# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

15 de Diciembre de 2011

**1)** Hallar el polinomio de grado menor o igual a 20 mejor aproximación en el sentido de mínimos cuadrados de la función de $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}(\mathrm{e}^x)$, tomando como datos los valores de $f$ en los nodos $x_j = jh$, $j = 0, \ldots, 100$ y $h = 0.02$.

**2)** Calcular el valor aproximado de la integral $\int_0^\pi \mathrm{e}^{x^2} \operatorname{sen}^3(1+x)\, dx$ con un error relativo inferior a $10^{-8}$.

**3)** Utilizar el método Runge-Kutta-Fehlberg descrito abajo para resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y''(t) = 10t(y(t) + z(t)) \\ z'(t) = (1 - y'(t))z(t) + \mathrm{e}^t, \quad t \in [0, 3/2] \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 1, \ z(0) = 0. \end{cases}$$

Tomar $\epsilon_a = 10^{-8}$ y $\epsilon_r = 10^{-6}$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | |
| 2/9 | 2/9 | | | | | |
| 1/3 | 1/12 | 1/4 | | | | |
| 3/4 | 69/128 | -243/128 | 135/64 | | | |
| 1 | -17/12 | 27/4 | -27/5 | 16/15 | | |
| 5/6 | 65/432 | -5/16 | 13/16 | 4/27 | 5/144 | |
| orden 5 | 47/450 | 0 | 12/25 | 32/225 | 1/30 | 6/25 |
| Estimadores | 1/150 | 0 | -3/100 | 16/75 | 1/20 | -6/25 |

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

9 de Febrero de 2012

**1)** Se desea tabular la función $f(x) = \cos x$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Para ello se eligen $(n+1)$ puntos uniformemente espaciados $x_j = jh$, con $j = 0, \ldots, n$ y $h = \frac{\pi}{2n}$. Para la determinación de los valores de $f$ en un punto $x$ fuera de la tabla, se utilizará una interpolación lineal entre los nodos más próximos a $x$. Hallar una cota del error de interpolación en términos de $h$. Hallar el valor de $n$ si deseamos tener un error inferior a $10^{-6}$. Responder a las mismas cuestiones si en lugar de una interpolación lineal realizamos interpolación cúbica.

**2)** Calcular el valor aproximado de la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{1+x}\, dx$ con 10 dígitos decimales de precisión.

**3)** Resolver el siguiente problema de contorno con la máxima precisión que te permita tu ordenador

$$\begin{cases} y''(t) = ty^3(t) - 1 - \operatorname{sen} t \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1. \end{cases}$$

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

13 de Septiembre de 2012

**1)** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x & 2 & -3 & 5 & 0 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & x & 0 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2x & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & x^3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cos x & -x \end{pmatrix}$$

determinar un valor de $x$ tal que $-2$ sea un valor propio de $A$.

**2)** Calcular el valor aproximado de la integral $\int_0^{\pi} \exp(\operatorname{sen} x \cos x)\, dx$ con 6 dígitos decimales de precisión.

**3)** Resolver el siguiente problema de contorno con la máxima precisión que te permita tu ordenador

$$\begin{cases} y^{(4)}(t) = y''(t) - y^3(t) + 2t \quad t \in [0,1] \\ y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 1 \\ y'(1) + y''(1) = 1. \end{cases}$$

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

18 de Diciembre de 2012

**1)** Calcular todas las raices del polinomio $p(x) = 25x^8+85x^7+181x^6+238x^5+226x^4+142x^3+61x^2+13x+1$ con la máxima precisión que te permita tu ordenador.

**2)** Calcular el valor aproximado de la integral $\int_0^\infty e^{-x^2} \log(2 + \operatorname{sen} x)\, dx$ con un error absoluto inferior a $10^{-12}$.

**3)** Utiliza el método Runge-Kutta-Fehlberg descrito abajo para resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y''(t) = 2ty(t)\cos(z(t)) \\ z'(t) = e^{t/5}\operatorname{sen}(y(t)+z(t)), \quad t \in [0,20] \\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1,\ z(0) = 1. \end{cases}$$

Tomar $\epsilon_a = 10^{-12}$ y $\epsilon_r = 10^{-10}$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | |
| 2/9 | 2/9 | | | | | |
| 1/3 | 1/12 | 1/4 | | | | |
| 3/4 | 69/128 | -243/128 | 135/64 | | | |
| 1 | -17/12 | 27/4 | -27/5 | 16/15 | | |
| 5/6 | 65/432 | -5/16 | 13/16 | 4/27 | 5/144 | |
| orden 5 | 47/450 | 0 | 12/25 | 32/225 | 1/30 | 6/25 |
| Estimadores | 1/150 | 0 | -3/100 | 16/75 | 1/20 | -6/25 |

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA (Cálculo Numérico)

EXAMEN

7 de Febrero de 2013

**1)** Se desea tabular la función de distribución gaussiana

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Teniendo en cuenta que $F(x) = 1 - F(-x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, y que en consecuencia $F(0) = 0.5$, es suficiente tabular la función

$$f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Para aproximar $f(x)$ en los puntos $x$ no contenidos en la tabla, se hará una interpolación cúbica eligiendo los cuatro nodos de la tabla más próximos a $x$. La precisión que se desea en el resultado con este modo de proceder es de $10^{-6}$. Si tenemos en cuenta que $f(x) - f(5) < 3 \times 10^{-7}$ para cada $x > 5$, será suficiente tabular la función $f$ en el intervalo $[0, 5]$. Por razones de simplicidad los nodos de la tabla $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ se tomarán igualmente espaciados. Hallar el número de nodos que son necesarios para obtener un error inferior al señalado por el procedimiento indicado. Además, determinar el error que se cometería si tomásemos $n = 100$ y realizásemos una interpolación lineal en lugar de cúbica para aproximar los valores de $f(x)$ en los puntos $x$ ausentes de la tabla.

**2)** Calcular el valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx$ con un error absoluto inferior a $10^{-12}$. (Sugerencia: hacer un cambio de variable adecuado para eliminar la singularidad en $x = 0$.)

**3)** Resolver el siguiente problema de contorno con la máxima precisión que te permita tu ordenador

$$\begin{cases} y^{(4)}(t) + y^{(3)}(t) + 2ty''(t) - y'(t) = \operatorname{sen}(ty(t)) + 1 \quad t \in [0, \pi/2], \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1, y'''(0) = 0, \\ y(\pi/2) + y'(\pi/2) = 0. \end{cases}$$

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

11 de Septiembre de 2013

**1)** Dada la función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log(1+x)$, determinar los polinomios de grado 3 que resuelven los siguientes problemas de interpolación

**1.1-** $p(x_i) = f(x_i)$, $x_i = \frac{i}{3}$, $0 \le i \le 3$.

**1.2-** $p(x_i) = f(x_i)$, $0 \le i \le 3$, donde $\{x_i\}_{i=0}^{3}$ denotan los cuatro puntos de Chebyshev en el intervalo $[0,1]$.

**1.2-** $p^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i)$, $i = 0,1$, $k = 0,1$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

Calcular una cota del error de interpolación en cada uno de los tres casos.

