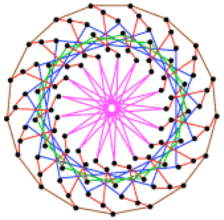
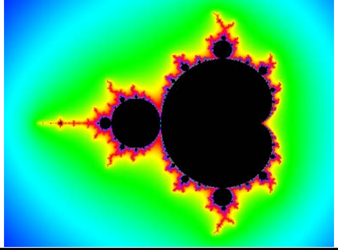
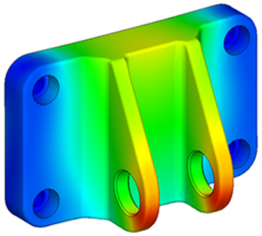
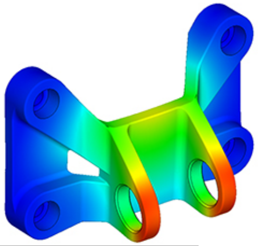





Introducción a la Computación

Pedro Corcuera

Dpto. Matemática Aplicada y
Ciencias de la Computación

Universidad de Cantabria

corcuerp@unican.es

Indice

- Algoritmos
  - Definición y propiedades
  - Representación
  - Algoritmos alternativos y equivalentes
- Programación estructurada
  - Pseudocódigo
- Análisis de algoritmos
- Desarrollo
- Algoritmos iterativos
- Algoritmos recursivos
- Colección de algoritmos

Objetivos

- Introducir los conceptos básicos de algoritmos, complejidad computacional y lenguajes de programación

Algoritmos

Definición

- **Algoritmo** es una secuencia ordenada de instrucciones que resuelve un problema concreto
- Ejemplos:
  - Algoritmo de la media aritmética de N valores.
  - Algoritmo para la resolución de una ecuación de segundo grado.
- Niveles de detalle de los algoritmos:
  - Alto nivel: no se dan detalles.
  - Bajo nivel: muchos detalles.

Algoritmos en la vida diaria$_1$

- **Receta (Algoritmo) de cocina**: Camarones con mayonesa de albahaca.
- Ingredientes - **Input** (datos de entrada o iniciales)
- Resultado u **Output**

Algoritmos en la vida diaria$_2$

- Ingredientes - **Input** (datos de entrada o iniciales)

Ingredientes (para 4 porciones):

- 2 cucharadas de aceite de oliva
- ½ cucharadita de ajo picado fino
- 2 tazas de camarones medianos, sin caparazón y desvenados
- 1 cucharadita de sal
- ½ cucharadita de pimienta
- 2 cucharadas de albahaca picada

Mayonesa de albahaca:

- 1 taza de mayonesa baja en grasa
- 4 cucharadas de albahaca
- 3 pimientas negras molidas
- ½ limón, el jugo

Guarnición:

- 2 aguacates grandes, maduros en rebanadas
- 1 limón en cuartos
- 4 hojas de lechuga escarola
- 8 jitomates cherry partidos por la mitad
- Salsa picante al gusto

Algoritmos en la vida diaria$_3$

- Preparación (Algoritmo):

1. En una sartén caliente **agrega** el aceite de oliva, **agrega** el ajo, camarones, sal, pimienta y albahaca. **Cocínalos** 1 minuto. **Apaga** el fuego y deja los camarones un minuto más. Pasa los camarones a un tazón que esté sobre agua con hielo, déjalos dentro solamente el tiempo necesario para que se **enfríen**.
2. En un tazón **mezcla** todos los ingredientes de la mayonesa albahaca.
3. **Corta** los aguacates en rebanadas y acompaña los camarones. **Sirve** en un plato decorado con hojas de lechuga, tomates cherry, limón y si lo deseas **agrega** un poco de salsa picante.

Propiedades

Necesarias o básicas:

- Corrección (sin errores).
- Validez (resuelve el problema pedido)
- Precisión (no puede haber ambigüedad).
- Repetitividad (en las mismas condiciones, al ejecutarlo, siempre se obtiene el mismo resultado).
- Finitud (termina en algún momento). Número finito de órdenes no implica finitud.
- Eficiencia (lo hace en un tiempo aceptable)

Deseables:

- Generalidad
- Fácil de usar
- Robustez

Representación Verbal

- **Verbal**: usa oraciones del lenguaje natural.

Pago Bruto

Si las horas trabajadas son menores o iguales a 40, el pago es el producto del número de horas trabajadas y la tarifa (100 €/hora). Si se ha trabajado más de 40 horas, el pago es de 150 (50% más de la tarifa normal) por cada hora en exceso a 40.

Si horas trabajadas = 25

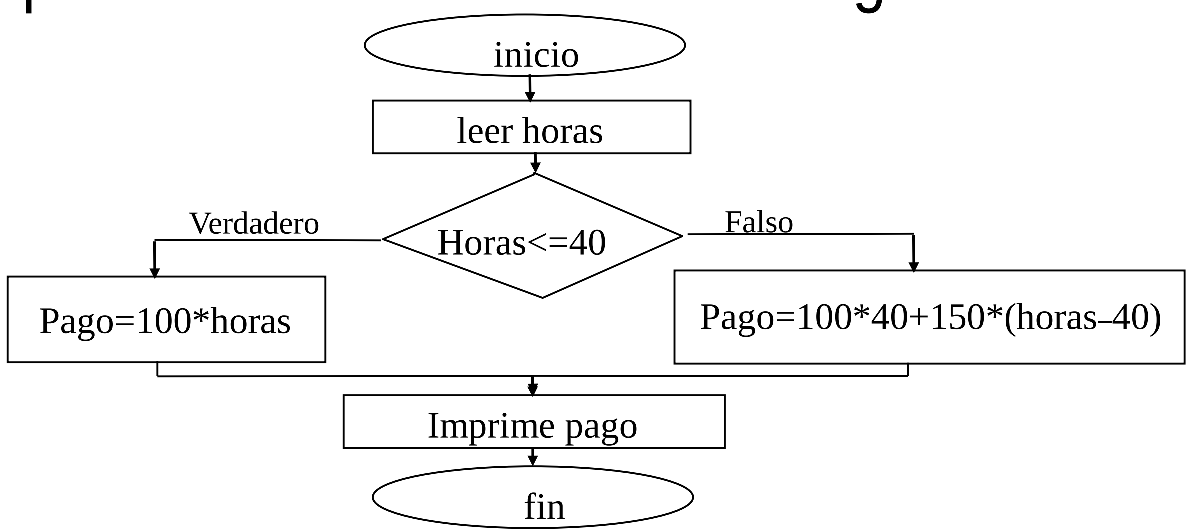
pago = 100x25=2500

Si horas trabajadas = 50

pago = 100x40 + 150x(50-40)=5500

Representación Diagramas de flujo

- **Diagramas de flujo**: Representación gráfica mediante cajas conectadas con flechas. Símbolos habituales:
- *Cajas ovales*: indican inicio y fin.
- *Cajas rectangulares*: representan acciones
- *Rombos*: representan decisiones a tomar. Contiene la condición que determina la dirección a seguir.

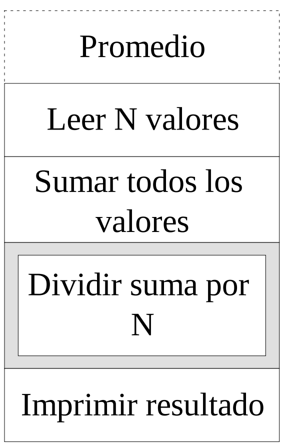


Representación Diagramas de cajas

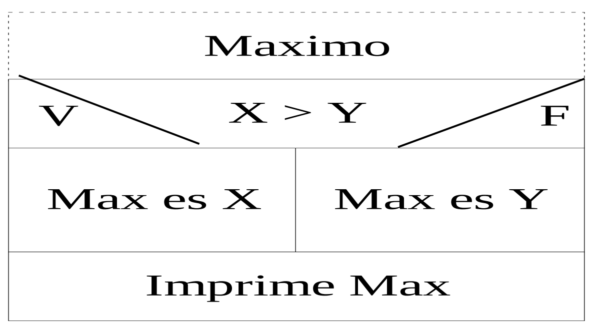
- Diagramas de Bloques, Cajas o de Nassi-Shneiderman

  Ventaja principal: **no** usan flechas. Básicamente se trata de cajas rectangulares que se apilan de acuerdo al algoritmo.

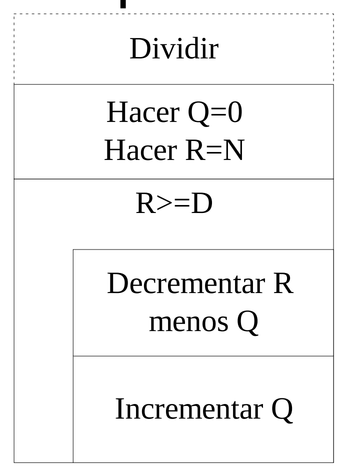
Secuencia



Selección

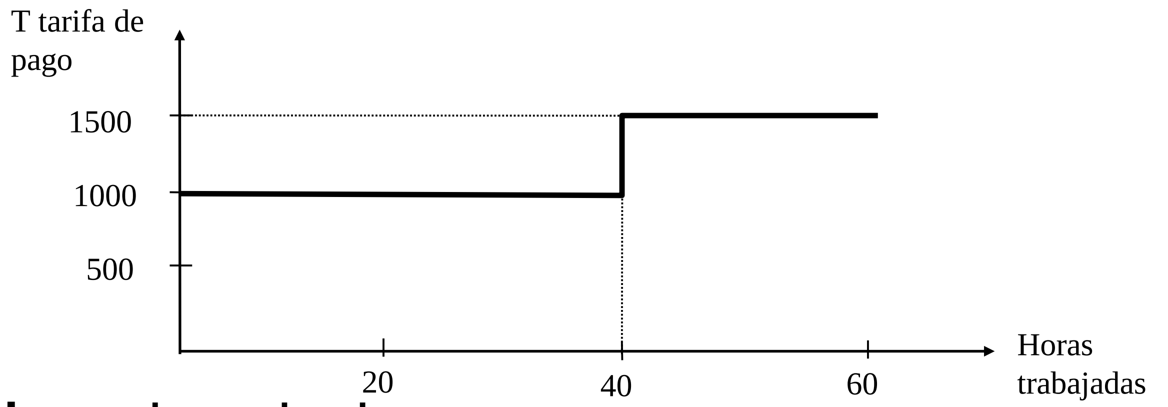


Repetición



Representación Gráficos y Pseudocódigo

- Gráficos:



- **Pseudocódigo**: descripciones cortas que usan una mezcla de matemáticas, lógica y lenguaje natural.

Leer horas

Si horas > 40

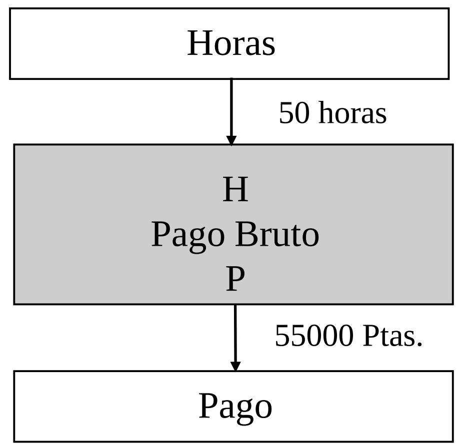
  Pago Bruto = Tarifa x 40 + 150 x (Horas - 40)

sino

  Pago Bruto = 100 x Horas

Representación Flujo de datos y tabulares

- **Diagramas de flujo de datos**: Representación gráfica de alto nivel que muestran los datos de entrada y de salida. Indican *qué* es lo que hace y los diagramas de flujo o de cajas indican *cómo* se hace.



