Vectores, rectas y planos

Ruth Carballo Fidalgo
Dpto. de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación
Universidad de Cantabria
carballor@unican.es

Enero 2019

Contenidos

Lección 1

El cuerpo de los números reales $(\mathbb{R}, +, \times)$

En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales están definidas dos operaciones básicas que son la suma y la multiplicación. Ambas son operaciones internas en $\mathbb{R}$, porque en cada una de ellas se opera entre dos elementos de $\mathbb{R}$. Ambas son cerradas ya que el resultado es también elemento de $\mathbb{R}$, es decir, un número real.

El conjunto $\mathbb{R}$ con esas dos operaciones internas y cerradas tiene estructura de **cuerpo** al verificarse las siguientes propiedades:

<u>Para la suma:</u>

1) Asociativa: $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R},\ (a+b)+c = a+(b+c)$

2) Conmutativa: $\forall\ a, b \in \mathbb{R},\ a+b = b+a$

3) Existencia de elemento neutro: $\exists!\ \ e \in \mathbb{R}\ /\ a+e = e+a = a \quad \forall\ a \in \mathbb{R}$

   $e = 0 \in \mathbb{R}$

4) Existencia de elemento simétrico:

   $\forall a \in \mathbb{R} \qquad \exists! s \in \mathbb{R}\ /\ a+s = s+a = e$

   Para el opuesto de a se utiliza la notación $s = -a \in \mathbb{R}$.

De forma general, el elemento simétrico para una operación que se denomine suma se designa como elemento opuesto.

<u>Para el producto o multiplicación:</u>

1) Asociativa: $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R},\ (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

2) Existencia de elemento neutro: $\exists!\ \ e \in \mathbb{R}\ /\ a \times e = e \times a = a \quad \forall\ a \in \mathbb{R}$

   $e = 1 \in \mathbb{R}$

3) Existencia de elemento simétrico excepto para el elemento neutro de la suma

   $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\} \qquad \exists!\ s \in \mathbb{R}\ /\ a \times s = e$, siendo e el elemento neutro del producto.

De forma general, al elemento simétrico de una operación que se denomine producto o multiplicación se le conoce también como elemento inverso. Efectivamente es obvio que el simétrico del real a respecto del producto es $1/a$, de forma que $a \times 1/a = 1$.

4) Integridad: $a \times b = 0 \Rightarrow a = 0$ o $b = 0$

<u>Para las dos operaciones combinadas:</u>

Distributiva del procto respecto de la suma, tanto por la izquierda como por la derecha:

$a \times (b+c) = a \times b + a \times c$

$(a+b) \times c = a \times c + b \times c$

El cuerpo de los números reales con estas dos operaciones se denota como $(\mathbb{R},+,\times)$.

Se dice que $(\mathbb{R},+,\times)$ es un cuerpo abeliano ya que la segunda operación cumple además la propiedad conmutativa.

En todo conjunto $\mathbb{K}$ de elementos con estructura de cuerpo para las operaciones de suma y producto al elemento neutro de la suma se le denomina elemento cero y al elemento neutro de la multiplicación elemento unidad.

Por tanto en $(\mathbb{R},+,\times)$ $\quad 0 \in \mathbb{R}$ es el elemento cero y $1 \in \mathbb{R}$ es el elemento unidad.

Ejercicio 1.1. *En el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos, con las operaciones internas de suma y producto que conoces, justifica que $(\mathbb{C},+,\times)$ tiene estructura de cuerpo abeliano, basándote en que $(\mathbb{R},+,\times)$ lo es. Escribe en las cajas al final de esta página el elemento cero y el elemento unidad del cuerpo $\mathbb{C}$.*

Elemento cero	*Elemento unidad*

Ejercicio 1.2. *Demuestra que el conjunto de los números racionales Q, con la suma y la multiplicación habituales tiene estructura de cuerpo.*

Definición de escalar

Tienen especial interés en esta asignatura el cuerpo de los números reales y el cuerpo de los números complejos. Cuando se trabaja de forma general con uno de estos cuerpos se utiliza la notación $(\mathbb{K},+,\times)$, es decir, al conjunto subyacente o conjunto portador lo denotamos como $\mathbb{K}$, sabiendo que puede ser el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ o el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$. Nótese además que $\mathbb{R}$ puede considerarse como un subconjunto de $\mathbb{C}$, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (sus elementos con parte imaginaria nula).