**2)** Calcular el valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ con un error absoluto inferior a $10^{-12}$.

**3)** Resolver las ecuaciones de Lorentz

$$\left\{\begin{array}{l} y_1'(t) = 10(y_2(t) - y_1(t)) \\ y_2'(t) = y_1(t)(28 - y_3(t)) - y_2(t) \quad t \in [0,30] \\ y_3'(t) = y_1(t)y_2(t) - \dfrac{8}{3}y_3(t) \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 1, y_3(0) = 0 \end{array}\right.$$

con cotas del error $e_a = 10^{-12}$ y $e_r = 10^{-10}$, mediante el método Runge-Kutta-Fehlberg

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | |
| 2/9 | 2/9 | | | | | |
| 1/3 | 1/12 | 1/4 | | | | |
| 3/4 | 69/128 | -243/128 | 135/64 | | | |
| 1 | -17/12 | 27/4 | -27/5 | 16/15 | | |
| 5/6 | 65/432 | -5/16 | 13/16 | 4/27 | 5/144 | |
| orden 5 | 47/450 | 0 | 12/25 | 32/225 | 1/30 | 6/25 |
| Estimadores | 1/150 | 0 | -3/100 | 16/75 | 1/20 | -6/25 |

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

3 de Diciembre de 2013

**1)** Dada la función $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen} x$, determinar los polinomios de grado 10 que resuelven los siguientes problemas de interpolación

(i) $p(x_i) = f(x_i)$, $x_i = \dfrac{\pi i}{10}$, $0 \leq i \leq 10$.

(ii) $p(x_i) = f(x_i)$, $0 \leq i \leq 10$, donde $\{x_i\}_{i=0}^{10}$ denotan los nodos de Chebyshev en el intervalo $[0, \pi]$.

Calcular una cota del error de interpolación en cada uno de los casos.

*NOTA:* Podéis serviros de las funciones Matlab roots y conv. La primera calcula las raíces de un polinomio y la segunda calcula el producto de dos polinomios.

**2)** Calcular el valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_0^1 x \log(\operatorname{sen} x)\, dx$ con unas cotas de error dadas por $\varepsilon_a = 10^{-14}$ y $\varepsilon_r = 10^{-12}$.

**3)** Resolver el siguiente problema de contorno con la máxima precisión que puedas

$$\begin{cases} y''(t) = y(t) \operatorname{sen}(z(t)) \\ z'(t) = \cos(y(t) + z(t)) \quad t \in [0, 2\pi] \\ y(0) = -1, \ y'(0) = 1, \ z(2\pi) = \pi. \end{cases}$$

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

6 de Febrero de 2014

**1)** Dada la función $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \exp\left(\frac{x}{2}\right)$, determinar el polinomio de interpolación de Hermite que satisface $p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i)$, con $x_i = \dfrac{\pi i}{2}$, $i = 0, 1, 2$ y $j = 0, 1$. Hallar una cota del error de interpolación.

**2)** Hallar $x$ con la máxima precisión que puedas de forma que $\det(A(x)) = 1$, donde

$$A(x) = \begin{pmatrix} x & 2 & -3 & 5 & 0 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & x & 0 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2x & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & x^4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cos x & x \end{pmatrix}$$

**3)** Calcular con la máxima precisión que puedas todas las raíces del polinomio

$$p(x) = 2x^8 + 9x^7 + 23x^6 + 38x^5 + 45x^4 + 38x^3 + 23x^2 + 9x + 2.$$

**4)** Utiliza el método Runge-Kutta-Fehlberg descrito abajo para resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y''(t) = \operatorname{sen}(y(t)) + ty(t) + z(t) \\ z'(t) \; = \operatorname{sen}(y(t) + z(t)) + 0.1w(t), \quad t \in [0, \pi] \\ w'(t) = 2\cos(y(t) + z(t) + w(t)) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ z(0) = 0,\ w(0) = 1. \end{cases}$$

Tomar $\epsilon_a = 10^{-12}$ y $\epsilon_r = 10^{-10}$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | |
| 2/9 | 2/9 | | | | | |
| 1/3 | 1/12 | 1/4 | | | | |
| 3/4 | 69/128 | -243/128 | 135/64 | | | |
| 1 | -17/12 | 27/4 | -27/5 | 16/15 | | |
| 5/6 | 65/432 | -5/16 | 13/16 | 4/27 | 5/144 | |
| orden 5 | 47/450 | 0 | 12/25 | 32/225 | 1/30 | 6/25 |
| Estimadores | 1/150 | 0 | -3/100 | 16/75 | 1/20 | -6/25 |

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

10 de Septiembre de 2014

**1)** Hallar el polinomio de grado menor o igual a 20 mejor aproximación en el sentido de mínimos cuadrados de la función de $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(\mathrm{e}^x)$, tomando como datos los valores de $f$ en los nodos $x_j = jh$, $j = 0, \ldots, 100$ y $h = 0.02$.

**2)** Calcular el valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} \operatorname{sen}(1 + x)\, dx$ con un error absoluto inferior a $10^{-12}$.

**3)** Resolver el siguiente problema con la máxima precisión que te permita tu ordenador

$$\left\{\begin{array}{ll} y''(t) = \operatorname{sen}(y(t)) + 0.01ty(t) + 0.1z(t) & \\ z'(t) = \operatorname{sen}(y(t) + z(t)) + w(t) & \\ w'(t) = \cos(y(t) + z(t) + w(t)) & t \in [0, \pi] \\ y(0) = 0,\ z(0) = 0,\ w(0) = 1 & \\ y(\pi) + z(\pi) + w(\pi) = 0 & \end{array}\right.$$

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

9 de Diciembre de 2014

**1)** Dada la función $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$, y los nodos $x_0 = 0$, $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$ y $x_2 = \pi$, determinar el polinomio de interpolación de Hermite que satisface

$$p(x_i) = f(x_i) \;\text{ y }\; p'(x_i) = f'(x_i), \quad 0 \leq i \leq 2.$$

Hallar una cota del error de interpolación en el intervalo $[0, \pi]$.

*NOTA:* Podéis serviros de las funciones Matlab polyval, polyder, roots y conv.

**2)** Calcular el valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_0^1 \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) dx$ con un error absoluto inferior a $\varepsilon_a = 10^{-14}$.

**3)** Resolver el siguiente problema de contorno con la máxima precisión que puedas

$$\begin{cases} y''(t) = \operatorname{sen}(y(t) + z(t)) \\ z'(t) = \dfrac{z(t)}{1 + y^2(t)} \qquad t \in [0, 2\pi] \\ y(0) = 0,\; z(0) = 1,\; y(2\pi) = z(2\pi). \end{cases}$$

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

6 de Febrero de 2015

**1)** Dada la función $f : [-\pi, +\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}$, calcula el polinomio de grado 20 mejor aproximación en el sentido de mínimos cuadrados de la función $f$ tomando como datos los pares de puntos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{100}$, estando los nodos $\{x_i\}_{i=0}^{100}$ uniformemente espaciados en el intervalo $[-\pi, +\pi]$, con $x_0 = -\pi$ y $x_{100} = +\pi$, y siendo $y_i = f(x_i)$ para $i = 0, 1 \ldots, 100$.