- **Representaciones tabulares** (tablas, arrays y matrices). Son útiles para resumir colecciones de datos grandes.

Representación matemática

- Representaciones algebraicas (fórmulas y expresiones). En ingeniería y matemáticas, los algoritmos se expresan como fórmulas o expresiones algebraicas. Usualmente es una representación muy concisa.

Media y Varianza de una serie de números:

$M = (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N) / N$

$V = [(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \dots + (x_N - M)^2] / N$

Factorial de un número:

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$

Fórmula del seno:

$seno(x) = x - x^3 / 3! + x^5 / 5! - x^7 / 7! \dots$

Modificación de algoritmos

- *Generalización y extensibilidad*: proceso de aplicar el algoritmo a más casos y de incluir más casos dentro del algoritmo
- *Robustez*: proceso de hacer un algoritmo mas fiable o robusto (se recupera de errores), anticipando errores de entrada u otras dificultades.

Algoritmos alternativos y equivalentes

- Pueden haber muchas formas de llevar a cabo un algoritmo.
- En esos casos la elección se basa en la eficiencia (memoria y velocidad).
- El *análisis de algoritmos* estudia la cantidad de recursos que demanda la ejecución de un algoritmo.
- Preocupa más el tiempo de ejecución de un algoritmo: *Complejidad del algoritmo*

Programación estructurada

- Método para construir algoritmos a partir de un número pequeño de bloques básicos.
- Formas fundamentales:
  - *Secuencia*: indica secuencia temporal lineal de las acciones a realizarse.

    ```
    A
    B
    ```

  - *Selección*: especifica una condición que determina la acción a realizarse.

    ```
    if C
            D
    else
            E
    ```

Programación estructurada

– *Repetición*: indica que una o más acciones deben repetirse un determinado número de veces.

```
while G do
        H
```

– *Invocación*: corresponde al grupo de acciones agrupadas bajo un nombre.

Calcula_promedio

Pseudocódigo

- Lectura o entrada de datos

```
Input
```

- Repetición

```
while expr
  instrucción
endwhile

for i = 1 to m
  instrucción
endfor

do
  instrucción
while expr
```

Pseudocódigo

- Decisión

  if expr

    instrucción

  endif

- Escritura o salida de datos

  Output

Análisis de algoritmos

Problema: Buscar el mayor valor en una lista de números desordenados (array)

Algoritmo: (n = número de elementos)

```
max = s_1
i = 2
while i <= n
   if s_i > max then
      max = s_i
   i = i + 1
endwhile
```

Análisis de algoritmos

Número de operaciones realizadas (unid):

Línea	Operaciones	Tiempo
1	indexado y asignación	2
2	asignación	1
3	comparación	1
4,5,6	2 indexado, comparación, 2 asignación, suma	6

Tiempo total:

$$t(n) = 2 + 1 + (n - 1) + 6\cdot(n - 1) = 3 + 7\cdot(n - 1) = 7n - 4$$

Notación asintótica

- Es útil concentrarse en la tasa de crecimiento del tiempo de ejecución t como función del tamaño de la entrada *n*.
- Se usa la notación O **grande** (cota superior al ritmo de crecimiento de un algoritmo):

  Sean f(*n*) y g(*n*) funciones no negativas, f(*n*) es O(g(*n*)) si hay un valor c > 0 y

  $n_0 \geq 1$ tal que $f(n) \leq cg(n)$ para $n \geq n_0$
- Se dice que f(*n*) **es de orden** g(*n*)

  Ej: $7n - 4$ es $O(n)$ si $c=7$ y $n_0 = 1$
- Generalmente para cualquier polinomio

  $a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_0$ es $O(n^k)$

Desarrollo de algoritmos

- Análisis del problema
  - Dominio del problema
  - Modelo
- Diseño del algoritmo
  - Refinamiento sucesivo
  - Top down o botton up
- Análisis del algoritmo
  - Cuánto tarda en dar una solución? Se puede modificar para aumentar la eficiencia?
  - Análisis de la Complejidad
- Verificación del algoritmo
  - Comprobar que es correcto

Algoritmos iterativos

- Muchos algoritmos se basan en ***ciclos o bucles***, es decir en la ejecución de una serie de pasos repetitivos.
- **Iteración** significa hacer algo de forma repetida.

Algoritmos iterativos

Ejemplo: Multiplicación de dos enteros considerando que sólo está disponible la operación suma

```
Algoritmo Mult
Input x        [Entero ≥ 0]
      y        [cualquier entero]
   prod = 0; u = 0   [Inicialización ]
   while u < x
      prod = prod + y
      u = u + 1
   endwhile
Output prod
```

Verificación Algoritmos Método Traza

Input x = 3				
y = 4				
prod = 0				
u = 0				
while u < x	T	T	T	F
prod=prod+y	4	8	12	
u=u + 1	1	2	3	
endwhile				
Output prod	12			

Recursión

- **Recursión** mecanismo de repetición que expresa una solución como función de la solución de un problema de menor tamaño.

Ejemplo: Suma de una lista de números (a_i, i=1,..,n).

$Sum(a_i, i=1,..,n)= a_n + Sum(a_i, i=1,..,n-1)$

si i=1 $Sum = a_1$

Input a_i, i=1,..,n

SumaListaRec(n)

    if n=1 **then** sum = a_1

        else sum = sum + SumaListaRec(n-1)

    endif

    return sum

Colección de Algoritmos

Algoritmos iterativos

- Ejemplo 1a: Suma de una lista de números.

  Lista con elementos individuales indicados por: a_i, $i=1, 2, \ldots, n$ (n = número de elementos de la lista)

  Input n, a_i - versión while
  sum = 0
  i = 1
  while i <= n
      suma = suma + a_i
      i = i + 1
  endwhile
  Output sum

Algoritmos iterativos

- Ejemplo 1b: Suma de una lista de números.

  Lista con elementos individuales indicados por: a_i, i=1, 2, …, n (donde n es el número de elementos de la lista)

  Input n, a_i
  sum = a_1
  for i=2 **to** n
      sum = sum + a_i
  endfor
  Output sum

Algoritmos iterativos

- Ejemplo 2: Hallar el entero positivo n tal que $2^n \leq N$ utilizando sumas y multiplicaciones

```
Input N
n = 0
pot2 = 2
while pot2 ≤ N
      n = n +1
      pot2 = pot2*2
endwhile
Output n
```

Algoritmos iterativos

- Ejemplo 3: Escribir un algoritmo para calcular n! (= $n_x n\text{-}1_x n–2 \ldots 2_x 1$) colocando el resultado en la variable fact

```
Input n
fact = 1
i = 2
while i <= n
    fact = fact * i
    i = i + 1
endwhile
Output fact
```

Algoritmos iterativos

- Ejemplo 4: Calcular x^m siendo m una potencia positiva de 2

```
Input x, m
power = x
cont = 1
while cont < m
      power = power * power
      cont = 2 * cont
endwhile
Output power
```

Ejemplos de algoritmos recursivos

- Ejemplo 1: Escribir un algoritmo recursivo para calcular n!

```
Factorial(n)
    if n = 1 then fact = 1
          else
            fact = n * Factorial(n-1)
    endif
    return fact
```

Ejemplos de algoritmos recursivos

- Ejemplo 2: Escribir un algoritmo recursivo para calcular x^m

```
Powerofx(n)
    if n = 1 then power = x
    else
            power = x * Powerofx(n-1)
    endif
    return power
```

Teoría de números

- Generación de números primos
  - Como todos los primos excepto 2 son números impares, tratamos 2 como un caso especial.
  - Probar todos los números impares divisibles por números impares menores al que se prueba. (No es muy eficiente).
  - Por eficiencia sólo se prueban números menores o iguales a la raíz cuadrada del número que se prueba.
  - Criterio de divisibilidad:

    Resto de división entera (operador %) es 0.

Números Primos

```
Input N     [Núm. de primos a calcular]

Algoritmo NumPrimo
p_1 = 2    [primer primo p_1]; n = 2   [n indica el p_n primo ]
i = 3      [número a probar]
while n <= N
    j=3      [primer divisor]
    while j < √ i
        if i % j = 0 then exit  [es divisor]
        j=j+2                   [siguiente divisor]
    endwhile
    if j = i then p_n = i    [es siguiente primo]
                  n = n + 1
    endif
    i=i+2  [sig. entero a probar]
endwhile

Output p_n , n=1,…,N
```

Máximo común divisor

- **Algoritmo de Euclides** para hallar el máximo común divisor (mcd) de dos números enteros no negativos.
  - Sean m y n dos enteros. El mcd(m,n) se basa en la ecuación m = nq + r donde

    q es el cociente entero q >= 0 y

    r es el resto 0 <= r < n
  - mcd(m,n) = mcd(n,r) cuando r es cero el mcd es n.

Máximo común divisor

```
Input m, n

Algoritmo MCD
    num = m
    denom = n
    while denom != 0
        resto = num%denom
        num = denom
        denom = resto
    endwhile

Output num
```

Máximo común divisor

Como función:

```
Algoritmo MCD(m, n)
    num = m
    denom = n
    while denom != 0
        resto = num%denom
        num = denom
        denom = resto
    endwhile
    return num
```

Mínimo común múltiplo

- El mínimo común múltiplo (mcm) de dos números enteros positivos m y n se puede calcular usando:

  mcd(m,n)*mcm(m,n) = m*n

Input m, n

Algoritmo MCM
num = MCD (m,n)
mcm = m*n/num

Output mcm

Algoritmos del álgebra

- Ecuación de segundo grado

  $ax^2 + bx + c = 0$

  solución analítica:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  Casos especiales:

  a=0, b=0, c=0

  Discriminante $b^2 - 4ac$ negativo (raíces complejas conjugadas)

Ecuación de segundo grado

```
Input a, b, c

Algoritmo Ec2grado
if a = 0 then
    if b = 0 then
        if c = 0  then Output "Ec. Vacia"
                  else Output "Ec. Falsa"
        endif
    else
        x = –c/b
        Output "Raiz real:", x
    endif
else
    disc = b² – 4ac
```

Ecuación de segundo grado

```
if disc < 0 then
    real = –b/2a              [Parte real raiz]
    imag = √–disc/2a          [Parte imag raiz]
    Output "R. complejas", real, imag
else
    x1 = (– b – √disc)/2a
    x2 = (– b + √disc)/2a
    Output "Raices reales", x1, x2
endif
endif
```

$imag = \sqrt{-disc}/2a$

$x_1 = (-b - \sqrt{disc})/2a$

$x_2 = (-b + \sqrt{disc})/2a$

Output "Raices reales", x_1, x_2

Evaluación de polinomios

- La expresión general de un polinomio es:

  $P_n(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$

- Forma compacta de un polinomio: $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

- **Problema**: dados los coeficientes a_n,i=1,…n y un valor x evaluar $P_n(x)$
- Algoritmo de Horner

  $P_n(x)= a_0 + x \cdot (a_1 + x \cdot (a_2 + ...x \cdot (a_n)...))$

  requiere menos multiplicaciones

Evaluación de polinomios

Input $n, a_0, a_1, \ldots, a_n, x$

Algoritmo Evalpoli

sum = a_n

for k = n–1 **downto** 0

    sum = sum · x + a_k

endfor

Output sum

Multiplicación de polinomios

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad Q_m(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$$

Input n, a_0, a_1,..., a_n; m, b_0, b_1,..., b_m

Algoritmo Multpoli
for k = 0 to m+n
    c_k =0
    i=0
    j=k

while i<=n and j>=0
    if j<=m **then**
        $c_k = c_k + a_i\, b_j$
    endif
    i=i+1; j=j–1
endwhile
endfor

Output c_k, k=0,1,...,m+n

Secuencia Fibonacci

- Una secuencia (conjunto ordenado de números) útil es la de Fibonacci definida por:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

$$f_0 = f_1 = 1$$

Input N

Algoritmo Fibon_iter

    $f_0 = 1$
    $f_1 = 1$
    for i = 2 to N
        $f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$
    endfor

Output f_N

Secuencia Fibonacci

- Versión recursiva (ineficiente!)

```
Input n
Algoritmo Fibonacci
    function Fib(n)
    if n = 0 or n= 1
        then Fib = 1
        else Fib = Fib(n–1) + Fib(n – 2)
    endif
    return Fib
endfunction
respuesta = Fib(n)
Output respuesta
```

Máximo y mínimo de una lista

- Sea $S=\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ un conjunto de n elementos donde cada elemento es un número real. Se desea hallar el máximo (mínimo) número en el conjunto.

