dos líneas.

  El algoritmo consiste en **repetir** la resta de la línea más corta del otro segmento *mientras* las líneas sean diferentes.

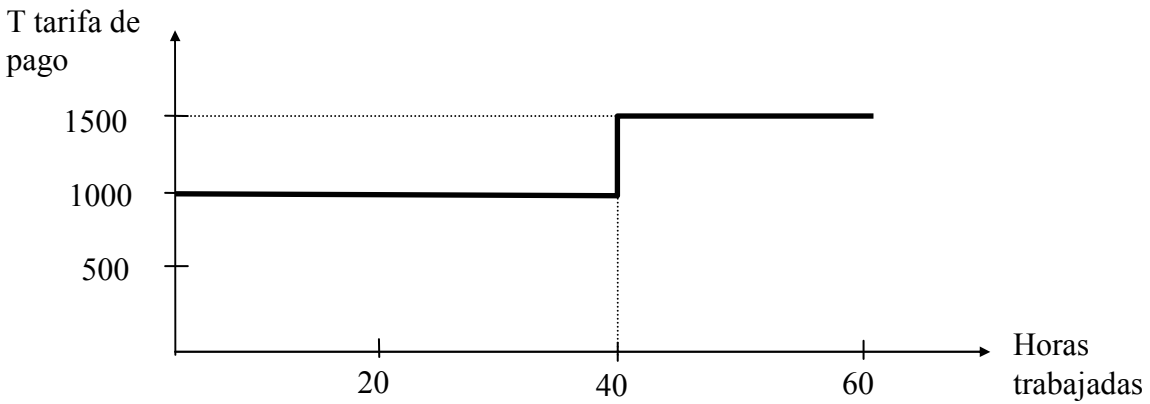


Ejemplo MCD con Easy Code



Representación Gráficos y Pseudocódigo

- **Gráficos**:

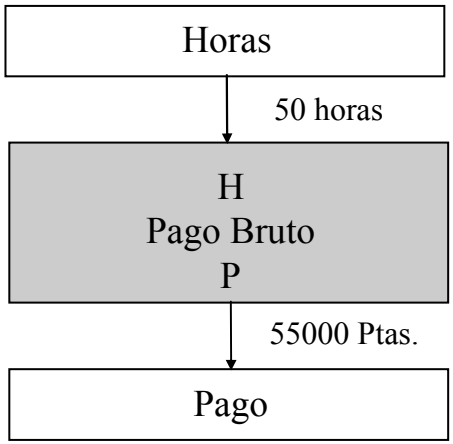


- **Pseudocódigo**: descripciones cortas que usan una mezcla de matemáticas, lógica y lenguaje natural.

```
Leer horas
Si horas > 40
        Pago Bruto = Tarifa x 40 + 150 x (Horas - 40)
sino
        Pago Bruto =  100 x Horas
```

Representación Flujo de datos y tabulares

- **Diagramas de flujo de datos**: Representación gráfica de alto nivel que muestran los datos de entrada y de salida. Indican *qué* es lo que hace y los diagramas de flujo o de cajas indican *cómo* se hace.



- **Representaciones tabulares** (tablas, arrays y matrices). Son útiles para resumir colecciones de datos grandes.

Representación matemática

- **Representaciones algebraicas (fórmulas y expresiones).** En ingeniería y matemáticas, los algoritmos se expresan como fórmulas o expresiones algebraicas. Usualmente es una representación muy concisa.

Media y Varianza de una serie de números:

$$M = (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N) / N$$

$$V = [(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \ldots + (x_N - M)^2] / N$$

Factorial de un número:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

Fórmula del seno:

$$\text{seno}(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! \ldots$$

Modificación de algoritmos

- ***Generalización y extensibilidad***: proceso de aplicar el algoritmo a más casos y de incluir más casos dentro del algoritmo
- ***Robustez***: proceso de hacer un algoritmo mas fiable o robusto (se recupera de errores), anticipando errores de entrada u otras dificultades.

Algoritmos alternativos y equivalentes

- Pueden haber muchas formas de llevar a cabo un algoritmo.
- En esos casos la elección se basa en la eficiencia (memoria y velocidad).
- El *análisis de algoritmos* estudia la cantidad de recursos que demanda la ejecución de un algoritmo.
- Preocupa más el tiempo de ejecución de un algoritmo: *Complejidad del algoritmo*

Programación estructurada

- Método para construir algoritmos a partir de un número pequeño de bloques básicos.
- Formas fundamentales:
  - ***Secuencia***: indica secuencia temporal lineal de las acciones a realizarse.

    A
    B
  - ***Selección***: especifica una condición que determina la acción a realizarse.

    if C
    D
    else
    E

Programación estructurada

– ***Repetición***: indica que una o más acciones deben repetirse un determinado número de veces.

while G do
H

– ***Invocación***: corresponde al grupo de acciones agrupadas bajo un nombre.

Calcula_promedio

Pseudocódigo

- Lectura o entrada de datos

  Input

- Repetición

  while expr
    instrucción
  endwhile

  for i = 1 to m (en C: for(i=1;i<=m;i++)
    instrucción
  endfor

  do
    instrucción
  while expr

Pseudocódigo

- Decisión

  if expr

    instrucción

  endif

- Escritura o salida de datos

  Output

Análisis de algoritmos

Problema: Buscar el mayor valor en una lista de números desordenados (array)

Algoritmo: (n = número de elementos)

```
1     max = s1
2     i = 2
3     while i <= n
4        if si > max then
5           max = si
6        i = i + 1
7     endwhile
```

Análisis de algoritmos

Número de operaciones realizadas (unid):

Línea	Operaciones	Tiempo
1	indexado y asignación	2
2	asignación	1
3	comparación	1
4,5,6	2 indexado, comparación, 2 asignación, suma	6

Tiempo total:

$t(n) = 2 + 1 + (n - 1) + 6 \cdot (n - 1) = 3 + 7 \cdot (n - 1) = \mathbf{7n - 4}$