**2)** Calcula los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $f(x) = (x^2 + \mathrm{e}^{-x}) \operatorname{sen} x$ situados en el intervalo $[-\pi, +\pi]$.

**3)** Utilizar el método Runge-Kutta-Fehlberg descrito abajo para resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{ll} y''(t) = t \operatorname{sen}(y(t) + z(t)) & \\ z'(t) = \dfrac{t z(t)}{1 + t + y^2(t)} & t \in [0, 2\pi] \\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1,\ z(0) = 1. & \end{array} \right.$$

Tomar $\epsilon_a = 10^{-10}$ y $\epsilon_r = 10^{-8}$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | |
| 2/9 | 2/9 | | | | | |
| 1/3 | 1/12 | 1/4 | | | | |
| 3/4 | 69/128 | -243/128 | 135/64 | | | |
| 1 | -17/12 | 27/4 | -27/5 | 16/15 | | |
| 5/6 | 65/432 | -5/16 | 13/16 | 4/27 | 5/144 | |
| orden 5 | 47/450 | 0 | 12/25 | 32/225 | 1/30 | 6/25 |
| Estimadores | 1/150 | 0 | -3/100 | 16/75 | 1/20 | -6/25 |

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA (Cálculo Numérico)

EXAMEN

10 de Septiembre de 2015

**1)** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x & 2 & -3 & 5 & 0 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & x & 0 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2x & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & x^3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cos x & -x \end{pmatrix}$$

determinar un valor de $x$ tal que $-2$ sea un valor propio de $A$.

**2)** La función Gamma se define en la forma siguiente

$$\Gamma : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, dt.$$

Calcular el valor de $\Gamma(4.35)$ con un error absoluto inferior a $10^{-12}$. (Sugerencia: Usad la desigualdad $t^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \leq \alpha^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}}$ para todo $t \geq 2\alpha$, para deducir que $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \leq (x-1)^{x-1}\mathrm{e}^{-\frac{x-1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$ si $t \geq 2(x-1)$.)

**3)** Utiliza el método Runge-Kutta-Fehlberg descrito abajo para resolver la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y^{(4)}(t) + y^{(3)}(t) + 2ty''(t) - y'(t) = \mathrm{sen}(ty(t)) + 1 \quad t \in [0, \pi], \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = -1. \end{cases}$$

Tomar $\epsilon_a = 10^{-12}$ y $\epsilon_r = 10^{-10}$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | |
| 2/9 | 2/9 | | | | | |
| 1/3 | 1/12 | 1/4 | | | | |
| 3/4 | 69/128 | -243/128 | 135/64 | | | |
| 1 | -17/12 | 27/4 | -27/5 | 16/15 | | |
| 5/6 | 65/432 | -5/16 | 13/16 | 4/27 | 5/144 | |
| orden 5 | 47/450 | 0 | 12/25 | 32/225 | 1/30 | 6/25 |
| Estimadores | 1/150 | 0 | -3/100 | 16/75 | 1/20 | -6/25 |

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
## (Cálculo Numérico)

EXAMEN

30 de Noviembre de 2015

**1)** Para cada $n \geq 0$ se considera la integral

$$I_n = \int_0^1 x^n \operatorname{sen} \pi x \, dx.$$

Sabiendo que

$$\begin{cases} I_0 = \dfrac{2}{\pi},\ I_1 = \dfrac{1}{\pi}, \\ I_{n+2} = \dfrac{1}{\pi}\Big[1 - \dfrac{(n+2)(n+1)}{\pi} I_n\Big] \quad n \geq 0, \end{cases}$$

usar esta recurrencia para hallar $I_{30}$ e $I_{31}$. ¿Son los resultados aproximaciones satisfactorias de la integral? Explica los resultados y propón una alternativa eficiente para calcular $I_{30}$ e $I_{31}$. Obtén los valores de $I_{30}$ e $I_{31}$ por este nuevo procedimiento.

**2)** Calcular el valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^7+1}$ con un error absoluto inferior a $\varepsilon_a = 10^{-12}$.

**3)** Utilizar el método Runge-Kutta-Fehlberg descrito abajo para resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y''(t) = -0.65y(t) + 0.1z(t) - 0.5w(t) \\ z''(t) = \operatorname{sen}(t)z'(t) - 0.1w(t) \\ w''(t) = \cos(w(t)) + 0.1y(t) \qquad t \in [0, 12\pi] \\ y(0) = 10,\ z(0) = 1,\ w(0) = 1, \\ y'(0) = 0,\ z'(0) = 0,\ w'(0) = 0. \end{cases}$$

Tomar $\epsilon_a = 10^{-12}$ y $\epsilon_r = 10^{-10}$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | |
| 2/9 | 2/9 | | | | | |
| 1/3 | 1/12 | 1/4 | | | | |
| 3/4 | 69/128 | -243/128 | 135/64 | | | |
| 1 | -17/12 | 27/4 | -27/5 | 16/15 | | |
| 5/6 | 65/432 | -5/16 | 13/16 | 4/27 | 5/144 | |
| orden 5 | 47/450 | 0 | 12/25 | 32/225 | 1/30 | 6/25 |
| Estimadores | 1/150 | 0 | -3/100 | 16/75 | 1/20 | -6/25 |

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

5 de Febrero de 2016

**1)** Hallar el polinomio $p(x)$ de grado menor o igual a 10 mejor aproximación en el sentido de mínimos cuadrados de la función de $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen}^3(1+x)$, tomando como datos los valores de $f$ en los nodos $x_j = jh$, $j = 0, \ldots, 100$ y $h = 0.01$. Calcular $\displaystyle\int_0^1 p(x)\,dx$.

**2)** Calcular el valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x \operatorname{sen}^3(1+x)\,dx$ con un error absoluto inferior a $10^{-14}$. Dar una estimación del error cometido en la aproximación de la integral obtenida en el ejercicio anterior. Justificar la validez de dicha estimación.

**3)** Resolver el siguiente problema de contorno con la máxima precisión que puedas

$$
\begin{cases}
y''(t) = -0.65y(t) + 0.1z(t) - 0.5w(t) \\
z''(t) = \operatorname{sen}(t)z'(t) - 0.1w(t) \qquad\qquad t \in [0, 2\pi] \\
w''(t) = \cos(w(t)) + 0.1y(t) \\
y(0) = 10,\ z(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ z'(0) = 0,\ w'(0) = 0 \\
y(2\pi) + z(2\pi) + w(2\pi) = 10
\end{cases}
$$

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

9 de Septiembre de 2016

**1)** Dada la función $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen} x$, determina los polinomios de grado 10 que resuelven los siguientes problemas de interpolación

(i) $p(x_i) = f(x_i)$, $x_i = \dfrac{\pi i}{10}$, $0 \leq i \leq 10$.

(ii) $p(x_i) = f(x_i)$, $0 \leq i \leq 10$, donde $\{x_i\}_{i=0}^{10}$ denotan los nodos de Chebyshev en el intervalo $[0, \pi]$.