Input n, $s_1, s_2, \ldots, s_n$

Algoritmo MaxNum

max = s_1

for i = 2 **to** n

  if s_i > max **then** max = s_i

endfor

Output max

Análisis del algoritmo

Número de operaciones realizadas:

1 max = s_1
2 **for** i = 2 **to** n
3   **if** s_i > max **then**
4   max = s_i
  endfor

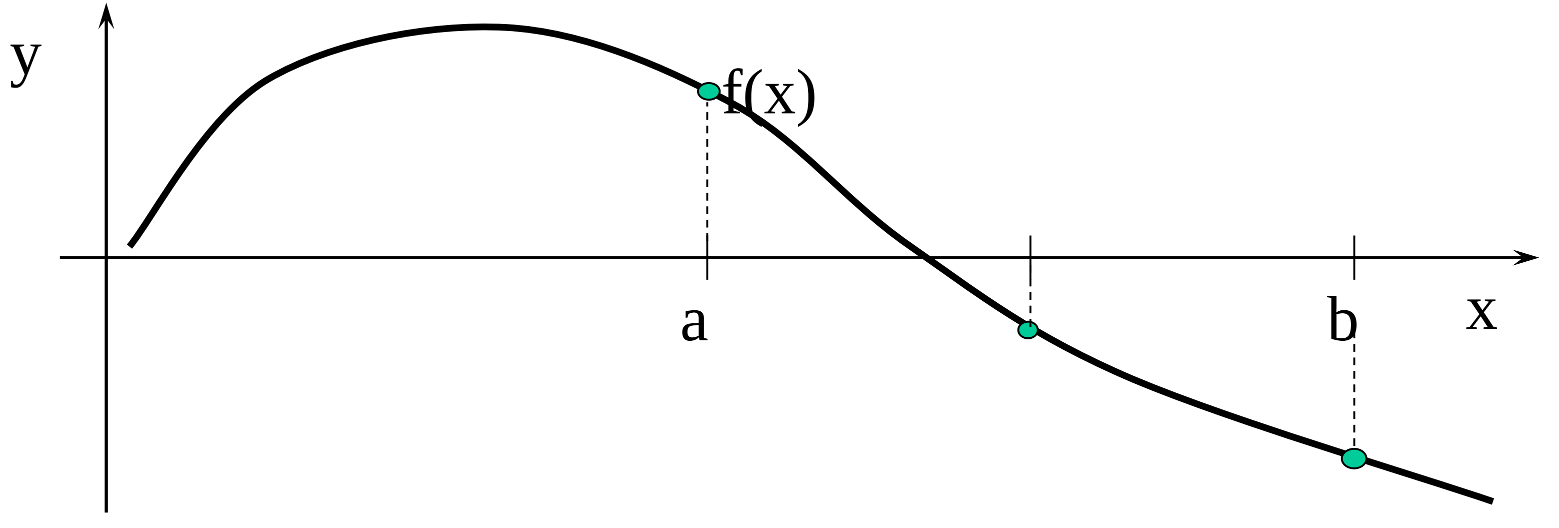
- Línea 1: dos operaciones primitivas (indexado y asignación) → 2 unid
- Línea 2: la instrucción for inicializa contador → 1 unid y compara → n–1 unid.
- Lineas 3 y 4: Se ejecutan n–1 veces en el peor de los casos 6 unid (indexado, comparación, indexado, asignación, suma y asignación).
- Tiempo total = t(*n*) = 2+1+(n–1)+6(n–1) = 3+7(n–1) = **7n – 4**

Notación asintótica

- Es útil concentrarse en la tasa de crecimiento del tiempo de ejecución t como función del tamaño de la entrada *n*.
- Se usa la notación O grande: Sean f(*n*) y g(*n*) funciones no negativas f(*n*) es O(g(*n*)) si hay un valor
  $c > 0$ y $n_0 \geq 1$ / $f(n) \leq cg(n)$ para $n \geq n_0$
- Se dice que f(*n*) **es de orden** g(*n*)
- Ejemplo: $7n - 4$ es $O(n)$ si $c=7$ y $n_0 = 1$
- Cualquier polinomio $a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + ... + a_0$ es $O(n^k)$
- *Ejercicio*: comparar las funciones para valores de n entre 2 a 1024: $\log n$, $\sqrt{n}$, n, $n\log n$, n^2, n^3, 2^n, $n!$

Búsqueda: método Bisección

- Método simple y efectivo para hallar la raíz de una función *continua* **f**(x)
- Se suponen conocidos dos valores de x, **a** y **b**, tal que a < b y que f(a)f(b) < 0, tolerancia de error **ε**



Búsqueda: método Bisección

```
Input f(x), a, b, ε

Algoritmo Biseccion
    izq = a; der = b
    while (der – izq) > ε
        x = (izq + der)/2
        if f(x) = 0 then exit
          else
              if f(x)f(a) < 0 then  der = x
                              else   izq = x
              endif
        endif
    endwhile
    raiz = (izq + der)/2
Output raiz
```

Búsqueda: método secuencial

Problema: buscar un elemento k en un conjunto de elementos K_i i = 1,…,n

Búsqueda secuencial: Aplicable a listas desordenadas

Input n, [Número de elementos]
K_i , i = 1, 2,…,n [Lista de claves]
k [clave a buscar]

Algoritmo Busqsec
i = 1
while (true)
if k = K_i **then Output** i; **stop**
else i = i + 1
endif
if i > n **then Output** “no hallado”
stop
endwhile

Búsqueda binaria

Aplicable a listas previamente **ordenadas**

Input n, [Número de elementos]
K_i , i = 1, 2,…,n [Lista de claves]
k [clave a buscar]

Algoritmo Busqbin
I = 1; D = n
while (true)
i = (I + D)/2
if k = K_i **then Output** i
stop
else if k < K_i **then** D = i – 1
else I = i + 1
endif
if I > D **then Output** “no hallado”
stop
endwhile

Búsqueda binaria (versión recursiva)

- Versión recursiva: Invocación Busqbinrec(1, n)

Input n, [Número de elementos]

K_i , i = 1, 2,…,n [Lista de claves]

k [clave a buscar]

Algoritmo Busqbinrec(k, I, D)

if I > D **then**

Output “no hallado”; **return**

else

i = (I + D)/2

if k = K_i **then Output** i; **return i**

else if k < K_i **then** Busqbinrec(I, i–1)

else Busqbinrec(i+1, D)

endif

endif

Análisis del algoritmo

- Número de candidatos inicial: n
- Primera llamada: n/2
- i-ésima llamada: $n/2^i$
- En el peor de los casos las llamadas recursivas paran cuando no hay más candidatos.
- Máximo número de llamadas recursivas: menor entero m tal que $n/2^m < 1$
- $m > \log n$ $m = \lfloor \log n \rfloor + 1$
- Por tanto: la búsqueda binaria es de orden O(log *n*)

Ordenamiento: Método burbuja

Problema: Poner en orden (ascendente o descendente) un conjunto de elementos K_i , $i = 1,\ldots,n$

Input n, K_i , $i = 1, 2,\ldots,n$

Algoritmo Burbuja

$i = n - 1$

while $i \neq 0$

  for $j = 1$ **to** i

   if $K_j > K_{j+1}$ **then**

    $temp = K_j$ [intercambio]

    $K_j \leftrightarrow K_{j+1}$

    $K_{j+1} \leftrightarrow temp$

  endfor

  $i = i - 1$

endwhile

Output $K_1, K_2 , \ldots, K_n$ en orden

Ordenamiento: Método inserción

- Toma un elemento cada vez y lo inserta en su lugar en la parte de la lista que ha sido ordenada.

Input n, K_i , i = 1, 2,…,n

Algoritmo Insercion
```
for i = 2 to n
        temp = K_i
        j = i – 1
        while j ≠ 0 and temp <= K_j
                K_{j+1} = K_j
                j = j – 1
        endwhile
        K_{j+1} = temp
endfor
```

Output K_1, K_2 , …, K_n en orden

Multiplicación matricial

- Sea $A=[a_{ij}]$ una matriz de $m_x k$ y $B=[b_{ij}]$ una matriz de $k_x n$. El producto matricial de AB es $C=[c_{ij}]$ de $m_x n$ donde

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir} b_{rj}$$

Input m, k, n, A, B

Algoritmo Mult_matr
    for i = 1 **to** m
        for j = 1 **to** n
            $c_{ij} = 0$
            for r = 1 **to** k
                $c_{ij} = c_{ij} + a_{ir}\, b_{rj}$
            endfor
        endfor
    endfor

Output C

Eliminación de Gauss

- Método de solución de la ecuación Ax = d
- Eliminar x_i desde la ecuación i+1 hasta la n para i=1,2,..., n−1
- Calculando de abajo arriba se obtiene el valor de cada variable: (sustitución hacia atrás)

$$x_n = d'_n / a'_{nn}$$

$$x_i = (d'_i - \sum_{j=i+1}^{n} a'_{ij} x_j) / a'_{ii}$$

Eliminación de Gauss

Input n, A, d
Algoritmo Elim_Gauss
for i = 1 **to** n – 1
for k = i + 1 **to** n
$m = a_{ki} / a_{ii}$
$a_{ki} = 0$
for j = i + 1 **to** n
$a_{kj} = a_{kj} – ma_{ij}$
endfor
$d_k = d_k – md_i$
endfor
endfor
for i = n **downto** 1
for j = i + 1 **to** n
$d_i = d_i – a_{ij}x_j$
endfor
$x_i = d_i / a_{ii}$
endfor
Output x

Método de Gauss-Seidel

- Se asume una solución x=(x_1, x_2,..., x_n) de un sistema de n ecuaciones. Se trata de obtener una solución mejor y usando:

$$y_k = -\left(\frac{1}{a_{kk}}\right)\left(\sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} y_j + \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j - d_k\right)$$