Notación asintótica

- Es útil concentrarse en la tasa de crecimiento del tiempo de ejecución t como función del tamaño de la entrada *n*.
- Se usa la notación **O grande** (cota superior al ritmo de crecimiento de un algoritmo):

  Sean f(*n*) y g(*n*) funciones no negativas, f(*n*) es O(g(*n*)) si hay un valor c > 0 y

  $n_0 \geq 1$ tal que $f(n) \leq cg(n)$ para $n \geq n_0$
- Se dice que f(*n*) **es de orden** g(*n*)
- Ej: $7n - 4$ es O(*n*) si c=7 y $n_0 = 1$
- Generalmente para cualquier polinomio

  $a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_0$ es $O(n^k)$

Experimento de Algoritmo

- Contar el número de personas en una sala
  1. Ponerse de pie.
  2. Pensar para sí mismo “Soy el Nº 1”
  3. Emparejarse con alguien; sumar sus números; tomar la suma como su nuevo número.
  4. Uno de la pareja debe sentarse.
  5. Ir al paso 3 si hay alguien de pie.

Desarrollo de un Algoritmo

- Problema:
  - Se desea viajar de la estación A a la estación B de un metro.

Ejemplo - Algoritmo Metro

Algoritmo Metro
Input A, B [las dos estaciones]
if A y B están en la misma línea L
then
viajar en la línea L de A a B
else [A y B están en diferentes líneas]
hallar todos los pares de líneas (L_i, L_j) tal que A es una estación de L_i y B es una estación de L_j y las dos líneas tienen una estación en común.
if hay solo un par
then
tomar L_i hacia una estación también en L_J y después tomar L_J a la estación B
else [más de un par posible]
usar par (L_I, L_J) que tome menos paradas
endif
endif
Output Llegada a la estación B

Observaciones

- Qué hacer si dos pares de líneas tienen el mismo número de paradas.
- Qué hacer si hay líneas con más de una estación en común.
- Qué pasa si el cambio de una estación a otra requiere una larga caminata.
- Formato de algoritmo para humanos (resuelven ambiguedades rápidamente) NO para un ordenador (sigue instrucciones precisas).

Desarrollo de algoritmos

- Análisis del problema
  - Dominio del problema
  - Modelo
- Diseño del algoritmo
  - Refinamiento sucesivo
  - Top down o botton up
- Análisis del algoritmo
  - Cuánto tarda en dar una solución? Se puede modificar para aumentar la eficiencia?
  - Análisis de la Complejidad
- Verificación del algoritmo
  - Comprobar que es correcto

Algoritmos iterativos

- Muchos algoritmos se basan en ***ciclos o bucles***, es decir en la ejecución de una serie de pasos repetitivos.
- **Iteración** significa hacer algo de forma repetida.

Algoritmos iterativos

Ejemplo: Multiplicación de dos enteros considerando que sólo está disponible la operación suma

Algoritmo Mult
Input x [Entero ≥ 0]
y [cualquier entero]
prod = 0; u = 0 [Inicialización]
while u < x
prod = prod + y
u = u + 1
endwhile
Output prod

Verificación Algoritmos Método Traza

Input x = 3				
y = 4				
prod = 0				
u = 0				
while u < x	T	T	T	F
prod=prod+y	4	8	12	
u=u + 1	1	2	3	
endwhile				
Output prod	12			

Recursión

- **Recursión** mecanismo de repetición que expresa una solución como función de la solución de un problema de menor tamaño.

  Ejemplo: Suma de una lista de números (a_i, i=1,..,n).

  Sum(a_i, i=1,..,n)= a_n+ Sum(a_i, i=1,..,n-1)

  si i=1 Sum = a_1

Input a_i, i=1,..,n

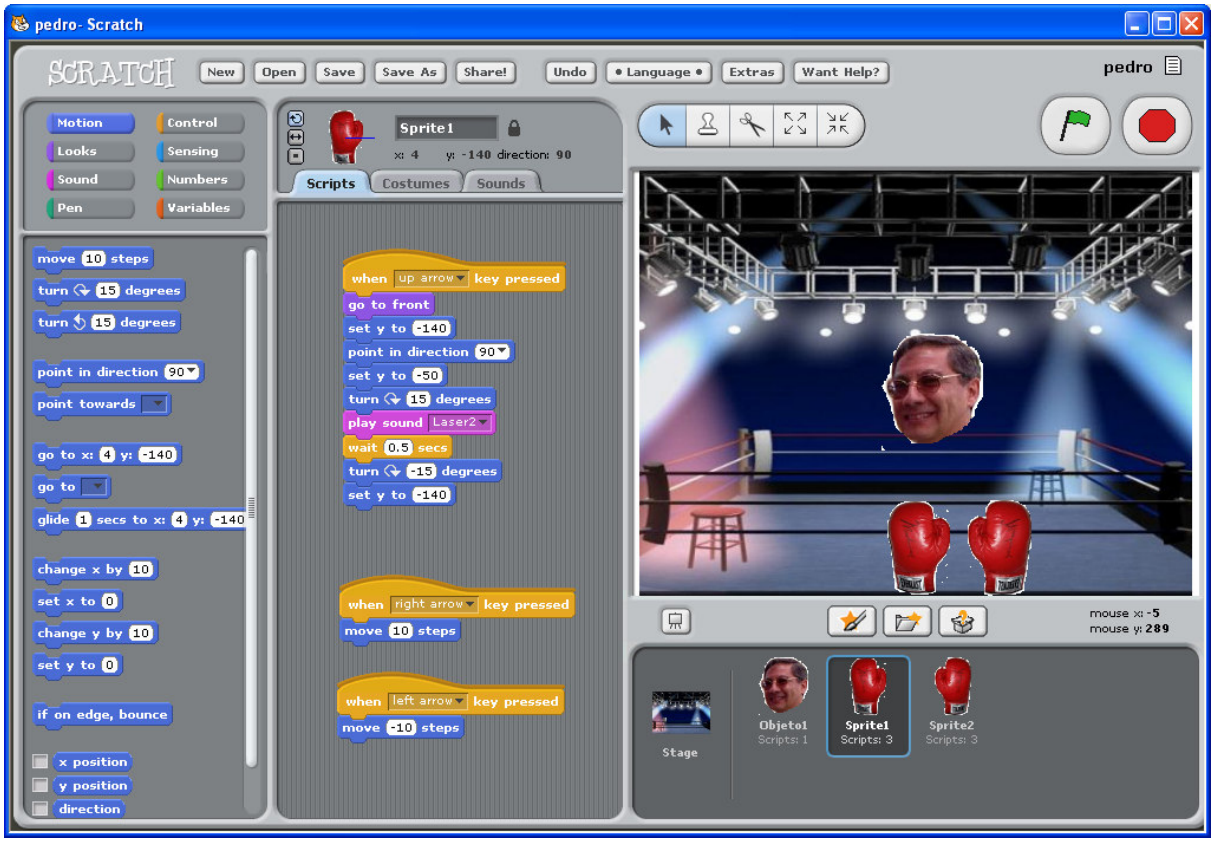
SumaListaRec(n)

```
if n=1 then sum = a1
        else sum = sum + SumaListaRec(n-1)
endif
return sum
```