Calcula una cota del error de interpolación en cada uno de los casos.

*NOTA:* Puedes servirte de las funciones Matlab roots y conv. La primera calcula las raíces de un polinomio y la segunda calcula el producto de dos polinomios.

**2)** Calcula el valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x^2} \operatorname{sen} x}{x}\, dx$ con un error absoluto inferior a $10^{-15}$.

**3)** Utiliza el método Runge-Kutta-Fehlberg descrito abajo para resolver la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y''(t) = -0.65y(t) + 0.1z(t) - 0.5w(t) \\ z''(t) = \operatorname{sen}(t)z'(t) - 0.1w(t) \qquad\qquad t \in [0, 2\pi] \\ w''(t) = \cos(w(t)) + 0.1y(t) \\ y(0) = 10,\ z(0) = 1,\ w(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ z'(0) = 0,\ w'(0) = 0. \end{cases}$$

Tomar $\epsilon_a = 10^{-12}$ y $\epsilon_r = 10^{-10}$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | |
| 2/9 | 2/9 | | | | | |
| 1/3 | 1/12 | 1/4 | | | | |
| 3/4 | 69/128 | -243/128 | 135/64 | | | |
| 1 | -17/12 | 27/4 | -27/5 | 16/15 | | |
| 5/6 | 65/432 | -5/16 | 13/16 | 4/27 | 5/144 | |
| orden 5 | 47/450 | 0 | 12/25 | 32/225 | 1/30 | 6/25 |
| Estimadores | 1/150 | 0 | -3/100 | 16/75 | 1/20 | -6/25 |

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

28 de Noviembre de 2016

**1)** Calcular todas las raices del polinomio $p(x) = 72x^8 - 228x^7 + 50x^6 - 51x^5 + 417x^4 + 286x^3 + 324x^2 + 105x + 49$ con la máxima precisión que te permita tu ordenador.

**2)** Calcular el valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x^3} \log x \, dx$ con un error absoluto inferior a $\varepsilon_a = 10^{-12}$.

**3)** Utilizar el método Runge-Kutta-Fehlberg descrito abajo para resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y''(t) = -0.65y(t) + 0.1z(t) - 0.5w(t) \\ z''(t) = \operatorname{sen}(t)z'(t) - 0.1w(t) \\ w''(t) = \cos(w(t)) + 0.1y(t) \qquad t \in [0, 12\pi] \\ y(0) = 10,\ z(0) = 1,\ w(0) = 1, \\ y'(0) = 0,\ z'(0) = 0,\ w'(0) = 0. \end{cases}$$

Tomar $\epsilon_a = 10^{-12}$ y $\epsilon_r = 10^{-10}$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | |
| 2/9 | 2/9 | | | | | |
| 1/3 | 1/12 | 1/4 | | | | |
| 3/4 | 69/128 | -243/128 | 135/64 | | | |
| 1 | -17/12 | 27/4 | -27/5 | 16/15 | | |
| 5/6 | 65/432 | -5/16 | 13/16 | 4/27 | 5/144 | |
| orden 5 | 47/450 | 0 | 12/25 | 32/225 | 1/30 | 6/25 |
| Estimadores | 1/150 | 0 | -3/100 | 16/75 | 1/20 | -6/25 |

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

23 de Enero de 2017

**1)** Dada la función $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{sen}(\pi x)$, determinar los polinomios de grado 10 que resuelven los siguientes problemas de interpolación

(i) $p(x_i)=f(x_i)$, $x_i=\dfrac{i}{10}$, $0\le i\le 10$.

(ii) $p(x_i)=f(x_i)$, $0\le i\le 10$, donde $\{x_i\}_{i=0}^{10}$ denotan los nodos de Chebyshev en el intervalo $[0,1]$.

Calcular una cota del error de interpolación en cada uno de los casos.

*NOTA:* Podéis serviros de las funciones Matlab poly, roots, polyder y polyval. La primera función calcula los coeficientes de un polinomio a partir de sus raíces y la segunda calcula las raíces de un polinomio a partir de sus coeficientes.

**2)** Calcular el valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\log(\operatorname{sen}x)\,\mathrm{e}^{2\pi x}\,dx$ con unas cotas de error dadas por $\varepsilon_a=10^{-14}$ y $\varepsilon_r=10^{-12}$.

**3)** Resolver el siguiente problema de contorno con la máxima precisión que puedas

$$\begin{cases} y''(t)=\dfrac{y(t)+z(t)}{1+10t} \\ z'(t)=(1-y'(t))z(t)+\operatorname{sen}t \quad t\in[0,\pi] \\ y(0)=1,\ y'(0)=-1,\ y(\pi)=\pi. \end{cases}$$

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

9 de Septiembre de 2017

**1)** Halla un valor de $x$ con la máxima precisión que puedas de forma que $\det(A(x)) = 1$, donde

$$A(x) = \begin{pmatrix} x & 2 & -3 & 5 & 0 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & x & 0 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2x & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & x^4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cos x & x \end{pmatrix}$$

**2)** Calcula el valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$ con un error absoluto inferior a $10^{-12}$.

**3)** Utiliza el método Runge-Kutta-Fehlberg descrito abajo para resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y''(t) = \operatorname{sen}(y(t)) + ty(t) + z(t) \\ z'(t) \ = \operatorname{sen}(y(t) + z(t)) + 0.1w(t), \quad t \in [0, \pi] \\ w'(t) = 2\cos(y(t) + z(t) + w(t)) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ z(0) = 0,\ w(0) = 1. \end{cases}$$

Tomar $\epsilon_a = 10^{-12}$ y $\epsilon_r = 10^{-10}$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | |
| 2/9 | 2/9 | | | | | |
| 1/3 | 1/12 | 1/4 | | | | |
| 3/4 | 69/128 | -243/128 | 135/64 | | | |
| 1 | -17/12 | 27/4 | -27/5 | 16/15 | | |
| 5/6 | 65/432 | -5/16 | 13/16 | 4/27 | 5/144 | |
| orden 5 | 47/450 | 0 | 12/25 | 32/225 | 1/30 | 6/25 |
| Estimadores | 1/150 | 0 | -3/100 | 16/75 | 1/20 | -6/25 |

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

4 de Diciembre de 2017

**1)** Dada la función $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\log(1+x)$, determina el polinomio de interpolación de Hermite que satisface $p(x_i)=f(x_i)$ y $p'(x_i)=f'(x_i)$ con $x_i=i/5$, $0\le i\le 5$. Halla una cota del error de interpolación.

**2)** Calcula el valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x}\log(\operatorname{sen}x)\,dx$ con un error absoluto inferior a $\varepsilon_a=10^{-14}$.

**3)** Resolver el siguiente problema de contorno con la máxima precisión que puedas

$$\begin{cases} y''(t)=t\operatorname{sen}(z(t))\cos(w(t)) \\ z''(t)=(1+t)\operatorname{sen}(y(t))\cos(w(t)) \quad t\in[0,\pi] \\ w''(t)=y(t)+z(t)+w(t)+t \\ y(0)=-1,\ y'(0)=1,\ z(0)=1,\ z'(0)=-1,\ w(0)=0,\ w(\pi)=0. \end{cases}$$

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

12 de Enero de 2018

**1)** Hallar el polinomio de grado menor o igual a 20 mejor aproximación en el sentido de mínimos cuadrados de la función de $f : [0, 4\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$, tomando como datos los valores de $f$ en los nodos igualmente espaciados $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{100} = 4\pi$.