- El proceso continúa hasta que dos valores sucesivos de y sea menor a un ε

Método de Gauss-Seidel

Input n, A, **d** , ε

Algoritmo Gauss_Seidel

do

dif = 0

for k = 1 **to** n

c = 0; f = 0

for j = 1 **to** k – 1

$c = c + a_{kj}\, y_j$

endfor

for j = k + 1 **to** n

$f = f + a_{kj}\, x_j$

endfor

$y_k = (1/a_{kk}) \cdot (c + f - d_k)$

$dif = dif + (x_k - y_k)^2$

endfor

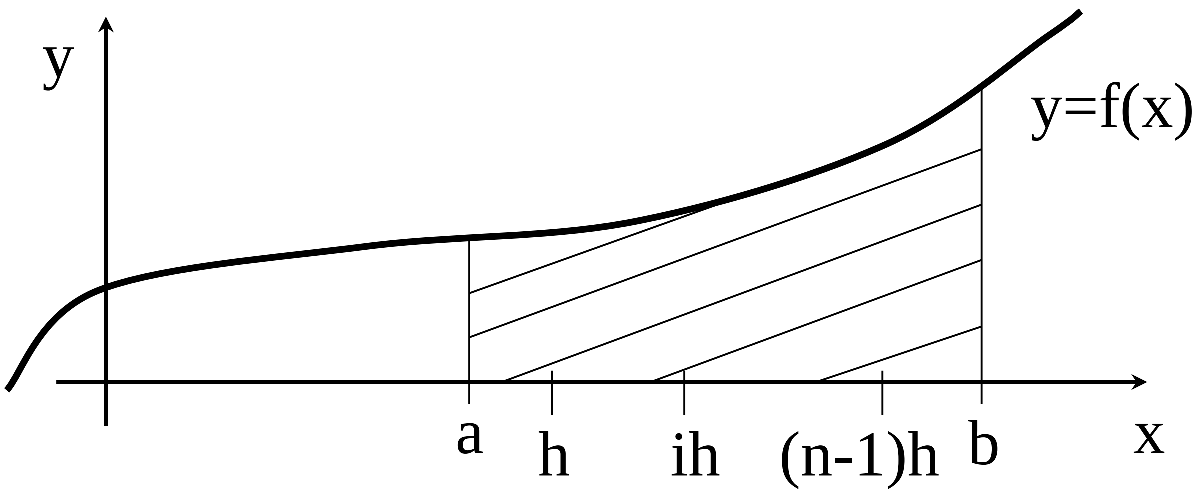
for i = 1 **to** n $x_i = y_i$

while dif > ε

Output x

Integración: Método trapecio

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} f(a) + h\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + \frac{h}{2} f(b)$$



Integración: Método trapecio

Input n, a, b,
    f(x)   [función que calcula f(x)]

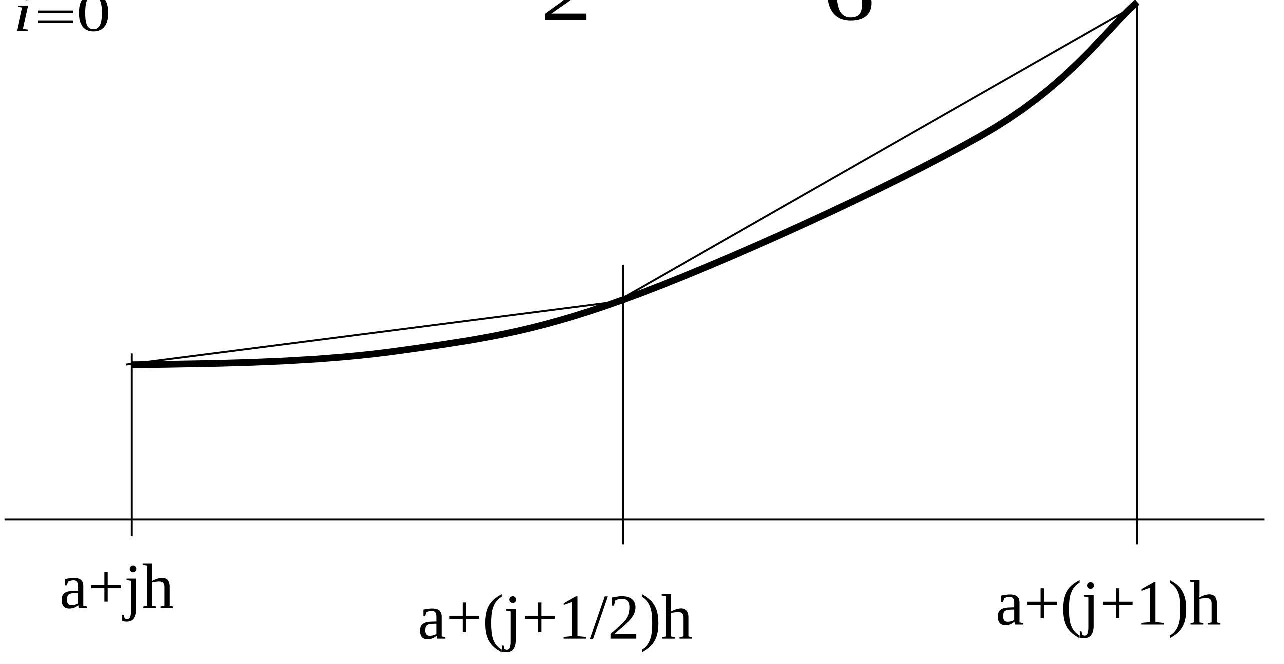
Algoritmo Trapecio
    h = (b – a)/n
    sum = (f(a) + f(b)) / 2
    for i = 1 **to** n – 1
        sum = sum + f(a + ih)
    endfor
    sum = h ∗ sum

Output sum

Integración: Método Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6} f(a) + \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) +$$

$$\frac{2h}{3}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+(i+\frac{1}{2})h) + \frac{h}{6} f(b)$$



Integración: Método Simpson

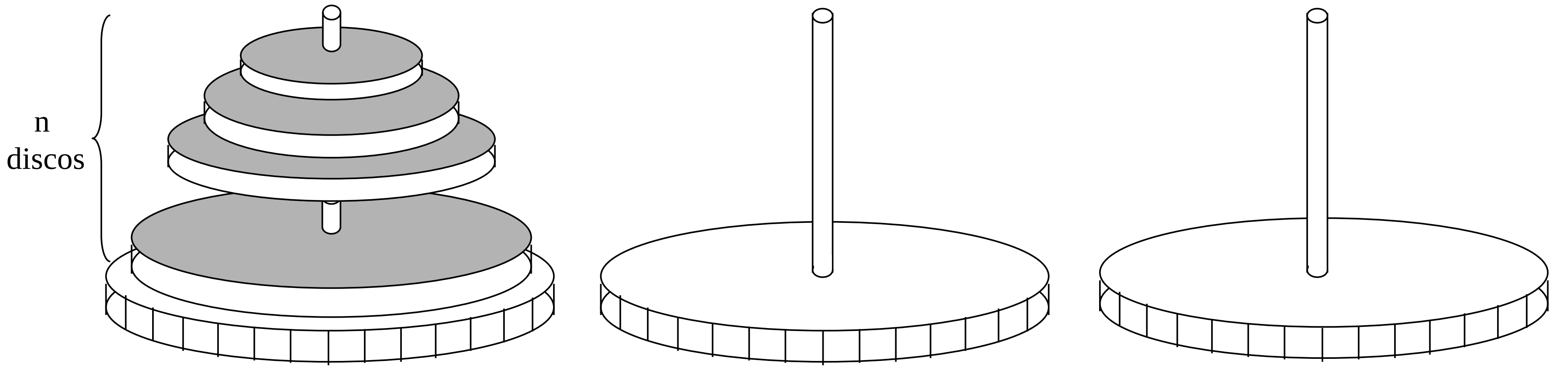
Input n, a, b,
        f(x)   [función que calcula f(x)]

Algoritmo Simpson
    h = (b – a)/n
    sum = f(a) + f(b)
    for i = 1 **to** n – 1
        sum = sum + 2f(a + ih)
    endfor
    for i = 1 **to** n – 1
        sum = sum + 4f(a + (i + 1/2)h)
    endfor
    sum = h ∗ sum / 6

Output sum

Recursión: Torres de Hanoi

- Se trata de mover los discos desde un pivote, donde se encuentran inicialmente, a otro pivote, según las siguientes reglas:
  - Sólo se puede mover un disco cada vez
  - Un disco de mayor diámetro nunca puede estar encima de uno de menor diámetro



Recursión: Torres de Hanoi

Input n, [Número de discos]
Pi, [Palo inicial; $1 \leq Pi \leq 3$]
Pf [Palo final; $1 \leq Pf \leq 3$, $Pi \neq Pf$]

Algoritmo Torres_Hanoi
  function H(n, f, d)
    if n = 1 **then** f $\rightarrow$ d
      else H(n – 1, f, 6 – f – d)
        Output “mover disco n de f a d”
        H(n – 1, 6 – f – d , d)
    endif
    return
  endfunc

Invocación: H(num, Pi, Pf)

Recursión: Torres de Hanoi

H(3,1,3)
    H(2,1,2)
        H(1,1,3)
            mover disco 1 de 1 a 3
        mover disco 2 de 1 a 2
        H(1,3,2)
            mover disco 1 de 3 a 2
    mover disco 3 de 1 a 3
    H(2,2,3)
        H(1,2,1)
            mover disco 1 de 2 a 1
        mover disco 2 de 2 a 3
        H(1,1,3)
            mover disco 1 de 1 a 3

Recursión: Método de ordenación Quicksort

Input n, K_i , i = 1, 2,…,n

```
Algoritmo Quicksort
    function Qsort(i, d)
        if (d – i) > 0 then
            p = ParteLista(i, d)
            Qsort(i, p – 1)
            Qsort(p + 1, d)
        endif
        return
    endfunc
    Qsort(1, n)
```

Output K_1, K_2 , …, K_n en orden

Búsqueda en cadenas

- Cadena a investigar: $S=s_1s_2...s_n$
- Cadena a buscar: $P=p_1p_2\ldots p_m$
- s_i y p_i son caracteres de un alfabeto y usualmente $m < n$

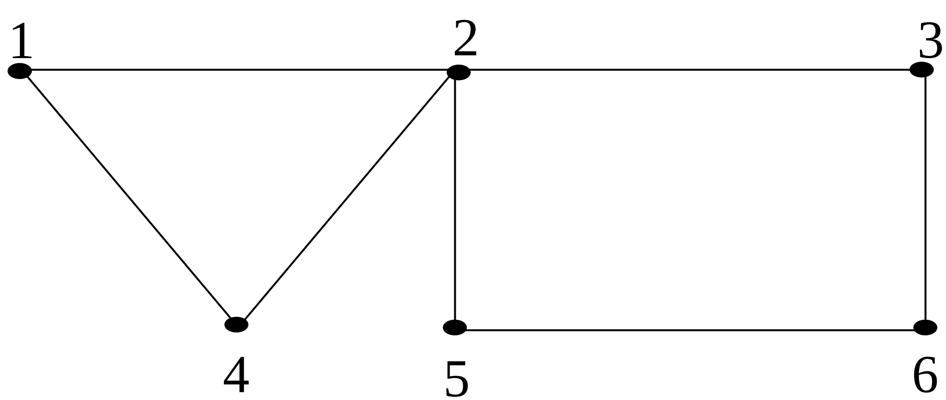
```
Input n, S, m, P

Algoritmo Busca_fbruta
    for i = 1 to n – m + 1
        j = 1
        while j <= m and p_j = s_{i+j-1}
                j = j + 1
        endwhile
        if j = m + 1 then
                Output i
    endfor
    Output 'No encontrado'
```