Scratch

- Programa gratuito para aprender a programar de forma divertida (indicado para niños)

  http://scratch.mit.edu/



Colección de Algoritmos

Algoritmos iterativos

- Ejemplo 1: Suma de una lista de números.

  Lista con elementos individuales indicados por: a_i, i=1, 2, …, n (donde n es el número de elementos de la lista)

  Input n, a_i

  sum = a_1

  for i=2 **to** n [C:for(i=2; i<=n; i++)]

  sum = sum + a_i

  endfor

  Output sum

Algoritmos iterativos

- Ejemplo 2: Hallar el entero positivo n tal que $2^n \leq N$ utilizando sumas y multiplicaciones

Input N
n = 0
pot2 = 2
while pot2 ≤ N
    n = n +1
    pot2 = pot2*2
endwhile
Output n

Ejercicios

- Repetir el ejemplo 1 sin usar for
- Escribir un algoritmo para calcular n! (= n x n-1 x n–2 …2 x 1) colocando el resultado en la variable fact
- Calcular x^m siendo m una potencia positiva de 2
- Suponer que m no es una potencia de 2. Usar el algoritmo anterior y completar el cálculo de x^m
- Dada una lista de enteros $n_1, n_2, ..., n_m$ y un entero p, contar el número de pares (n_i, n_j), $i \neq j$ tal que $n_i = p*n_j$ o $n_j = p*n_i$

Solución a ejercicios

- Ej. 1

  Input a_i i=1,.., n
  sum = 0
  i = 1
  while i <= n
  suma = suma + a_i
  i = i + 1
  endwhile
  Output suma

Solución a ejercicios

- Ej. 2

```
Input n
fact = 1
i = 2
while i <= n
        fact = fact * i
        i = i + 1
endwhile
Output fact
```

Solución a ejercicios

- Ej. 3

```
Input x, m
power = x
cont = 1
while cont < m
    power = power * power
    cont = 2 * cont
endwhile
Output power
```

Solución a ejercicios

- Ej. 4

```
Input x, m
power = x
cont = 1
while 2*cont <= m
      power = power * power
      cont = 2 * cont
endwhile
while cont < m
      power = power * x
      cont = cont + 1
endwhile
Output power
```

Solución a ejercicios

- Ej. 5

Input n_i i=1,..,m, p
cont = 0
for i=1 **to** m [C:for(i=1; i<=m; i++)]
    for j=i+1 **to** m
        if n_i=p*n_j **or** n_j=p*n_i
            cont = cont + 1
        endif
    endfor
endfor
Output cont

Ejercicios algoritmos recursivos

- Escribir un algoritmo recursivo para calcular n!
- Escribir un algoritmo recursivo para calcular x^m

Solución a ejercicios

- Ej. 1

```
Factorial(n)
   if n = 1 then fact = 1
         else
           fact = n * Factorial(n-1)
   endif
   return fact
```

Solución a ejercicios

- Ej. 2

```
Powerofx(n)
   if n = 1 then power = x
   else
         power = x * Powerofx(n-1)
   endif
   return power
```

Teoría de números

- Generación de números primos
  - Como todos los primos excepto 2 son números impares, tratamos 2 como un caso especial.
  - Probar todos los números impares divisibles por números impares menores al que se prueba. (No es muy eficiente).
  - Por eficiencia sólo se prueban números menores o iguales a la raíz cuadrada del número que se prueba.
  - Criterio de divisibilidad:

    Resto de división entera (operador %) es 0.

Números Primos

Input N [Núm. de primos a calcular]

Algoritmo NumPrimo
$p_1 = 2$ [primer primo p_1]; n = 2 [n indica el p_n primo]
i = 3 [número a probar]
while n <= N
  j=3 [primer divisor]
  while $j < \sqrt{i}$
    if i % j = 0 **then exit** [es divisor]
    j=j+2 [siguiente divisor]
  endwhile
  if j = i **then** $p_n = i$ [es siguiente primo]
    n = n + 1
  endif
  i=i+2 [sig. entero a probar]
endwhile

Output p_n , n=1,…,N

Máximo común divisor

- **Algoritmo de Euclides** para hallar el máximo común divisor (mcd) de dos números enteros no negativos.
  - Sean m y n dos enteros. El mcd(m,n) se basa en la ecuación m = nq + r donde

    q es el cociente entero q >= 0 y

    r es el resto 0 <= r < n
  - mcd(m,n) = mcd(n,r) cuando r es cero el mcd es n.