**2)** Calcula el valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3 + x^2 + 2x}\, dx$ con un error absoluto inferior a $\varepsilon_a = 10^{-14}$.

**3)** Resolver el siguiente problema de contorno con la máxima precisión que puedas

$$\begin{cases} y''(t) + y^3(t) - z(t) = 0 \\ z''(t) - 0.03y^2(t)z(t) - y(t) + t^2 = 0 \quad t \in [0, 2\pi] \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ z(0) = 1,\ y(2\pi) = z(2\pi). \end{cases}$$

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

2 de Febrero de 2018

**1)** Halla todas las soluciones reales y complejas de las siguiente ecuación

$$2x^8 + 6x^7 + 11x^6 + 11x^5 + 6x^4 - x^3 - 4x^2 - 3x - 1 = 0.$$

**2)** Calcula el valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x^2}+x^2\right)} \log(2+x)\,dx$ con un error absoluto inferior a $\varepsilon_a = 10^{-14}$.

**3)** Utiliza el método Runge-Kutta-Fehlberg descrito abajo para resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y''(t) = t\,\mathrm{sen}\,(y(t) + z(t)) & \\ z'(t) = \dfrac{tz(t)}{1+t+y^2(t)} & t \in [0, 2\pi] \\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1,\ z(0) = 1. & \end{cases}$$

Toma $\epsilon_a = 10^{-12}$ y $\epsilon_r = 10^{-10}$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | |
| 2/9 | 2/9 | | | | | |
| 1/3 | 1/12 | 1/4 | | | | |
| 3/4 | 69/128 | -243/128 | 135/64 | | | |
| 1 | -17/12 | 27/4 | -27/5 | 16/15 | | |
| 5/6 | 65/432 | -5/16 | 13/16 | 4/27 | 5/144 | |
| orden 5 | 47/450 | 0 | 12/25 | 32/225 | 1/30 | 6/25 |
| Estimadores | 1/150 | 0 | -3/100 | 16/75 | 1/20 | -6/25 |

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

8 de Septiembre de 2018

**1)** Dada la función $f : [-\pi, +\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}$, calcula el polinomio de grado 20 mejor aproximación en el sentido de mínimos cuadrados de la función $f$ tomando como datos los pares de puntos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{100}$, estando los nodos $\{x_i\}_{i=0}^{100}$ uniformemente espaciados en el intervalo $[-\pi, +\pi]$, con $x_0 = -\pi$ y $x_{100} = +\pi$, y siendo $y_i = f(x_i)$ para $i = 0, 1 \ldots, 100$.

**2)** Calcula el valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2} \operatorname{sen} x}{x^3 + x^2 + 2x}\, dx$ con un error absoluto inferior a $10^{-14}$.

**3)** Resuelve el siguiente problema de contorno con la máxima precisión que puedas

$$\begin{cases} y''(t) = \operatorname{sen}\left(y(t) + z(t)\right) \\ z'(t) = \dfrac{z(t)}{1 + y^2(t)} \qquad\qquad t \in [0, 2\pi] \\ y(0) = 0,\ z(0) = 1,\ y(2\pi) = z(2\pi). \end{cases}$$

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

4 de Diciembre de 2018

**1)** Calcula las raíces del siguiente polinomio

$$\begin{aligned} p(x) &= 9x^8 + 2.9999999x^7 - 50.0000001x^6 - 22.9999995x^5 + 58.0000006x^4 + 56.9999997x^3 \\ &+ 29.9999991x^2 - 45.0000009x + 9 \end{aligned}$$

Para cada raiz comenta tus impresiones sobre la precisión del resultado, velocidad de convergencia y da una explicación de todo ello.

**2)** Calcula el valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x^2} \operatorname{sen} x}{x^3 + x^2 + 2x}\, dx$ con un error absoluto inferior a $\varepsilon_a = 10^{-14}$.

**3)**Utiliza el método Runge-Kutta-Fehlberg descrito abajo para resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y''(t) = t(y(t) + z(t)) \\ z'(t) = 10(1 - y'(t))z(t) + \operatorname{sen} t, \quad t \in [0, 3] \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ z(0) = 1. \end{cases}$$

Tomar $\epsilon_a = 10^{-12}$ y $\epsilon_r = 10^{-10}$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | |
| 2/9 | 2/9 | | | | | |
| 1/3 | 1/12 | 1/4 | | | | |
| 3/4 | 69/128 | -243/128 | 135/64 | | | |
| 1 | -17/12 | 27/4 | -27/5 | 16/15 | | |
| 5/6 | 65/432 | -5/16 | 13/16 | 4/27 | 5/144 | |
| orden 5 | 47/450 | 0 | 12/25 | 32/225 | 1/30 | 6/25 |
| Estimadores | 1/150 | 0 | -3/100 | 16/75 | 1/20 | -6/25 |

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

31 de Enero de 2019

**1)** Se desea tabular la función $f(x) = \cos x$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Para ello se eligen $(n+1)$ puntos uniformemente espaciados $x_j = jh$, con $j = 0, \ldots, n$ y $h = \frac{\pi}{2n}$. Para la determinación de los valores de $f$ en un punto $x$ fuera de la tabla, se utilizará una interpolación cúbica entre los nodos más próximos a $x$. Halla una cota del error de interpolación en términos de $h$. Halla el valor de $n$ si deseamos tener un error inferior a $10^{-6}$.

**2)** Dada la ecuación

$$\log(x^2 - x + 1.25) + 1 = \operatorname{sen}(\pi x),$$

se sabe que $\bar{x} = 0.5$ es la única solución. Aplica el método de Newton para resolver dicha ecuación (sin combinarlo con el método de bisección) comenzando las iteraciones primero en el punto $x_0 = 0$ y luego en $x_0 = 1$. ¿Es la velocidad de convergencia cuadrática en alguno de los dos casos? ¿Converge hacia la solución? Responde razonadamente a estas preguntas explicando lo que sucede.

**3)** Resuelve el siguiente problema de contorno con la máxima precisión que te permita tu ordenador

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(4)}(t) = y''(t) - y^3(t) + 2t \quad t \in [0, \pi] \\ y'(0) = 0, y''(0) = 1, y'''(0) = 0 \\ y(0) = y(\pi). \end{array} \right.$$

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

9 de Septiembre de 2019

**1)** Para cada $n \geq 0$ se considera la integral

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a}\, dx \quad (a > 0).$$

Es sencillo comprobar que

$$\begin{cases} I_0 = \log\left(1 + \frac{1}{a}\right) \\ I_n = \frac{1}{n} - aI_{n-1} \text{ para } n \geq 1. \end{cases}$$

Estudia para qué valores de $a$ el método señalado es estable para el cálculo de las integrales. Sugiere una alternativa estable para los cálculos que lo requieran. Calcula de forma estable $I_{70}$ para $a = 1/2$ y $a = 2$.