Otra definición importante es la de escalar. Los elementos de un cuerpo reciben el nombre de escalares. Así es común referirse a los números reales y a los números complejos como escalares. En el primer caso son los escalares del cuerpo $\mathbb{R}$ y en el segundo los escalares del cuerpo $\mathbb{K}$.

Textos en lengua inglesa:

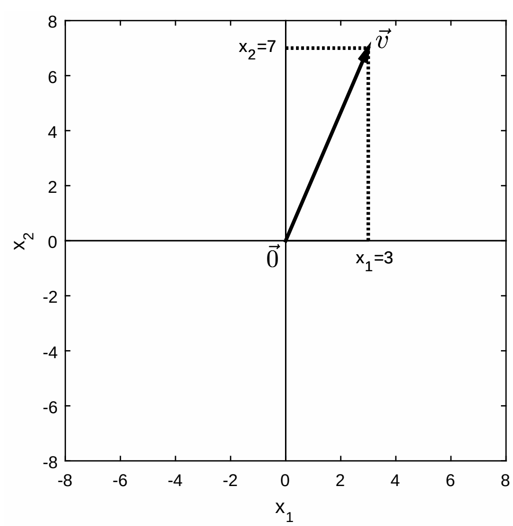
En inglés la estructura algebraica de cuerpo se conoce como field. Además se usa con frecuencia el nombre de inverso tanto para el simétrico de la suma como para el simétrico de la multiplicación, distinguiéndolos como additive inverse y multiplicative inverse.

Lección 2

Vectores de $\mathbb{R}^2$

2.1 El plano y el conjunto $\mathbb{R}^2$

Al punto $P = (3, 7)$, es decir, al punto P con coordenadas $x = 3$, $y = 7$[1], le asignamos el vector $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$. El vector es una matriz columna, con dos entradas ordenadas. La primera es la coordenada x del punto, y la segunda la coordenada y. $\vec{v}$ representa lo que en Física se conoce como **vector de posición** del punto P.



Considerar todos los puntos (x, y) del plano equivale a considerar todas las matrices columna de dos entradas $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, con $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

Ese conjunto de matrices columna 2×1 (dos filas y una columna), o vectores de dos componentes, es lo que se conoce como $\mathbb{R}^2$. La relación biunívoca entre puntos y vectores que hemos establecido permite identificar el plano XY con $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{R}^2 = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, / x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R} \}$$

Hemos denotado aquí la primera **componente** como x_1 y la segunda como x_2. Cuando usamos

[1]Se están considerando las coordenadas referidas al sistema de referencia cartesiano bidimensional con ejes perpendiculares X e Y que se cortan en el punto $(0, 0)$. Son por tanto las denominadas coordenadas cartesianas, estándar o canónicas.

esta notación al vector genérico lo denominamos $\vec{x}$, es decir, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Obviamente x_1 y x_2 son las coordenadas según los ejes X e Y respectivamente.

Con frecuencia usamos para un vector de $\mathbb{R}^2$ como $\vec{v}$ la notación $\vec{v} = (3, 7)$. Sin embargo en Álgebra utilizaremos en general la notación matricial, porque es en la notación matricial en la que se definen y ejecutan las operaciones.

Entendiendo un vector como un segmento orientado (también denominado segmento dirigido) con un punto inicial u origen y un punto final o extremo, para el vector $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ el origen es el punto $(0, 0)$ y el extremo el punto $P = (3, 7)$. El origen se denota como punto con la letra "o" mayúscula, O, y como vector como $\vec{0}$. Obviamente $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

De forma general, para $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ el origen es el punto $O = (0, 0)$ y el extremo el punto $P = (x_1, x_2)$. Además, el vector admite la notación $\vec{x} = (x_1, x_2)$. Se usa además la notación $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$

2.2 Suma, multiplicación por escalar y combinación lineal en $\mathbb{R}^2$

Suma en $\mathbb{R}^2$

Consideramos en $\mathbb{R}^2$ los elementos $\vec{x}$ y $\vec{x'}$.