Máximo común divisor

Input m, n

Algoritmo MCD
    num = m
    denom = n
    while denom != 0
        resto = num%denom
        num = denom
        denom = resto
    endwhile

Output num

Máximo común divisor

Como función:

```
Algoritmo MCD(m, n)
    num = m
    denom = n
    while denom != 0
        resto = num%denom
        num = denom
        denom = resto
    endwhile

    return num
```

Mínimo común múltiplo

- El mínimo común múltiplo (mcm) de dos números enteros positivos m y n se puede calcular usando:

  mcd(m,n)*mcm(m,n) = m*n

Input m, n

Algoritmo MCM
num = MCD(m,n)
mcm = m*n/num

Output mcm

Partición de enteros

- Una partición de un número entero positivo n es cualquier conjunto de enteros positivos cuya suma es n.
- Ejemplo: 4 tiene 5 particiones

  4
  3 1
  2 2
  2 1 1
  1 1 1 1

- **Problema**: dado un número entero n, generar todas las particiones de n, empezando con n y en *orden lexicográfico*.

Partición de enteros (I)

- Dos particiones están en *orden lexicográfico* si, empezando por la izquierda, en el primer dígito en el que difieren, el dígito en el primero es mayor que en la segunda.
- Debemos determinar, dada una partición P de n, la siguiente en orden lexicográfico. Casos:
  - El último dígito de P no es 1. Entonces se reduce el último dígito en 1 y se añade uno al final.
  - El último dígito es 1. Se realiza lo siguiente:
    - Empezando por la derecha, contar el número de 1s, asignar a c, hasta conseguir un dígito d mayor a 1.
    - Reducir d a $d - 1$ lo que significa que se tiene c+1 para añadir al final de la partición usando dígitos no mayores a $d - 1$
    - Dividir de forma entera c+1 por d–1 (resultado q y r). Añadir q ($d - 1$)s seguidos de un r (si r>0) al final.

Partición de enteros (Alg.)

Input n

Algoritmo Particiones
p_1=n
k=1
do
    Output p_m, m=1,..k
    if p_1 = 1 **exit**
    if (p_k != 1) **then** p_k – = 1
                p_{k+1} = 1
    else
        c = 0; i = k
        while (p_i == 1)
            c++
            i – –
        endwhile

Partición de enteros (Alg.)

```
        p_i - -
        q = (c+1)/ p_i
        r= (c+1)% p_i
        j = 1
        while (j <= q)
                p_{i+1} = p_i
                i + +
                j + +
        endwhile
        if (r = 0) then  k = i
        else  k = i + 1
                p_k = r
        endif
    endif
while (1)
```

Algoritmos del álgebra

- Ecuación de segundo grado

  $ax^2 + bx + c = 0$

  solución:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  Casos especiales:

  a=0, b=0, c=0

  Discriminante $b^2 - 4ac$ negativo (raíces complejas conjugadas)

Ec. de segundo grado

Input a, b, c

Algoritmo Ec2grado
if a = 0 **then**
    if b = 0 **then**
        if c = 0 **then Output** “Ec. Vacia”
                else Output “Ec. Falsa”
        endif
    else
        x = –c/b
        Output “Raiz real:”, x
    endif
else
    disc = b^2 – 4ac

Ec. de segundo grado (cont)

if disc < 0 **then**

real = –b/2a [Parte real raiz]

imag = $\sqrt{-disc}/2a$ [Parte imag raiz]

Output "R. complejas", real, imag

else

$x_1 = (-b - \sqrt{disc})/2a$

$x_2 = (-b + \sqrt{disc})/2a$

Output "Raices reales", x_1, x_2

endif

endif

Evaluación de polinomios

- La expresión general de un polinomio es:

  $P_n(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} +...+ a_0$

- Forma compacta de un polinomio: $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

- **Problema**: dados los coeficientes a_n,i=1,…n y un valor x evaluar $P_n(x)$

- Algoritmo de Horner

  $P_n(x)= a_0 + x \cdot (a_1 + x \cdot (a_2 + ...x \cdot (a_n)...))$

  requiere menos multiplicaciones

Evaluación de polinomios

Input n, a_0, a_1,..., a_n, x

Algoritmo Evalpoli
sum = a_n
for k = n–1 **downto** 0
    sum = sum · x + a_k
endfor

Output sum

Multiplicación de polinomios

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad Q_m(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$$

Input n, a_0, a_1,..., a_n; m, b_0, b_1,..., b_m

Algoritmo Multpoli
for k = 0 **to** m+n
  c_k =0
  i=0
  j=k
  while i<=n and j>=0
    if j<=m **then**
      $c_k = c_k + a_i\, b_j$
    endif
    i=i+1; j=j–1
  endwhile
endfor

Output c_k, k=0,1,...,m+n

Permutaciones

- Permutación aleatoria de S={1,2,..., n}.

Input n

Algoritmo Permutar
Flag = 0 [Iniciar todos los comp. a 0]
for i = 1 **to** n
  do
  [Rand: Genera numeros aleatorios]
    r = Rand[1, n]
  while Flag(r) != 0
  Perm(i) = r
  Flag(r) = 1
endfor

Output Perm

Secuencia Fibonacci

- Una secuencia (conjunto ordenado de números) útil es la de Fibonacci definida por:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$f_0 = f_1 = 1$$

Input N

Algoritmo Fibon_iter

$f_0 = 1$

$f_1 = 1$

for i = 2 **to** N

$f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$

endfor

Output f_N

Secuencia Fibonacci

- Versión recursiva (ineficiente!)

Input n

Algoritmo Fibonacci
    function Fib(n)
    if n = 0 **or** n= 1
        then Fib = 1
        else Fib = Fib(n–1) + Fib(n – 2)
    endif
    return Fib
    endfunction

respuesta = Fib(n)

Output respuesta

Máximo y mínimo

- Sea S={s_1 , s_2 ,…, s_n } un conjunto de n elementos donde cada elemento es un número real. Se desea hallar el máximo (mínimo) número en el conjunto.