**2)** Calcula el valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_0^1 \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) dx$ con un error absoluto inferior a $\varepsilon_a = 10^{-15}$.

**3)**Utiliza el método Runge-Kutta-Fehlberg descrito abajo para resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y''(t) = 2ty(t)\cos(z(t)) \\ z'(t) = \mathrm{e}^{t/5}\,\mathrm{sen}\,(y(t)+z(t)), \quad t \in [0, 26] \\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1,\ z(0) = 1. \end{cases}$$

Tomar $\epsilon_a = 10^{-12}$ y $\epsilon_r = 10^{-10}$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | |
| 2/9 | 2/9 | | | | | |
| 1/3 | 1/12 | 1/4 | | | | |
| 3/4 | 69/128 | -243/128 | 135/64 | | | |
| 1 | -17/12 | 27/4 | -27/5 | 16/15 | | |
| 5/6 | 65/432 | -5/16 | 13/16 | 4/27 | 5/144 | |
| orden 5 | 47/450 | 0 | 12/25 | 32/225 | 1/30 | 6/25 |
| Estimadores | 1/150 | 0 | -3/100 | 16/75 | 1/20 | -6/25 |

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

5 de Diciembre de 2019

**1)** Dada la función $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen} x$, determina los polinomios de grado 10 que resuelven los siguientes problemas de interpolación

(i) $p(x_i) = f(x_i)$, $x_i = \dfrac{\pi i}{10}$, $0 \le i \le 10$.

(ii) $p(x_i) = f(x_i)$, $0 \le i \le 10$, donde $\{x_i\}_{i=0}^{10}$ denotan los nodos de Chebyshev en el intervalo $[0, \pi]$.

Calcula una cota del error de interpolación en cada uno de los casos.

**2)** Calcula el valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x^3} \operatorname{sen}^2 x}{x^3 + 2x^2}\, dx$ con un error absoluto inferior a $\varepsilon_a = 10^{-14}$.

**3)** Utiliza el método Runge-Kutta-Fehlberg descrito abajo para resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y''(t) = 2ty(t)\cos(z(t)) \\ z'(t) = e^{t/5} \operatorname{sen}(y(t) + z(t)), \quad t \in [0, 26] \\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1,\ z(0) = 1. \end{cases}$$

Tomar $\epsilon_a = 10^{-12}$ y $\epsilon_r = 10^{-10}$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | |
| 2/9 | 2/9 | | | | | |
| 1/3 | 1/12 | 1/4 | | | | |
| 3/4 | 69/128 | -243/128 | 135/64 | | | |
| 1 | -17/12 | 27/4 | -27/5 | 16/15 | | |
| 5/6 | 65/432 | -5/16 | 13/16 | 4/27 | 5/144 | |
| orden 5 | 47/450 | 0 | 12/25 | 32/225 | 1/30 | 6/25 |
| Estimadores | 1/150 | 0 | -3/100 | 16/75 | 1/20 | -6/25 |

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

22 de Enero de 2020

**1)** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 14 & 10 & 14 \\ 6 & 1 & 2 & 10 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 1 & 14 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

se sabe que cada uno de sus valores propios es solución de la ecuación $det(A - xI) = 0$, donde $I$ es la matriz identidad $6 \times 6$. Demuestra que al menos hay un valor propio de $A$ en el intervalo $[0, 2]$ y calcúlalo.

**2)** Dada la ecuación

$$\log\left(1 + \operatorname{sen}^3 x + x^2\right) + \mathrm{e}^{x^2} = 1,$$

se sabe que $\bar{x} = 0$ es la única solución. Aplica el método de Newton para resolver dicha ecuación (sin combinarlo con el método de bisección) comenzando las iteraciones primero en el punto $x_0 = -1$ y luego en $x_0 = +1$. ¿Es la velocidad de convergencia cuadrática en alguno de los dos casos? ¿Converge hacia la solución? Responde razonadamente a estas preguntas explicando lo que sucede.

**3)** Calcula el valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x(\mathrm{e}^x + 1)}\, dx$ con un error absoluto inferior a $\varepsilon_a = 10^{-14}$.

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

5 de Septiembre de 2020

**1)** Se desea tabular la función $f(x) = \log(1+x)$ en el intervalo $[0, 10]$. Para ello se eligen $(n+1)$ puntos uniformemente espaciados $x_j = jh$, con $j = 0, \ldots, n$ y $h = \dfrac{10}{n}$. Para la determinación de los valores de $f$ en un punto $x$ fuera de la tabla, se utilizará una interpolación cúbica entre los nodos más próximos a $x$. Halla una cota del error de interpolación en términos de $h$. Halla el valor de $n$ si deseamos tener un error inferior a $10^{-6}$.

**2)** Dada la ecuación

$$\log(x^2 - x + 1.25) + 1 = \operatorname{sen}(\pi x),$$

se sabe que $\bar{x} = 0.5$ es la única solución. Aplica el método de Newton para resolver dicha ecuación (sin combinarlo con el método de bisección) comenzando las iteraciones primero en el punto $x_0 = 0$ y luego en $x_0 = 1$. ¿Es la velocidad de convergencia cuadrática en alguno de los dos casos? ¿Converge hacia la solución? Responde razonadamente a estas preguntas explicando lo que sucede.

**3)** Utiliza el método Runge-Kutta-Fehlberg descrito abajo para resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y''(t) = t(y(t) + z(t)) \\ z'(t) = 10(1 - y'(t))z(t) + \operatorname{sen} t, \quad t \in [0, 3] \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 0, \ z(0) = 1. \end{cases}$$

Tomar $\epsilon_a = 10^{-12}$ y $\epsilon_r = 10^{-10}$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | |
| 2/9 | 2/9 | | | | | |
| 1/3 | 1/12 | 1/4 | | | | |
| 3/4 | 69/128 | -243/128 | 135/64 | | | |
| 1 | -17/12 | 27/4 | -27/5 | 16/15 | | |
| 5/6 | 65/432 | -5/16 | 13/16 | 4/27 | 5/144 | |
| orden 5 | 47/450 | 0 | 12/25 | 32/225 | 1/30 | 6/25 |
| Estimadores | 1/150 | 0 | -3/100 | 16/75 | 1/20 | -6/25 |

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

16 de Diciembre de 2020

**1)** Dada la función $f : [0, 10] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log(1 + x)$, determina los polinomios de grado 20 que resuelven los siguientes problemas de interpolación:

(i) $p(x_i) = f(x_i)$, $x_i = \dfrac{i}{2}$, $0 \leq i \leq 20$.

(ii) $p(x_i) = f(x_i)$, $0 \leq i \leq 20$, donde $\{x_i\}_{i=0}^{20}$ denotan los nodos de Chebyshev en el intervalo $[0, 10]$.

Escribe todos los coeficientes del polinomio y el coeficiente del término de grado 5.

**2)** Calcula el valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{sen}\,(2x)}{\log(1+x)}\,dx$ con un error absoluto inferior a $10^{-14}$.