$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ con $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $\quad \vec{x'} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$ con $x'_1, x'_2 \in \mathbb{R}$

Suma: $\vec{x} + \vec{x'} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

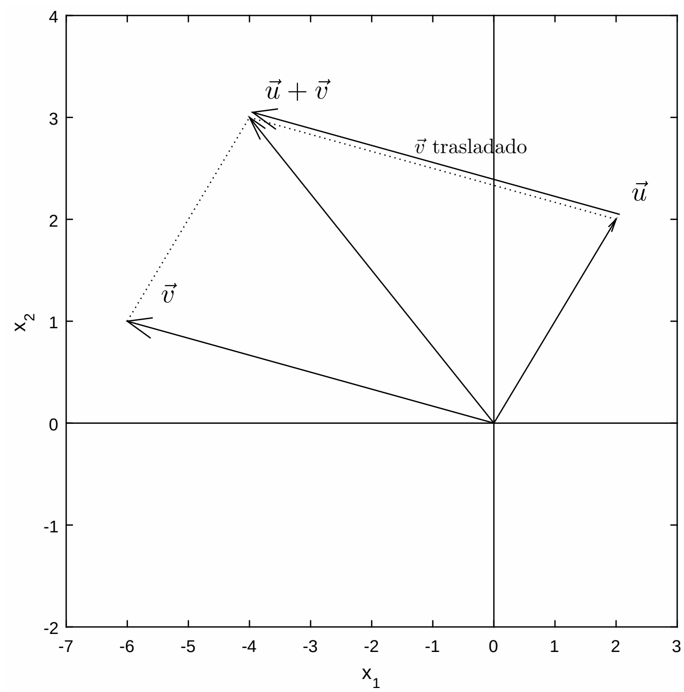
Tal como se define la suma en $\mathbb{R}^2$ vemos que es una operación interna y cerrada.

La suma tiene la siguiente interpretación geométrica: el extremo del vector suma es el cuarto vértice del paralelogramo definido por los tres vértices consecutivos siguientes: el extremo de $\vec{x}$, el punto $(0, 0)$ y el extremo de $\vec{x'}$. O de otra forma, el extremo de $\vec{x} + \vec{x'}$ es el extremo de la diagonal del paralelogramo definido por los vectores $\vec{x}$ y $\vec{x'}$. Obviamente tomando como origen de la diagonal el punto $(0, 0)$.

La suma de vectores se puede entender también como suma de "desplazamientos": para sumar $\vec{v}$ al vector $\vec{u}$, se sitúa el origen de $\vec{v}$ en el extremo de $\vec{u}$, como si trasladáramos $\vec{v}$ paralelamente, y el vector suma tiene origen en $\vec{0}$ y extremo en el del vector $\vec{v}$ trasladado. Obviamente, en la traslación el segmento orientado mantiene la dirección, sentido y longitud. Ambos segmentos orientados, uno con origen en $(0, 0)$ y el otro con origen en el extremo de $\vec{v}$, se dice que son equivalentes, o equipolentes, por tener igual dirección, sentido y longitud.

Ejemplo 2.1. *Representar en un plano los siguientes vectores de* $\mathbb{R}^2$*:*

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix},\ \vec{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix},\ \vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

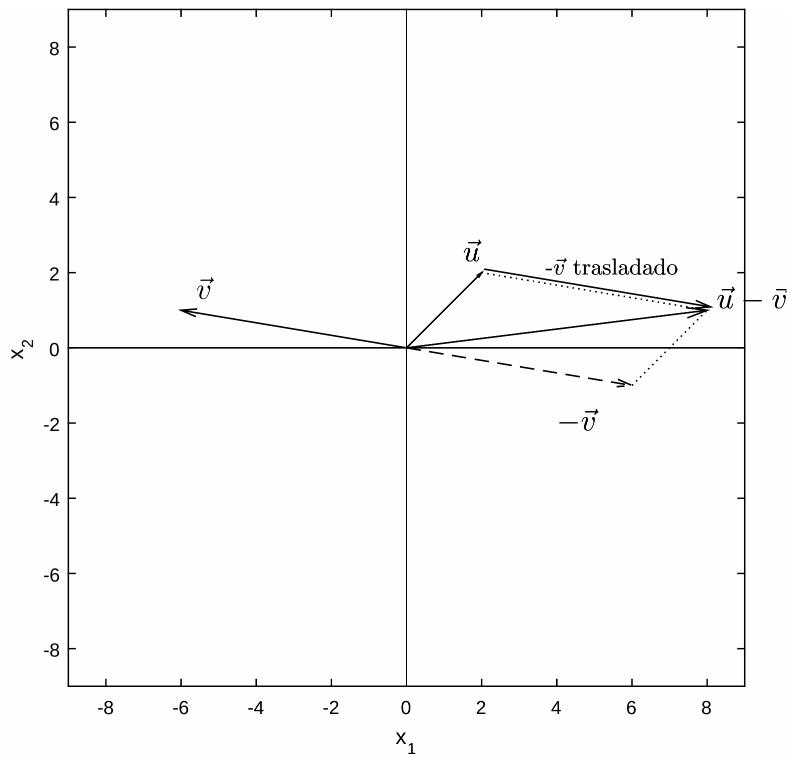


Nótese como la suma de vectores de $\mathbb{R}^2$ cumple las propiedades asociativa y conmutativa, y la existencia de elemento neutro y elemento simétrico (opuesto) para todos los vectores.