Input n, s_1 , s_2 ,…, s_n
Algoritmo MaxNum
    max = s_1
    for i = 2 **to** n
        if s_i > max **then** max = s_i
    endfor
Output max

Análisis del algoritmo

Número de operaciones realizadas:

1 max = s_1
2 **for** i = 2 **to** n
3 **if** s_i > max **then**
4 max = s_i
endfor

- Línea 1: dos operaciones primitivas (indexado y asignación) → 2 unid
- Línea 2: la instrucción for inicializa contador → 1 unid y compara → n–1 unid.
- Lineas 3 y 4: Se ejecutan n–1 veces en el peor de los casos 6 unid (indexado, comparación, indexado, asignación, suma y asignación).
- Tiempo total = t(*n*) = 2+1+(n–1)+6(n–1) = 3+7(n–1) = **7n – 4**

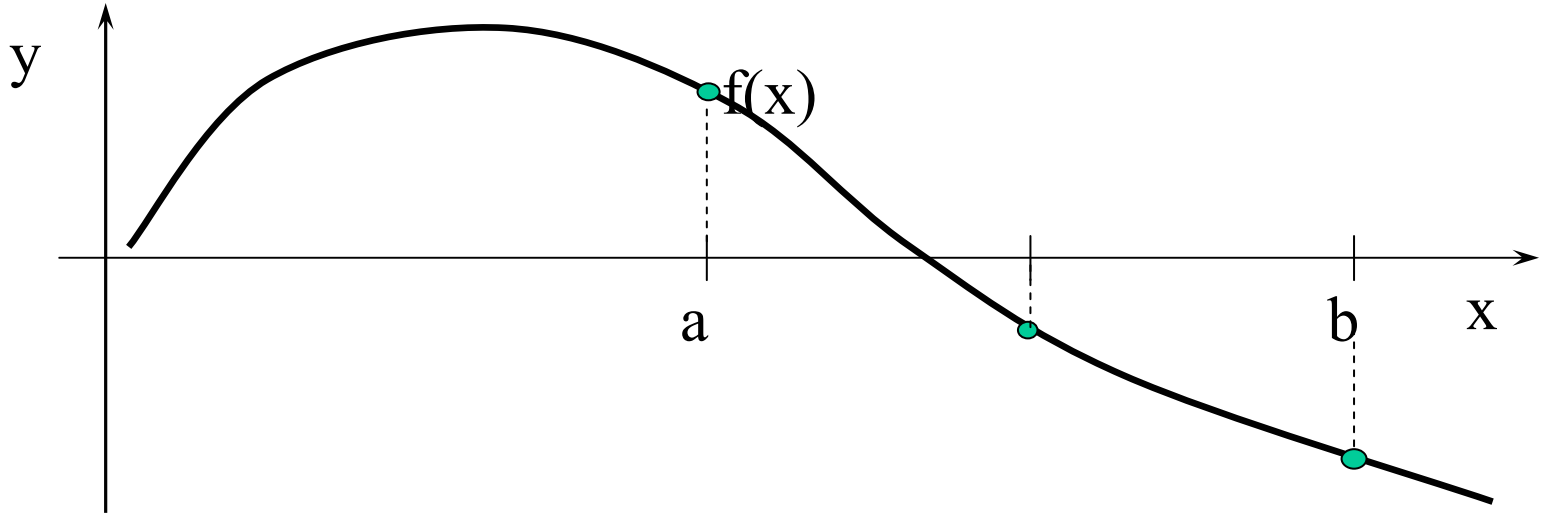
Notación asintótica

- Es útil concentrarse en la tasa de crecimiento del tiempo de ejecución t como función del tamaño de la entrada *n*.
- Se usa la notación O grande: Sean f(*n*) y g(*n*) funciones no negativas f(*n*) es O(g(*n*)) si hay un valor $c > 0$ y $n_0 \geq 1$ / $f(n) \leq cg(n)$ para $n \geq n_0$
- Se dice que f(*n*) **es de orden** g(*n*)
- Ejemplo: $7n - 4$ es O(*n*) si $c=7$ y $n_0 = 1$
- Cualquier polinomio $a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + ... + a_0$ es $O(n^k)$
- *Ejercicio*: comparar las funciones para valores de n (potencias de 2) entre 2 a 1024

  $\log n \quad \sqrt{n} \quad n \quad n\log n \quad n^2 \quad n^3 \quad 2^n \quad n!$

Bisección

- Método simple y efectivo para hallar la raíz de una función *continua* **f(x)**
- Se suponen conocidos dos valores de x, **a** y **b**, tal que a < b y que f(a)f(b) < 0, tolerancia de error **ε**



Bisección

```
Input f(x), a, b, ε
Algoritmo Biseccion
    izq = a; der = b
    while (der – izq) > ε
          x = (izq + der)/2
          if f(x) = 0 then exit
              else
                   if f(x)f(a) < 0 then  der = x
                                   else  izq = x
                   endif
          endif
    endwhile
    raiz = (izq + der)/2
Output raiz
```

Búsqueda secuencial

Problema: buscar un elemento k en un conjunto de elementos K_i i = 1,…,n

Búsqueda secuencial: Aplicable a listas desordenadas

Input n, [Número de elementos]
K_i , i = 1, 2,…,n [Lista de claves]
k [clave a buscar]

Algoritmo Busqsec
i = 1
while (true)
if k = K_i **then Output** i; **stop**
else i = i + 1
endif
if i > n **then Output** "no hallado"
stop
endwhile

Búsqueda binaria

Aplicable a listas previamente **ordenadas**

Input n, [Número de elementos]
K_i , i = 1, 2,…,n [Lista de claves]
k [clave a buscar]

Algoritmo Busqbin
I = 1; D = n
while (true)
i = (I + D)/2
if k = K_i **then Output** i
stop
else if k < K_i **then** D = i – 1
else I = i + 1
endif
if I > D **then Output** "no hallado"
stop
endwhile

Búsqueda binaria

- Versión recursiva: Invocación Busqbinrec(1, n)

Input n, [Número de elementos]
K_i , i = 1, 2,…,n [Lista de claves]
k [clave a buscar]