**3)** Resolver el siguiente problema con la máxima precisión que te permita tu ordenador

$$\left\{\begin{array}{ll} y''(t) = \mathrm{sen}\,(y(t)) + 0.01ty(t) + 0.1z(t) & \\ z'(t) = \mathrm{sen}\,(y(t) + z(t)) + w(t) & \\ w'(t) = \cos\,(y(t) + z(t) + w(t)) & t \in [0, \pi] \\ y(0) = 0,\ z(0) = 0,\ w(0) = 1 & \\ y(\pi) + z(\pi) + w(\pi) = 0 & \end{array}\right.$$

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA (Cálculo Numérico)

EXAMEN

26 de Enero de 2021

**1)** Calcula todas las raíces del polinomio

$$\begin{aligned} p(x) &= 9x^8 + 2.9999999x^7 - 50.0000001x^6 - 22.9999995x^5 + 58.0000006x^4 + 56.9999997x^3 \\ &+ 29.9999991x^2 - 45.0000009x + 9 \end{aligned}$$

Para cada raíz comenta tus impresiones sobre la precisión del resultado, velocidad de convergencia y da una explicación de todo ello.

**2)** Dada la función $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2} \operatorname{sen} x}{x^3 + x^2 + 1},$$

calcula el polinomio $p$ de grado 25 mejor aproximación de $f$ en el sentido de mínimos cuadrados, tomando como datos los pares de puntos $(x_j, f(x_j))$ con $x_j = jh$ $(0 \leq j \leq 300)$ y $h = \pi/150$. Utiliza $p$ para calcular la aproximación de la integral de $f$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-x^2} \operatorname{sen} x}{x^3 + x^2 + 1}\, dx \approx \int_0^{2\pi} p(x)\, dx.$$

**3)** Utiliza el método Runge-Kutta-Fehlberg descrito abajo para resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y''(t) = \operatorname{sen}(2\pi y(t)) + \cos(z(t)) \\ z'(t) = \operatorname{sen}(y(t) + z(t)) + w(t) \\ w'(t) = \cos(y(t) + z(t) + w(t)) \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ z(0) = 0,\ w(0) = 1 \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]$$

Tomar $\epsilon_a = 10^{-12}$ y $\epsilon_r = 10^{-10}$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | |
| 2/9 | 2/9 | | | | | |
| 1/3 | 1/12 | 1/4 | | | | |
| 3/4 | 69/128 | -243/128 | 135/64 | | | |
| 1 | -17/12 | 27/4 | -27/5 | 16/15 | | |
| 5/6 | 65/432 | -5/16 | 13/16 | 4/27 | 5/144 | |
| orden 5 | 47/450 | 0 | 12/25 | 32/225 | 1/30 | 6/25 |
| Estimadores | 1/150 | 0 | -3/100 | 16/75 | 1/20 | -6/25 |

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

16 de Febrero de 2021

**1)** Para cada $n \geq 0$ se considera la integral

$$I_n = \int_0^1 x^n \operatorname{sen} \pi x \, dx.$$

Las siguientes identidades son conocidas

$$\begin{cases} I_0 = \dfrac{2}{\pi},\ I_1 = \dfrac{1}{\pi}, \\ I_{n+2} = \dfrac{1}{\pi}\Big[1 - \dfrac{(n+2)(n+1)}{\pi} I_n\Big] \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Hallar $I_{30}$ e $I_{31}$ mediante el algoritmo anterior. ¿Son los resultados aproximaciones satisfactorias de la integral? ¿Es el algoritmo estable? Si consideras que el algoritmo no es estable, sugiere un algoritmo estable alternativo para calcular $I_{30}$ e $I_{31}$. Todas las respuestas deben ser justificadas.

**2)** Calcula el valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x^2}+x^2\right)} \log(2+x)\, dx$ con un error absoluto inferior a $\varepsilon_a = 10^{-14}$.

**3)** Halla un valor de $x$ con la máxima precisión que puedas de forma que $\det(A) = 1$, donde

$$A = \begin{pmatrix} x & 2 & -3 & 5 & 0 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & x & 0 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2x & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & x^4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cos x & x \end{pmatrix}$$

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA (Cálculo Numérico)

EXAMEN

17 de Noviembre de 2022

**1)** Dada la función $f:[0,+\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x}{1+x^2}$, calcula el polinomio $p$ de grado 20 mejor aproximación en el sentido de mínimos cuadrados de la función $f$ tomando como datos los pares de puntos $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^{100}$, estando los nodos $\{x_i\}_{i=0}^{100}$ uniformemente espaciados en el intervalo $[0,+\pi]$, con $x_0=0$ y $x_{100}=+\pi$, y siendo $y_i=f(x_i)$ para $i=0,1\ldots,100$. Aproxima el valor de la integral $\int_0^\pi f(x)\,dx$ por $\int_0^\pi p(x)\,dx$.

**2)** Calcula la integral

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x^2}\operatorname{sen}x}{x^3+4x}\,dx$$

con un error absoluto inferior a $10^{-12}$.

**3)** De los tableros de Butcher descritos abajo hay uno que es el más adecuado para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y''(t)=\operatorname{sen}(2\pi y(t))+\cos(z(t)) \\ z'(t)\ =\operatorname{sen}(y(t)+z(t))+w(t) \\ w'(t)=\cos(y(t)+z(t)+w(t)) \\ y(0)=1,\ y'(0)=0,\ z(0)=0,\ w(0)=1 \end{cases} \qquad t\in[0,\frac{\pi}{2}]$$

Resuelve el sistema tomando $\epsilon_a=10^{-12}$ y $\epsilon_r=10^{-10}$. Justifica la elección que has efectuado del tablero.

$$\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & & & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & & & & \\
\frac{3}{4} & \frac{69}{128} & -\frac{243}{128} & \frac{135}{64} & & & \\
1 & -\frac{17}{12} & \frac{27}{4} & -\frac{27}{5} & \frac{16}{15} & & \\
\frac{5}{6} & \frac{65}{432} & -\frac{5}{16} & \frac{13}{16} & \frac{4}{27} & \frac{5}{144} & \\
\hline
\text{Orden 5} & \frac{47}{450} & 0 & \frac{12}{25} & \frac{32}{225} & \frac{1}{30} & 1 \\
\text{Estimadores} & \frac{1}{150} & 0 & -\frac{3}{100} & \frac{16}{75} & \frac{1}{20} & -\frac{6}{25}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccccc}
0 & & & & & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & & & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & \\
\frac{13}{20} & \frac{13}{200} & -\frac{299}{1000} & \frac{78}{125} & \frac{13}{50} & & & \\
\frac{4}{5} & \frac{548}{7475} & \frac{688}{2875} & \frac{572}{2875} & -\frac{88}{575} & \frac{132}{299} & & \\
1 & \frac{37}{312} & 0 & \frac{4}{33} & \frac{8}{9} & -\frac{100}{117} & \frac{575}{792} & \\
\hline
\text{Orden 6} & \frac{41}{520} & 0 & \frac{58}{165} & \frac{16}{135} & \frac{50}{351} & \frac{575}{2376} & \frac{1}{15} \\
\text{Estimadores} & -\frac{31}{780} & 0 & \frac{38}{165} & -\frac{104}{135} & \frac{350}{351} & -\frac{575}{1188} & \frac{1}{15}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & & \\
\frac{3}{8} & \frac{3}{32} & \frac{9}{32} & & & & \\
\frac{12}{13} & \frac{1932}{2197} & -\frac{7200}{2197} & \frac{7296}{2197} & & & \\
1 & \frac{439}{216} & -8 & \frac{3680}{513} & -\frac{845}{4104} & & \\
\frac{1}{2} & -\frac{8}{27} & 2 & -\frac{3544}{2565} & \frac{1859}{4104} & -\frac{11}{40} & \\
\hline
\text{Orden 5} & \frac{16}{135} & 0 & \frac{6656}{12825} & \frac{28561}{56430} & -\frac{9}{50} & \frac{2}{55} \\
\text{Estimadores} & -\frac{1}{360} & 0 & \frac{128}{4275} & \frac{2197}{75240} & -\frac{1}{50} & -\frac{2}{55}
\end{array}
$$