Grafos

- Un grafo es una estructura que consiste de un conjunto de vértices y un conjunto de aristas
- Las aristas pueden ser no dirigidas (grafo) o dirigidas (digrafo)
- Las estructuras de datos para representar un grafo son:
  - Matriz de adyacencia
  - Lista de adyacencia
- Dos vértices conectados por una arista son adyacentes

Matriz de adyacencia

- Matriz de nxn (n=número de vértices). Si hay una arista entre los nodos (i, j) $\rightarrow$ 1, sino 0. En grafos es simétrica



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Caminos en grafos

- Sea A = matriz de adyacencia de un grafo. En la matriz A^m el elemento i, j contiene el número de caminos de longitud m desde el vértice i al j.

```
Input A          [Matriz de adyacencia]
      m          [longit. caminos deseados]
Algoritmo Num_caminos
    B = A
    for k = 2 to m
        Mult_matr(A, B, C)
        if k < m then  B = C
    endfor

Output C
```

Búsqueda en profundidad

```
Input G      [Grafo con conj.vértices V]
Algoritmo Busca_en_profund
    function Bprof(u)
        Visitar u
        Marcar u ‘visitado’
        for w en A(u)
            if marca(w) ≠ ‘visitado’ then          Bprof(w)
        endfor
        return
    endfunc
    Marcar todos vertices ‘no visitado’
    Seleccionar un vertice v
    Bprof(v)
Output Resultado procesar info. en cada vertice
```

Arbol de expansión mínimo

```
Input G      [Grafo con conj.vértices V]
         W    [Conjunto pesos cada arista]
Algoritmo ArbolExpMin
    Hallar arista {l, m} de menor peso
    T = {l, m, {l, m}}
    U = V – {l} – {m}
    V’ = V - {v}
    while U ≠ 0
         Hallar arista {q, k} de menor
            peso desde un vertice q en T
            a un vertice k no en T
         T = T ∪ {k, {q, k}}
         U = U – {k}
    endwhile
Output T
```

Arrays: Algoritmos comunes

- Relleno de un array

```
int[] data = new int[11];
for (int i = 0; i < data.length; i++)
{
  data[i] = i * i;
}
```

- Suma y promedio

```
double total = 0, promedio = 0;
for (double elemento : data)
{
  total = total + elemento;
}
if (data.length > 0) { promedio = total / data.length; }
```

Arrays: Algoritmos comunes

- Máximo y mínimo

```
double maximo = data[0];
for (int i = 1; i < data.length; i++) {
  if (data[i] > maximo) {
    maximo = data[i];
  }
}
```

Ordenación

- Ordenación o clasificación es el proceso de reordenar un conjunto de objetos en un orden específico.
- El propósito de la ordenación es facilitar la búsqueda de elementos en el conjunto ordenado.
- Existen muchos algoritmos de ordenación, siendo la diferencia entre ellos la eficiencia en tiempo de ejecución.
- Los métodos de ordenación se pueden clasificar en dos categorías: ordenación de ficheros o externa y *ordenación de arrays* o interna.

Ordenación

- Formalmente el problema del ordenamiento se expresa como:
  - Dados los elementos: $a_1, a_2, \ldots, a_n$
  - Ordenar consiste en permutar esos elementos en un orden: $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_n}$ tal que dada una función de ordenamiento f: $f(a_{k_1}) \leq f(a_{k_2}) \leq \ldots \leq f(a_{k_n})$
- Normalmente, la función de ordenamiento se guarda como un componente explícito (campo) de cada item (elemento). Ese campo se llama la *llave del item*.
- Un método de ordenamiento es *estable* si el orden relativo de elementos con igual llave permanece inalterado por el proceso de ordenamiento.

Análisis de Algoritmos: Complejidad

- Para comparar algoritmos se pueden estudiar desde dos puntos de vista:
  - el tiempo que consume un algoritmo para resolver un problema (complejidad temporal) ⟵ más interés
  - la memoria que necesita el algoritmo (complejidad espacial).
- Para analizar la complejidad se cuentan los pasos del algoritmo en función del tamaño de los datos y se expresa en unidades de tiempo utilizando la notación asíntotica “O- Grande” (complejidad en el peor caso).

Problema: Buscar el mayor valor en una lista de números desordenados (array)

```
Algoritmo: (n = número de elementos)
max = s1
i = 2
while i <= n
  if si > max then
           max = si
     i = i + 1
endwhile
```

Análisis de Algoritmos: Complejidad

Número de operaciones realizadas (unid):

Línea	Operaciones	Tiempo
1	indexado y asignación	2
2	asignación	1
3	comparación	1
4,5,6	2 indexado, comparación, 2 asignación, suma	6

Tiempo total:

$$t(n) = 2 + 1 + (n - 1) + 6\cdot(n - 1)$$
$$= 3 + 7\cdot(n - 1) = 7n - 4$$

- Sean f(n) y g(n) funciones no negativas, f(n) es O(g(n)) si hay un valor $c > 0$ y $n_0 \geq 1$ tal que $f(n) \leq cg(n)$ para $n \geq n_0$
- Se dice que f(n) es de orden g(n)
- Ej: $7n - 4$ es $O(n)$ si $c=7$ y $n_0 = 1$

Método de Ordenación: burbuja

- Es un método caracterizado por la *comparación* e *intercambio* de pares de elementos hasta que todos los elementos estén ordenados.
- En cada iteración se coloca el elemento más pequeño (orden ascendente) en su lugar correcto, cambiándose además la posición de los demás elementos del array.
- La complejidad del algoritmo es $O(n^2)$.

Método de Ordenación: inserción

- Método usado para ordenar una mano de naipes.
- Los elementos están divididos conceptualmente en una secuencia destino y una secuencia fuente.
- En cada paso, comenzando con i=2 e incrementando i en uno, el elemento i-ésimo de la secuencia fuente se toma y se transfiere a la secuencia destino insertándolo en el lugar adecuado.
- Este algoritmo puede mejorarse fácilmente si vemos que la secuencia destino $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ está ordenada, por lo que usamos una búsqueda binaria para determinar el punto de inserción.
- La complejidad del algoritmo es $O(n^2)$. Es estable.

Método de Ordenación: selección

- En éste método, en el i-ésimo paso seleccionamos el elemento con la llave de menor valor, entre a[i],…, a[n] y lo intercambiamos con a[i].
- Como resultado, después de i pasadas, el i-ésimo elemento menor ocupará a[1],…, a[i] en el lugar ordenado.
- La complejidad del algoritmo es $O(n^2)$.

Método de Ordenación: Quicksort

- Se basa en el hecho que los intercambios deben ser realizados preferentemente sobre distancias grandes.
- El algoritmo (técnica de dividir y vencer) simplificado es:
  - Seleccionar un elemento del array (elemento pivote, p.e. el que se encuentra en la mitad).
  - Todos los elementos menores al pivote se colocan en un array y los mayores en otro.
  - Se aplica el mismo procedimiento de forma *recursiva*, sobre los subarrays hasta que solo exista un elemento.
- La complejidad del algoritmo es $O(n \cdot \log n)$.

Algoritmos comunes - Búsqueda

- Búsqueda lineal o secuencial
  - Se aplica a arrays desordenados.
  - La complejidad del algoritmo es O(n).
- Búsqueda binaria
  - Se aplica a arrays ordenados.
  - Compara el elemento en la mitad del array con el buscado, si es menor excluye la mitad menor, si es mayor excluye la mitad mayor.
  - Repetir hasta encontrar el valor buscado o no se puede dividir.

Búsqueda binaria

```
double searchedValue = XXX;  // Valor a buscar
boolean found = false; int low = 0, pos = 0;
int high = data.length - 1;
while (low <= high && !found) {
  pos = (low + high) / 2;  // Mitad del array
  if (data[pos] == searchedValue)
  { found = true; }      // Encontrado
  else if (data[pos] < searchedValue)
  { low = pos + 1; }     // Busca en la primera mitad
  else { high = pos - 1; } // Busca en la segunda mitad
}
if (found)
{ System.out.println("Encontrado en la posicion " + pos+1); }
else
{ System.out.println("No encontrado"); }
```

Patrones de programación

- Los patrones de programación del sumatorio y productorio (usuales en algoritmos numéricos) son:

$$\sum_{i=0}^{N} termino_i$$

```
suma=0; i = 0;
while (i <= N)
{
    suma = suma + termino_i;
    i = i + 1;
}
```

$$\prod_{i=0}^{N} termino_i$$

```
prod=1; i = 0;
while (i <= N)
{
    prod = prod * termino_i;
    i = i + 1;
}
```

Ejemplo de ciclo while

- Calcular el valor de *seno(x)* en los puntos resultantes de dividir el intervalo $[0,\pi]$ en N subintervalos, según su formulación en serie :

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \equiv sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x \in \Re$$

El valor del seno tendrá un error menor que un valor dado ε especificado por el usuario, siendo el error cometido menor que el valor absoluto del último término de la serie que se toma.

Ejemplo de ciclo while - Observaciones

- Serie para el cálculo de seno(x):

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad error = |t_i| < \varepsilon$$

- Se observa que los términos de la serie son recurrentes:

$$t_i = -t_{i-1} \cdot \frac{x \cdot x}{2 \cdot i \cdot (2 \cdot i + 1)} \qquad t_0 = x$$

- Datos: N_interv número de subintervalos en [0,π]
  eps error en el cálculo del seno

Ejemplo de ciclo while - Pseudocódigo

```
leer N_interv, eps
dx = pi / N_interv
x = 0
while (x <= pi)
        t = x
        i = 1
        seno = x
        while | t | > eps
              t = − t * (x*x)/(2*i*(2*i + 1))
              seno = seno + t
              i = i + 2
        end_while
        print x, seno
        x = x + dx
end_while
```

Algoritmos recursivos

- Son algoritmos que expresan la solución de un problema en términos de una llamada a sí mismo (llamada recursiva o recurrente)
- Ejemplo típico: Factorial (n!) de un número

$$n! = \begin{cases} 1 & si\, n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & si\, n > 0 \end{cases}$$

- Son más ineficientes que los iterativos pero más simples y elegantes
- Todo algoritmo recursivo tiene su equivalente iterativo

Algoritmos recursivos – definición y diseño

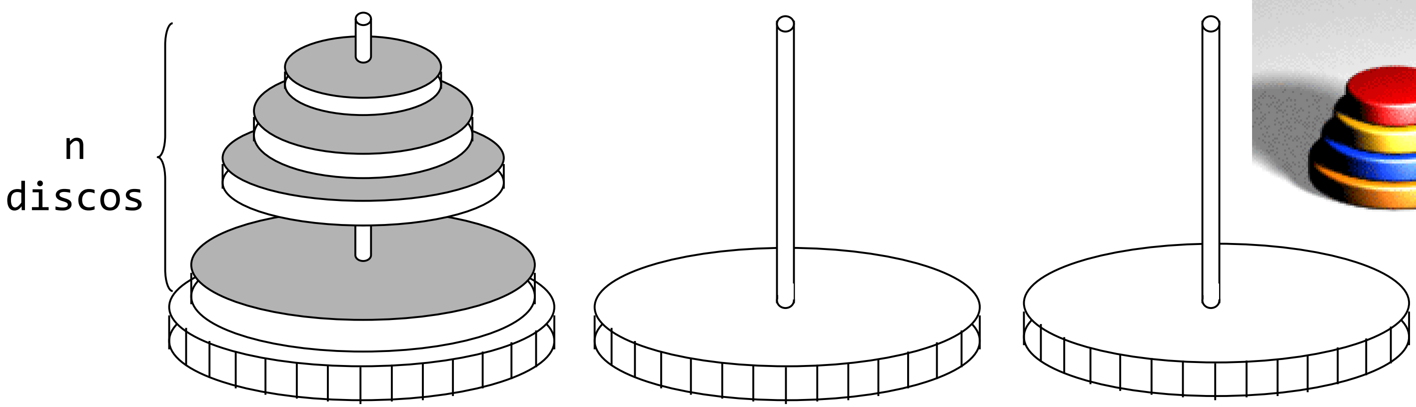
- Un método recursivo es un método que se llama a sí mismo dentro del cuerpo del método.
- Para diseñar correctamente un algoritmo recursivo, es necesario:
  - Establecer correctamente la ley de recurrencia.
  - Definir el procedimiento de finalización del algoritmo recursivo (normalmente con el valor o valores iniciales).