Algoritmo Busqbinrec(k, I, D)
if I > D **then**
Output "no hallado"; **return**
else
i = (I + D)/2
if k = K_i **then Output** i; **return i**
else if k < K_i **then** Busqbinrec(I, i–1)
else Busqbinrec(i+1, D)
endif
endif

Análisis del algoritmo

- Número de candidatos inicial: n
- Primera llamada: n/2
- i-ésima llamada: $n/2^i$
- En el peor de los casos las llamadas recursivas paran cuando no hay más candidatos.
- Máximo número de llamadas recursivas: menor entero m tal que $n/2^m < 1$
- $m > \log n$ $\quad\quad$ $m = \lfloor \log n \rfloor + 1$
- Por tanto: la búsqueda binaria es de orden $O(\log n)$

Ordenamiento por burbuja

Problema: Poner en orden (ascendente o descendente) un conjunto de elementos K_i , i = 1,…,n

Input n, K_i , i = 1, 2,…,n

Algoritmo Burbuja

```
i = n – 1
while i ≠ 0
    for j = 1 to i
        if Kj > Kj+1 then
            temp = Kj      [intercambio]
            Kj ↔ Kj+1
            Kj+1 ↔ temp
    endfor
    i = i – 1
endwhile
```

Output $K_1, K_2 , \ldots, K_n$ en orden

Ordenamiento por inserción

- Toma un elemento cada vez y lo inserta en su lugar en la parte de la lista que ha sido ordenada.

Input n, K_i , i = 1, 2,…,n

Algoritmo Insercion
    for i = 2 **to** n
        temp = K_i
        j = i – 1
        while j ≠ 0 **and** temp <= K_j
            K_{j+1} = K_j
            j = j – 1
        endwhile
        K_{j+1} = temp
    endfor

Output K_1, K_2 , …, K_n en orden

Multiplicación matricial

- Sea A=[a_{ij}] una matriz de mxk y

  B =[b_{ij}] una matriz de kxn. El producto matricial de AB es C=[c_{ij}] de mxn donde

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir} b_{rj}$$

Input m, k, n, A, B

Algoritmo Mult_matr
  for i = 1 **to** m
    for j = 1 **to** n
      c_{ij} = 0
      for r = 1 **to** k
        $c_{ij} = c_{ij} + a_{ir}\, b_{rj}$
      endfor
    endfor
  endfor
Output C

Eliminación de Gauss

- Método de solución de la ecuación Ax = d
- Eliminar x_i desde la ecuación i+1 hasta la n para i=1,2,..., n−1
- Calculando de abajo arriba se obtiene el valor de cada variable: (sustitución hacia atrás)

$x_n = d'_n / a'_{nn}$

$$x_i = (d'_i - \sum_{j=i+1}^{n} a'_{ij}\, x_j) / a'_{ii}$$

Eliminación de Gauss

Input n, A, **d**
Algoritmo Elim_Gauss
    for i = 1 **to** n – 1
        for k = i + 1 **to** n
            $m = a_{ki} / a_{ii}$
            $a_{ki} = 0$
            for j = i + 1 **to** n
                $a_{kj} = a_{kj} – ma_{ij}$
            endfor
            $d_k = d_k – md_i$
        endfor
    endfor
    for i = n **downto** 1
        for j = i + 1 **to** n
            $d_i = d_i – a_{ij}x_j$
        endfor
        $x_i = d_i / a_{ii}$
    endfor
Output x

Método de Gauss-Seidel

- Se asume una solución $x=(x_1, x_2,..., x_n)$ de un sistema de n ecuaciones. Se trata de obtener una solución mejor y usando:

$$y_k = -\left(\frac{1}{a_{kk}}\right)\left(\sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} y_j + \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j - d_k\right)$$

- El proceso continúa hasta que dos valores sucesivos de y sea menor a un ε

Método de Gauss-Seidel

Input n, A, **d** , ε

Algoritmo Gauss_Seidel

do

dif = 0

for k = 1 **to** n

c = 0; f = 0

for j = 1 **to** k – 1

c = c + a_{kj} y_j

endfor

for j = k + 1 **to** n

f = f + a_{kj} x_j

endfor

$y_k = (1/a_{kk}) \cdot (c + f - d_k)$

dif = dif + $(x_k - y_k)^2$

endfor

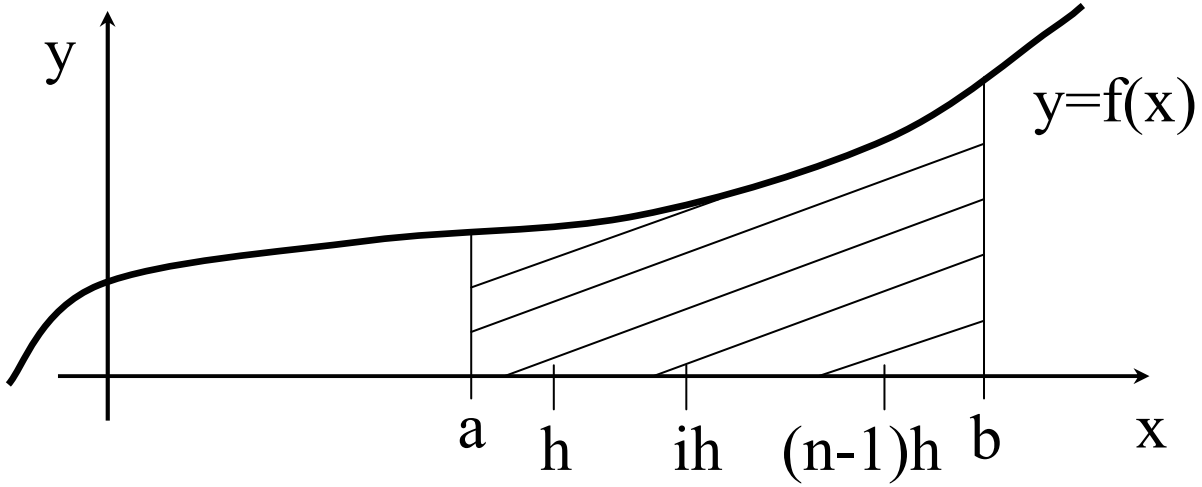
for i = 1 **to** n $x_i = y_i$

while dif > ε

Output x

Integración: Método trapecio

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} f(a) + h\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + \frac{h}{2} f(b)$$