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

22 de Diciembre de 2022

**1)** Para cada entero $n \geq 0$ se consideran las integrales

$$I_n = \int_0^1 x^n \cos \pi x \, dx \quad \text{y} \quad J_n = \int_0^\pi e^{-x} \operatorname{sen}^n x \, dx.$$

Se sabe que

$$\begin{cases} I_0 = 0, \quad I_1 = -\dfrac{2}{\pi^2}, \\ I_{n+1} = -\dfrac{n+1}{\pi^2}(1 + nI_{n-1}), \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} J_0 = 1 - \mathrm{e}^{-\pi}, \quad J_1 = \dfrac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^{-\pi}), \\ J_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{(n+1)^2 + 1} J_{n-1}. \end{cases}$$

Calcula $I_{31}, I_{32}, J_{31}$ y $J_{32}$ usando las igualdades anteriores. ¿Son los algoritmos usados numéricamente estables? Si alguno no lo es, utiliza una alternativa para un cálculo correcto. Explica los resultados.

**2)** Se desea tabular la función $f(x) = \cos x$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Para ello se eligen $(n+1)$ puntos uniformemente espaciados $x_j = jh$, con $j = 0, \ldots, n$ y $h = \dfrac{\pi}{2n}$. Para la determinación de los valores de $f$ en un punto $x$ fuera de la tabla, se utilizará una interpolación cúbica entre los nodos más próximos a $x$. Halla una cota del error de interpolación en términos de $h$. Halla el valor de $n$ si deseamos tener un error inferior a $10^{-6}$. Construye la tabla $[x,\ f(x)]$, donde $x$ es el vector de los nodos, y utilizando esta tabla aproxima el valor de $\cos(1)$.

**3)** Resuelve el siguiente problema con la máxima precisión que te permita el ordenador

$$\begin{cases} x''(t) = \mathrm{e}^t m(t)(x(t) + y(t) + z(t)) + \operatorname{sen} t \\ y''(t) = \mathrm{e}^t m(t)(x(t) + y(t) + z(t)) + \cos t \\ z''(t) = m(t)z(t) + t + 1 \qquad\qquad t \in [0, 2\pi] \\ m'(t) = 0.001(x'(t) + y'(t) + z'(t)) - \frac{1}{2} \\ x(0) = x(2\pi), x'(0) = 0, y(0) = 2, y'(0) = -1, z(0) = 3, z'(0) = 0, m(0) = -1 \end{cases}$$

Haz un plot de la función $z$. En la resolución de la ecuación diferencial con condiciones iniciales toma $\varepsilon_a = 10^{-14}$ y $\varepsilon_r = 10^{-12}$.

**NOTA:** Todos los problemas poseen la misma puntuación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA INGENIERÍA
# (Cálculo Numérico)

EXAMEN

2 de Febrero de 2023

**1)** Dada la función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(\pi x)$, calcula el polinomio solución del siguiente problema de interpolación de Hermite:

$$p(x_i) = f(x_i) \quad \text{y} \quad p'(x_i) = f'(x_i) \quad i = 0,1,2,3,4,$$

donde $\{x_i\}_{i=0}^{4}$ son los nodos $\{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$. Escribe los coeficientes del polinomio e indica cuál es el coeficiente de $x^2$. Halla una cota del error de interpolación.

**2)** Dada la ecuación $\cos^4(x) + \sin^2(x) = \frac{3}{4}$, se sabe que $\bar{x} = \frac{\pi}{4}$ es la única solución positiva en el intervalo $[0,1]$. Aplica el método de Newton para resolver dicha ecuación (sin combinarlo con el método de bisección) comenzando las iteraciones primero en el punto $x_0 = 0.1$ y luego en $x_0 = 0.9$. ¿Es la velocidad de convergencia cuadrática en alguno de los dos casos? ¿Converge hacia la solución? Responde razonadamente a estas preguntas explicando lo que sucede.

**3)** Dados los dos métodos Runge-Kutta definidos por los tableros de Butcher

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{2}{7} & \frac{2}{7} & & & \\
\frac{4}{7} & -\frac{8}{35} & \frac{4}{5} & & \\
\frac{6}{7} & \frac{29}{42} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} & \\
\hline
\text{Orden p} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{1}{4}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
\frac{2}{7} & \frac{2}{7} & & & & \\
\frac{4}{7} & -\frac{8}{35} & \frac{4}{5} & & & \\
\frac{6}{7} & \frac{29}{42} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} & & \\
1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \\
\hline
\text{Orden q} & \frac{11}{96} & \frac{7}{24} & \frac{35}{96} & \frac{7}{48} & \frac{1}{12}
\end{array}$$

determinar los órdenes $p$ y $q$ de cada uno de los métodos. Definiendo los estimadores

$$\left( \frac{5}{96} \quad -\frac{1}{8} \quad \frac{5}{96} \quad \frac{5}{48} \quad -\frac{1}{12} \right) = \left( \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{1}{4} \quad 0 \right) - \left( \frac{11}{96} \quad \frac{7}{24} \quad \frac{35}{96} \quad \frac{7}{48} \quad \frac{1}{12} \right),$$

utilizar el par de métodos Runge-Kutta encajados

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
\frac{2}{7} & \frac{2}{7} & & & & \\
\frac{4}{7} & -\frac{8}{35} & \frac{4}{5} & & & \\
\frac{6}{7} & \frac{29}{42} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} & & \\
1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \\
\hline
\text{Orden q} & \frac{11}{96} & \frac{7}{24} & \frac{35}{96} & \frac{7}{48} & \frac{1}{12} \\
\text{Estimadores} & \frac{5}{96} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{96} & \frac{5}{48} & -\frac{1}{12}
\end{array}$$

para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases}
y''(t) = t(y(t) + z(t)) \\
z'(t) = 10(1 - y'(t))z(t) + \operatorname{sen} t, \quad t \in [0,3] \\
y(0) = 1, \; y'(0) = 0, \; z(0) = 1,
\end{cases}$$

tomando $\varepsilon_a = 10^{-10}$ y $\varepsilon_r = 10^{-8}$. Haz un plot de la función $z$.