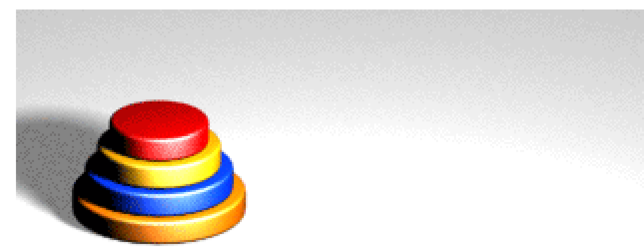
Algoritmos recursivos – Verificación

- Para verificar funciones recursivas se aplica el método de las tres preguntas:
  - *pregunta Caso-Base*: Hay una salida no recursiva de la función, y la rutina funciona correctamente para este caso "base"?
  - *pregunta Llamador-Más Pequeño*: Cada llamada recursiva a la función se refiere a un caso más pequeño del problema original?
  - *pregunta Caso-General*: Suponiendo que las llamadas recursivas funcionan correctamente, funciona correctamente toda la función?

Algoritmos recursivos – torres de Hanoi

- Juego consistente en tres pivotes y un número de discos de diferentes tamaños apilados.
  - Consiste en mover los discos de un pivote a otro.
  - Sólo se puede mover un disco cada vez
  - Un disco de mayor diámetro nunca puede estar encima de uno de menor diámetro





Algoritmos recursivos – torres de Hanoi

- Se considera un pivote origen y otro como destino. El otro pivote se usa para almacenamiento temporal.
- El algoritmo para n discos (>0), numerados del más pequeño al más grande, y que los nombres de los pivotes son detorre, atorre y auxtorre es:
  - Mover los n-1 discos superiores del pivote detorre al pivote auxtorre usando el pivote atorre como temporal.
  - Mover el disco n al pivote atorre.
  - Mover los n-1 discos del pivote auxtorre al pivote atorre usando detorre como temporal.

Algoritmos recursivos – cambio de base

- Se requiere un programa para cambiar un número entero (base 10) en otra base (2 - 16)
- El algoritmo para cambiar de base es:
  - dividir sucesivamente hasta que el cociente sea menor que la base.
  - los dígitos del número resultante se forman agrupando, de derecha a izquierda, el último cociente y los restos obtenidos durante la división desde el último al primero.
  - Si los dígitos superan la base 10 se utilizan letras.
- Ejemplo: $17_{10} = 10001_2$

Paradigmas de programación

- “*Un **paradigma de programación** indica un método de realizar cómputos y la manera en que se deben estructurar y organizar las tareas que debe llevar a cabo un programa* ”
- Los paradigmas fundamentales están asociados a determinados **modelos de cómputo**.
- También se asocian a un determinado **estilo de programación**
- Los lenguajes de programación suelen implementar, a menudo de forma parcial, **varios** paradigmas.

Tipos de paradigmas de programación

- Los **paradigmas fundamentales** están basados en diferentes **modelos de cómputo** y por lo tanto afectan a las construcciones más básicas de un programa.
- La división principal reside en el enfoque **imperativo** (indicar el **cómo** se debe calcular) y el enfoque **declarativo** (indicar el **qué** se debe calcular).
  – El enfoque declarativo tiene varias ramas diferenciadas: el paradigma **funcional**, el paradigma **lógico**, la programación **reactiva** y los lenguajes **descriptivos**.

Tipos de paradigmas de programación

- Otros paradigmas se centran en la estructura y organización de los programas, y son compatibles con los fundamentales:
  - Ejemplos: Programación estructurada, modular, **orientada a objetos**, **orientada a eventos**, programación genérica.
- Por último, existen paradigmas asociados a la **concurrencia** y a los **sistemas de tipado**.

Paradigma Imperativo

- Describe **cómo** debe realizarse el cálculo, no el porqué.
- Un cómputo consiste en una serie de sentencias, ejecutadas según un control de flujo **explícito**, que **modifican el estado** del programa.
- Las variables son **celdas de memoria** que contienen datos (o referencias), pueden ser modificadas, y representan el **estado** del programa.
- La sentencia principal es la **asignación**.

Paradigma Imperativo

- Es el estándar 'de facto'.
  - Asociados al paradigma imperativo se encuentran los paradigmas **procedural**, **modular**, y la programación **estructurada**.
  - El lenguaje representativo sería FORTRAN, junto con COBOL, BASIC, PASCAL, C, ADA.
  - También lo implementan Java, C++, C#, Eiffel, Python, ...

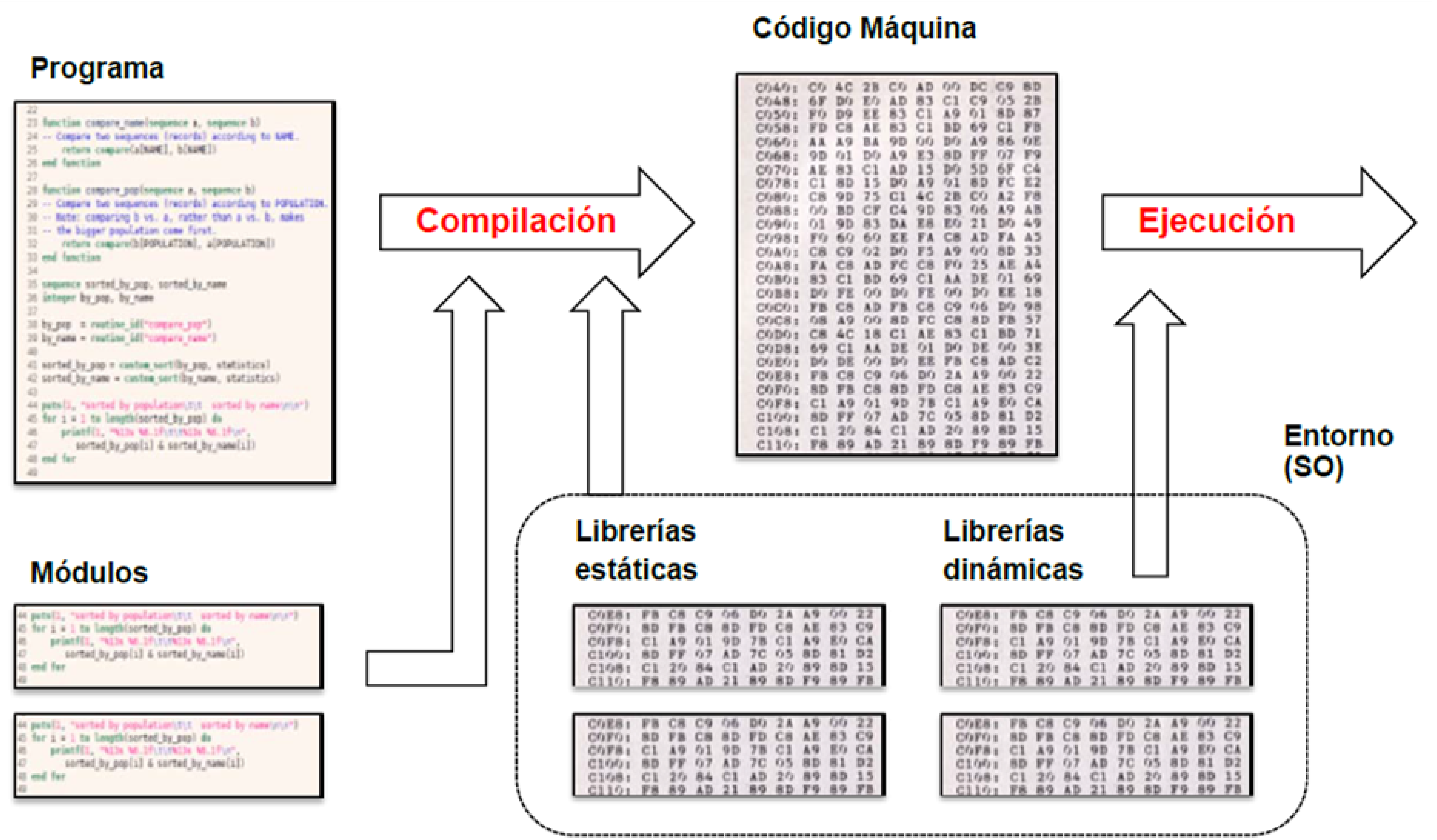
Computabilidad

- **Algoritmo**: Procedimiento sistemático que permite resolver un problema en un número finito de pasos, cada uno de ellos especificado de manera efectiva y sin ambigüedad.
- **Función computable**: Aquella que puede ser calculada mediante un dispositivo mecánico dado un tiempo y espacio de almacenamiento ilimitado (pero finito)
- No importa la eficiencia, sino la posibilidad de ser calculada.