Integración: Mtdo. trapecio

Input n, a, b,
    f(x) [función que calcula f(x)]

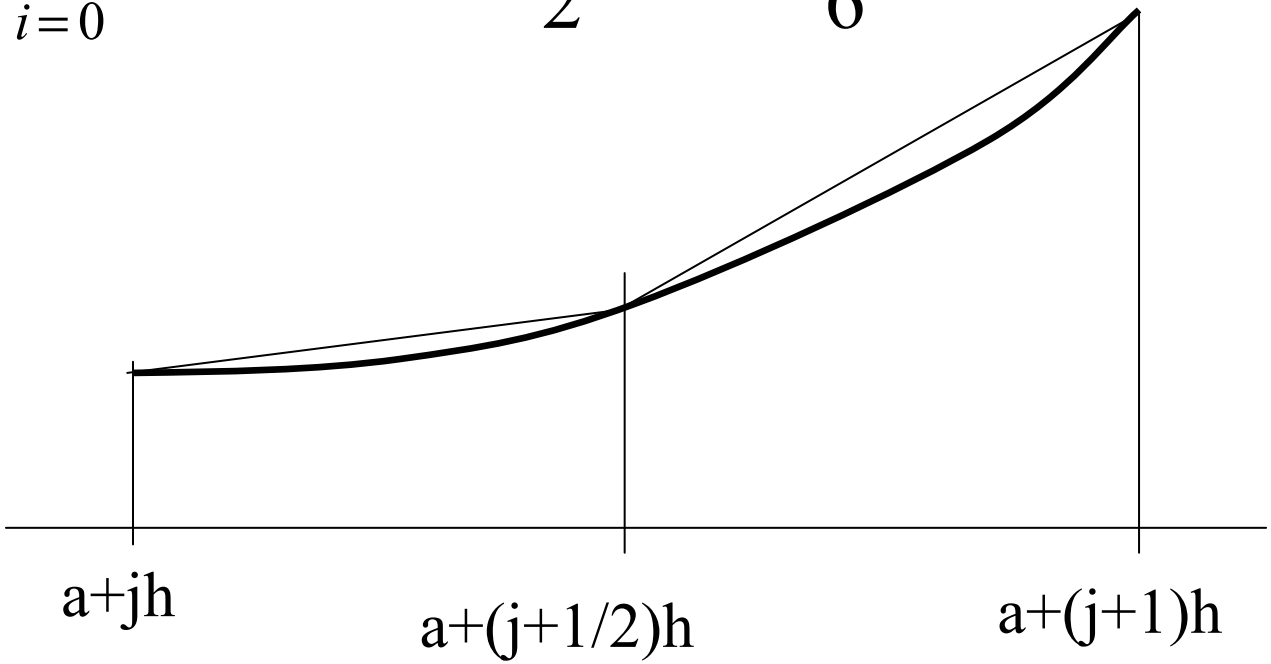
Algoritmo Trapecio
  h = (b – a)/n
  sum = (f(a) + f(b)) / 2
  for i = 1 **to** n – 1
    sum = sum + f(a + ih)
  endfor
  sum = h * sum

Output sum

Integración: Método Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6} f(a) + \frac{h}{3} \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) +$$

$$\frac{2h}{3} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + (i + \frac{1}{2})h) + \frac{h}{6} f(b)$$



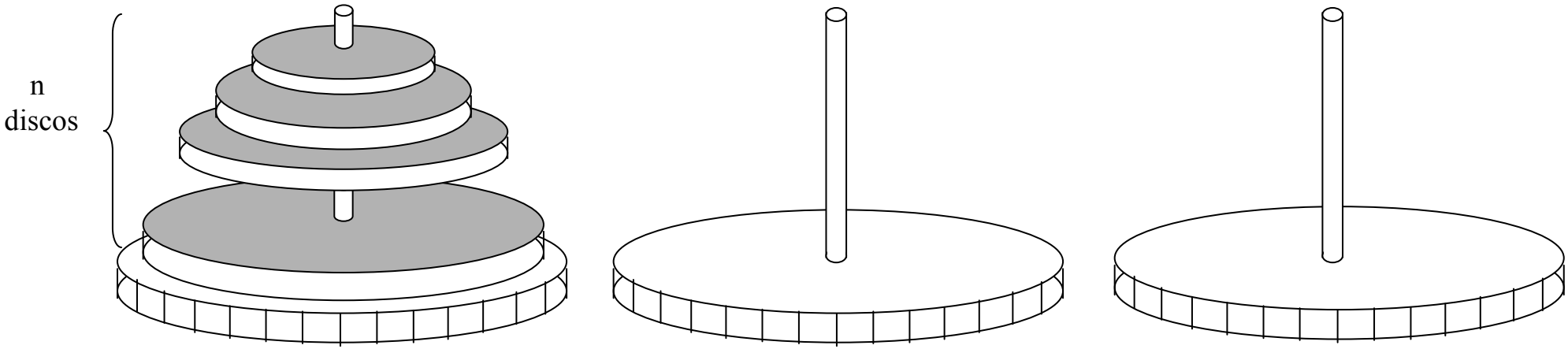
Integración: Mtdo.Simpson

Input n, a, b,
    f(x) [función que calcula f(x)]

Algoritmo Simpson
  h = (b – a)/n
  sum = f(a) + f(b)
  for i = 1 **to** n – 1
    sum = sum + 2f(a + ih)
  endfor
  for i = 1 **to** n – 1
    sum = sum + 4f(a + (i + 1/2)h)
  endfor
  sum = h * sum / 6