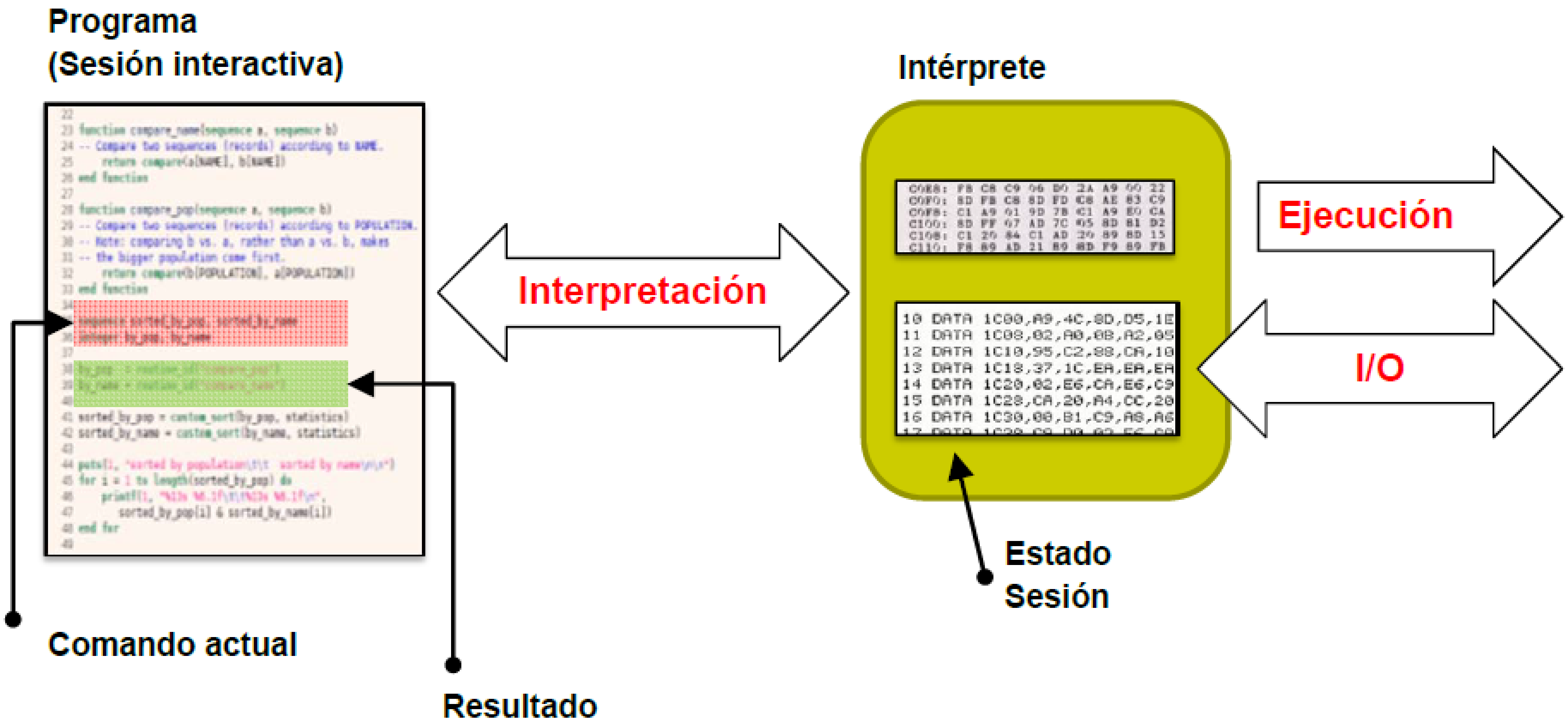
Lenguajes de Programación

- Lenguaje artificial diseñado para expresar cómputos que pueden ser llevados a cabo por una máquina.
- Basado en un modelo de cómputo define un nivel de abstracción más elevado cercano al programador.
- Debe traducirse a un código que pueda entender el procesador: el **código máquina**.
- Modos de traducción:
  - Lenguaje Compilado
  - Lenguaje Interpretado (Entorno interactivo)
  - Lenguaje traducido a Código Intermedio (Java Bytecodes, .NET IDL)

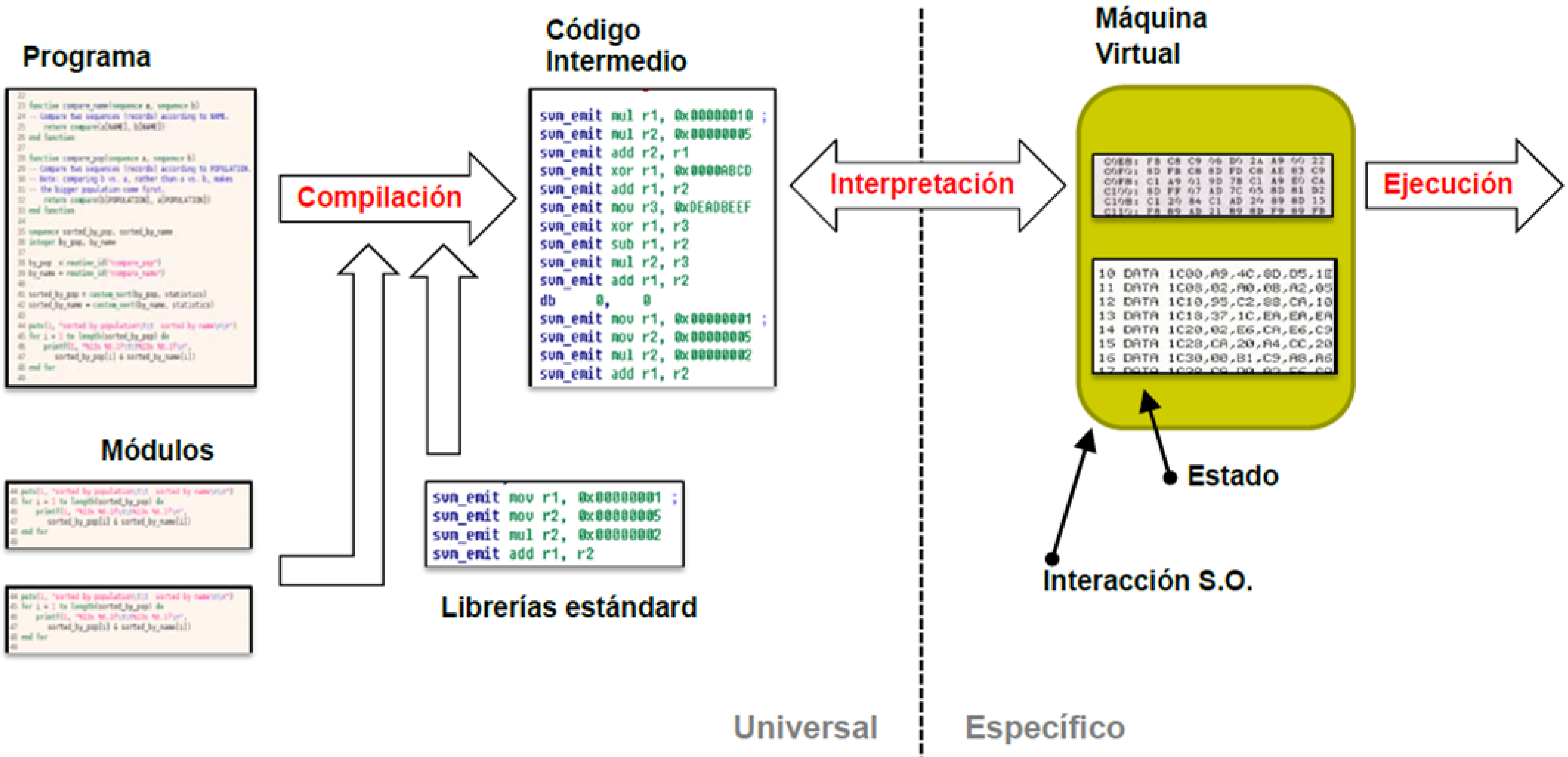
Estrategias de traducción – Código compilado



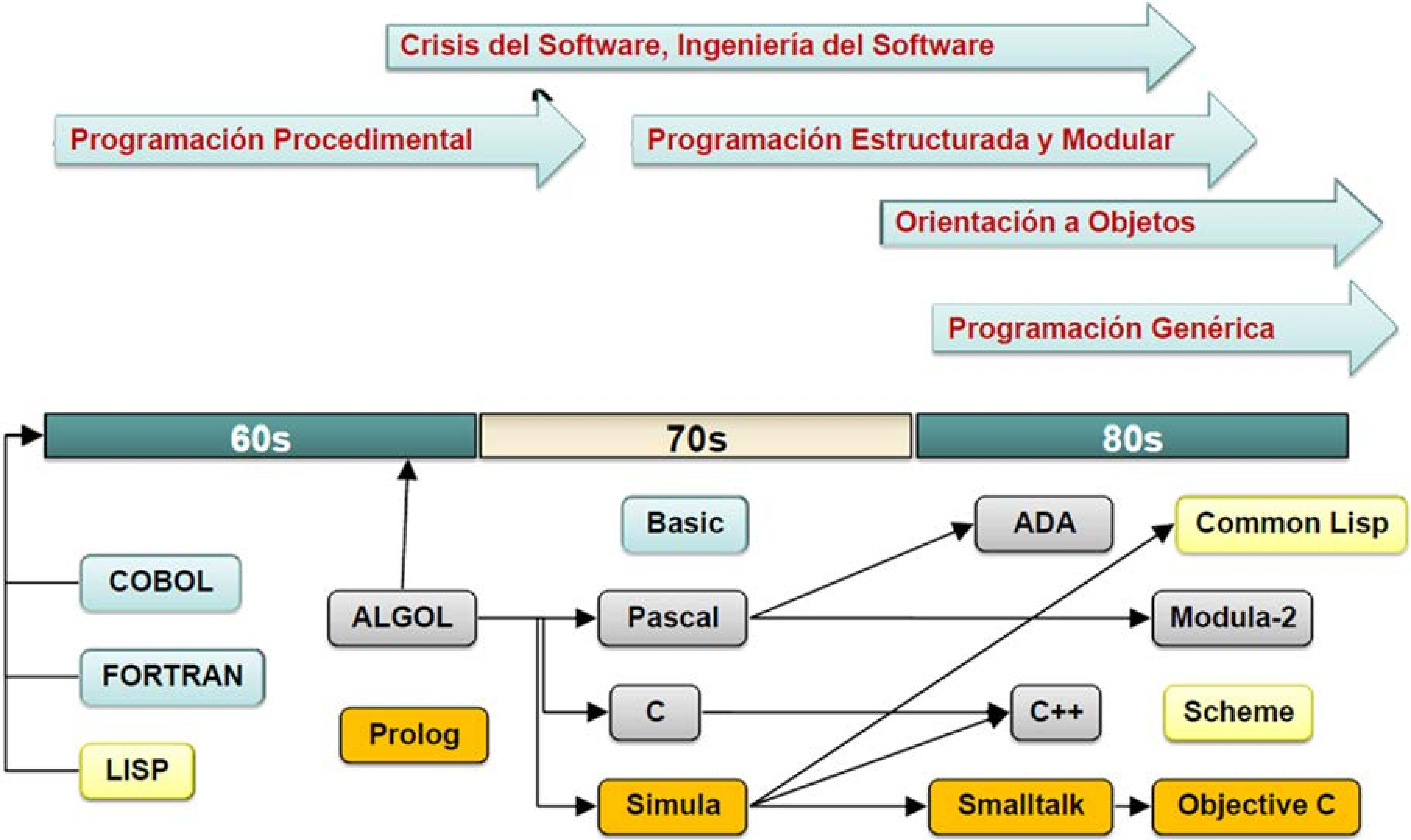
Estrategias de traducción – Código interpretado