Output sum

Recursión: Torres de Hanoi



- Se trata de mover los discos desde un pivote, donde se encuentran inicialmente, a otro pivote, según las siguientes reglas:
  - Sólo se puede mover un disco cada vez
  - Un disco de mayor diámetro nunca puede estar encima de uno de menor diámetro

Recursión: Torres de Hanoi

```
Input n,                    [Número de discos]
      Pi,          [Palo inicial; 1≤ Pi ≤ 3]
      Pf    [Palo final; 1≤Pf ≤ 3, Pi≠Pf]

Algoritmo Torres_Hanoi
   function H(n, f, d)
        if n = 1 then f → d
             else H(n – 1, f, 6 – f – d)
                  Output "mover disco n
                                de f a d"
                  H(n – 1, 6 – f – d , d)
        endif
        return
   endfunc
```

Invocación: H(num, Pi, Pf)

Torres de Hanoi: llamadas

```
H(3,1,3)
    H(2,1,2)
        H(1,1,3)
                mover disco 1 de 1 a 3
        mover disco 2 de 1 a 2
        H(1,3,2)
                mover disco 1 de 3 a 2
    mover disco 3 de 1 a 3
```

Torres de Hanoi: llamadas

H(2,2,3)

H(1,2,1)

mover disco 1 de 2 a 1

mover disco 2 de 2 a 3

H(1,1,3)

mover disco 1 de 1 a 3

Recursión: Quicksort

Input n, K_i , i = 1, 2,…,n

Algoritmo Quicksort

function Qsort(i, d)

if (d – i) > 0 **then**

p = ParteLista(i, d)

Qsort(i, p – 1)

Qsort(p + 1, d)

endif

return

endfunc

Qsort(1, n)

Output K_1, K_2 , …, K_n en orden

Quicksort: ParteLista

Input n, K_i , i = 1, 2,…,n
function ParteLista(F, L)
    p = F
    i = F + 1; j = L
 forever
    while ($K_p < K_j$ **and** j ≠ p) j = j – 1
    if p < j **then** $K_p \leftrightarrow K_j$; p = j; j = j – 1
                else exit
    while ($K_p > K_i$ **and** i ≠ p) i = i + 1
    if p > i **then** $K_p \leftrightarrow K_i$; p = i; i = i + 1
                else exit
 endforever
 return p
endfunction
Output Lista particionada

Búsqueda en cadenas

- Cadena a investigar: $S=s_1 s_2 \ldots s_n$
- Cadena a buscar: $P=p_1 p_2 \ldots p_m$
- s_i y p_i son caracteres de un alfabeto y usualmente $m < n$

Input n, S, m, P

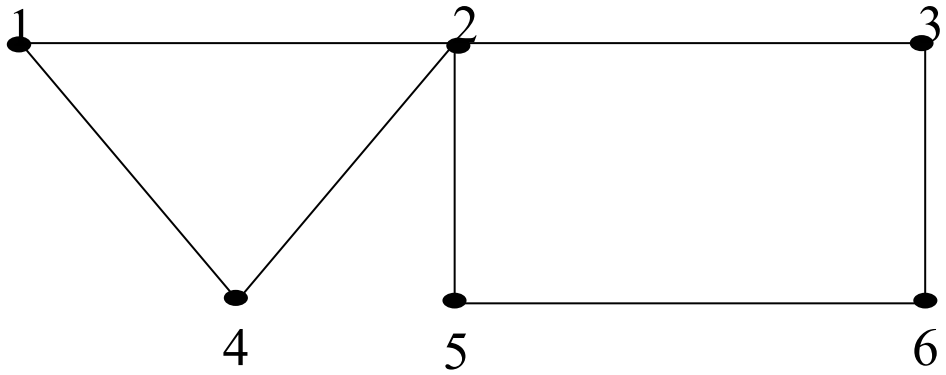
Algoritmo Busca_fbruta
  for i = 1 **to** n – m + 1
    j = 1
    while j <= m **and** $p_j = s_{i+j-1}$
      j = j + 1
    endwhile
    if j = m + 1 **then**
      Output i
  endfor
  Output 'No encontrado'

Grafos

- Un grafo es una estructura que consiste de un conjunto de vértices y un conjunto de aristas
- Las aristas pueden ser no dirigidas (grafo) o dirigidas (digrafo)
- Las estructuras de datos para representar un grafo son:
  - Matriz de adyacencia
  - Lista de adyacencia
- Dos vértices conectados por una arista son adyacentes

Matriz de adyacencia

- Matriz de nxn (n=número de vértices). Si hay una arista entre los nodos (i, j) → 1, sino 0. En grafos es simétrica



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Caminos en grafos

- Sea A = matriz de adyacencia de un grafo. En la matriz A^m el elemento i, j contiene el número de caminos de longitud m desde el vértice i al j.

Input A [Matriz de adyacencia]
m [longit. caminos deseados]

Algoritmo Num_caminos
B = A
for k = 2 **to** m
Mult_matr(A, B, C)
if k < m **then** B = C
endfor

Output C

Búsqueda en profundidad

```
Input G      [Grafo con conj.vértices V]
Algoritmo Busca_en_profund
   function Bprof(u)
        Visitar u
        Marcar u 'visitado'
        for w en A(u)
           if marca(w) ≠ 'visitado' then
        Bprof(w)
        endfor
        return
   endfunc
   Marcar todos vertices 'no visitado'
   Seleccionar un vertice v
   Bprof(v)
Output Resultado procesar info. en cada vertice
```

Arbol de expansión mínimo

Input G [Grafo con conj.vértices V]
W [Conjunto pesos cada arista]

Algoritmo ArbolExpMin
Hallar arista {l, m} de menor peso
T = {l, m, {l, m}}
U = V – {l} – {m}
V' = V - {v}
while U ≠ 0
Hallar arista {q, k} de menor
peso desde un vertice q en T
a un vertice k no en T
T = T ∪ {k, {q, k}}
U = U – {k}
endwhile

Output T