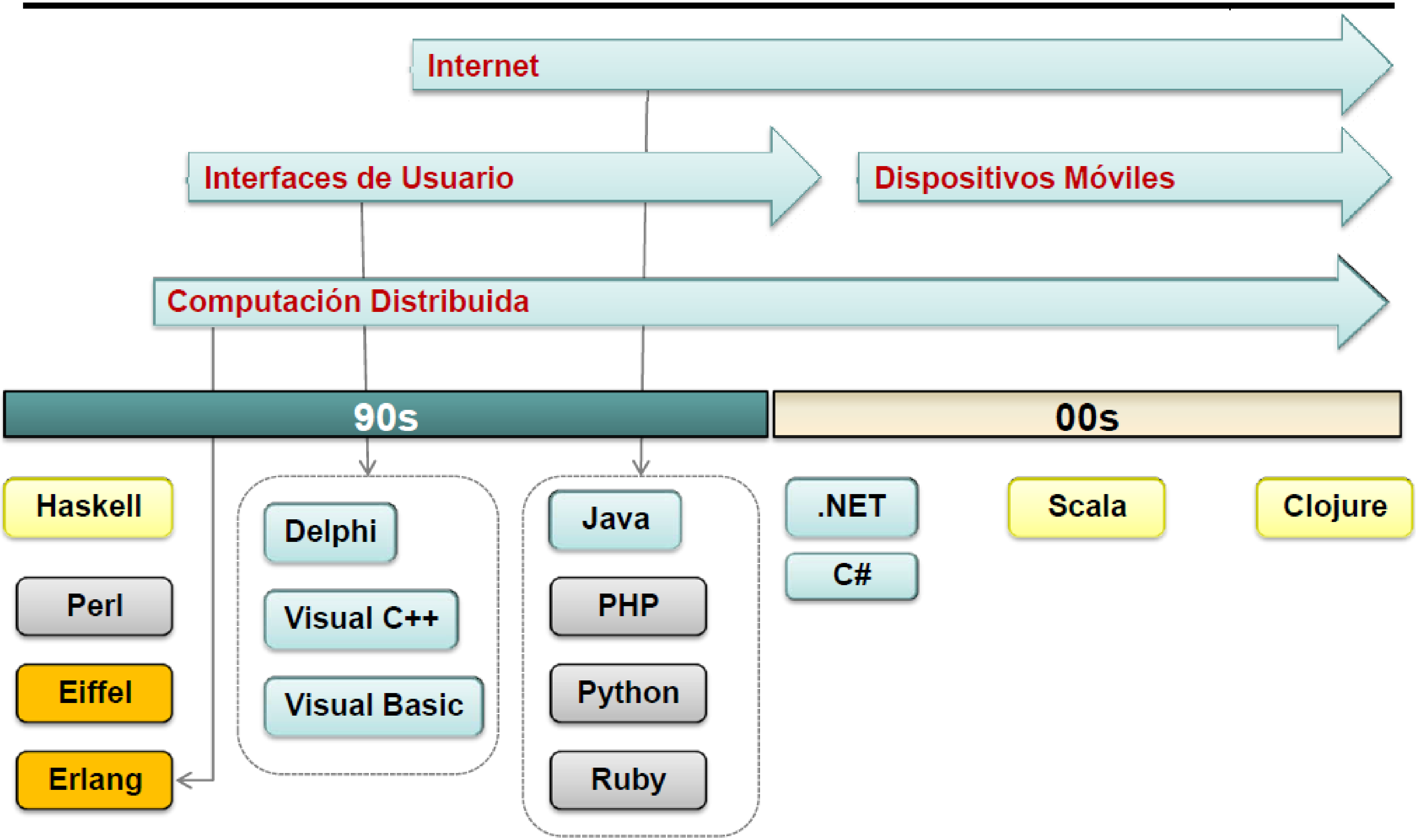
Estrategias de traducción – Código intermedio



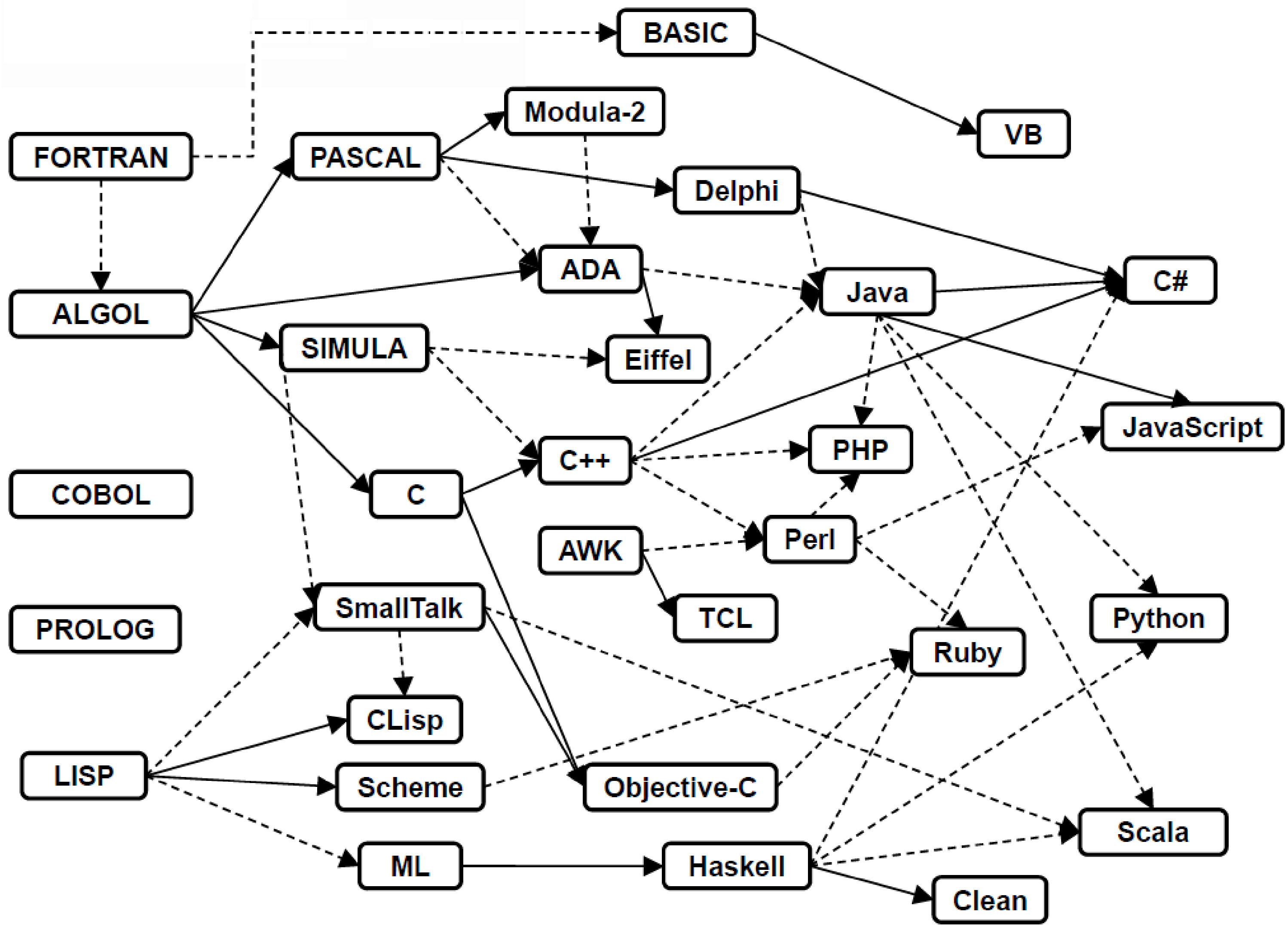
Lenguajes de Programación - Línea de tiempo



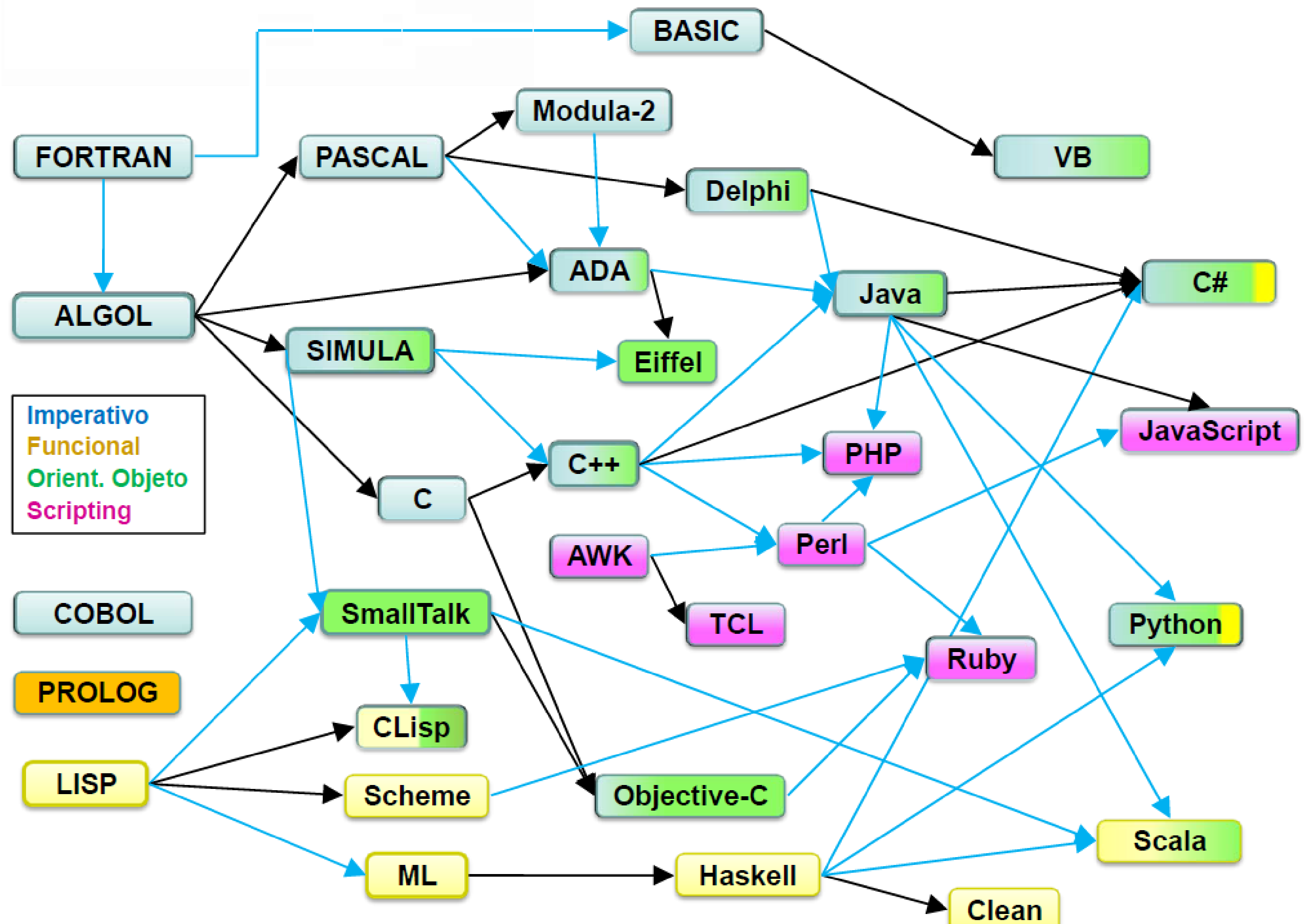
Lenguajes de Programación - Línea de tiempo



Lenguajes de Programación - Evolución



Lenguajes de Programación - Paradigmas



Lenguajes de Programación - Sintaxis

- A "Hello, World!" program in Visual Basic.

```
Module Hello
  Sub Main()
     MsgBox("Hello, World!") ' Display message
  End Sub
End Module
```

- JavaScript

```
<!DOCTYPE HTML><html><body><p>Header...</p>
  <script>
    alert('Hello, World!')
  </script>
  <p>...Footer</p></body>
</html>
```

Lenguajes de Programación - Sintaxis

- A "Hello, World!" program in Matlab

```
% Do it in command window
disp('Hello World!');
% Do it with GUI way
msgbox('Hello World!','Hello World!');
fprintf ( 1, '\n' );
fprintf ( 1, '  Hello, world!\n' );
```

- A "Hello, World!" program in Java

```
public class HelloWorld {
  public static void main(String[] args) {
      System.out.println("Hello, World");
  }
}
```