Al elemento neutro de la suma en $\mathbb{R}^2$, que es el vector $\vec{0}$, lo llamamos vector cero.

Dado el vector $\vec{x} = (x_1, x_2)$, su opuesto es $-\vec{x} = (-x_1, -x_2)$.

Para simplificar la notación, también utilizamos la **resta de vectores**, y escribimos $\vec{u} - \vec{v}$ en lugar de $\vec{u} + -\vec{v}$. La figura muestra $\vec{u} - \vec{v}$ como suma de $\vec{u}$ y $-\vec{v}$.



A la vista de la figura se comprueba de forma inmediata que al sumar al vector $\vec{u}-\vec{v}$ el vector $\vec{v}$ se obtiene el vector $\vec{u}$.

Multiplicación de vector de $\mathbb{R}^2$ por un escalar de $\mathbb{R}$

Consideramos $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se define $\lambda\vec{x} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ como el siguiente vector: $\begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

En esta operación estamos multiplicando un **vector** de $\mathbb{R}^2$ por un **escalar** λ del cuerpo $\mathbb{R}$, y el resultado es un elemento de $\mathbb{R}^2$. Por tanto la operación en $\mathbb{R}^2$ es externa y cerrada. $\mathbb{R}^2$ es el conjunto subyacente o portador y el conjunto externo es $\mathbb{R}$.

Recordemos que $\mathbb{R}^2$ también se puede expresar así : $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \ / \ x_1 \in \mathbb{R}, \ x_2 \in \mathbb{R}\}$. Siguiendo esta notación se expresarían suma y producto por un escalar así :

Suma: $(x_1, x_2) + (x_1', x_2') = (x_1 + x_1', x_2 + x_2')$

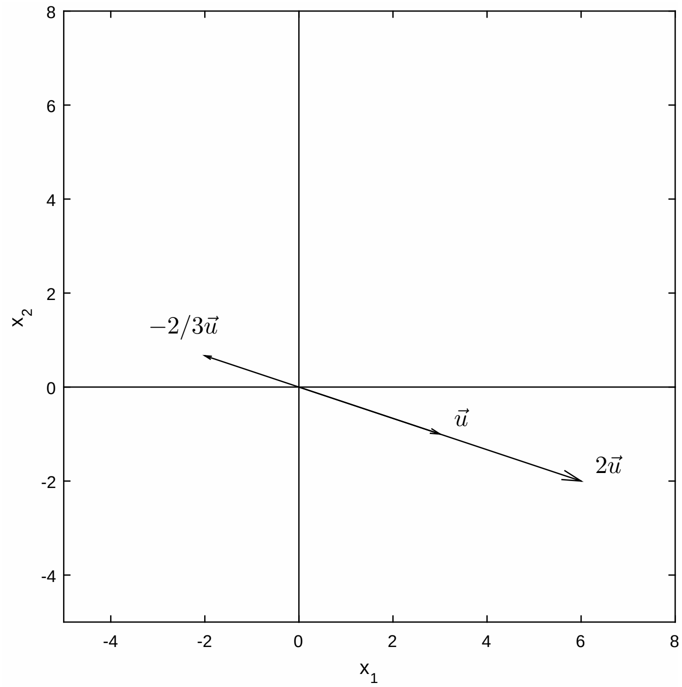
Multiplicación por un escalar: $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$

Nótese que $-1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} = -\vec{x}$, multiplicar un vector por el escalar -1 nos devuelve el vector opuesto.

Multiplicar el vector por el escalar 1 deja al vector igual.

Multiplicar el vector por el escalar 0 da como resultado el vector cero.

Ejemplo 2.2. *Sea* $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. *Representa graficamente los vectores* $\vec{u}$, $2\vec{u}$, *y* $-\frac{2}{3}\vec{u}$.



Combinación lineal (en $\mathbb{R}^2$ con escalares de $\mathbb{R}$)

Las operaciones de suma y multiplicación por un escalar son la base del concepto de combinación lineal.

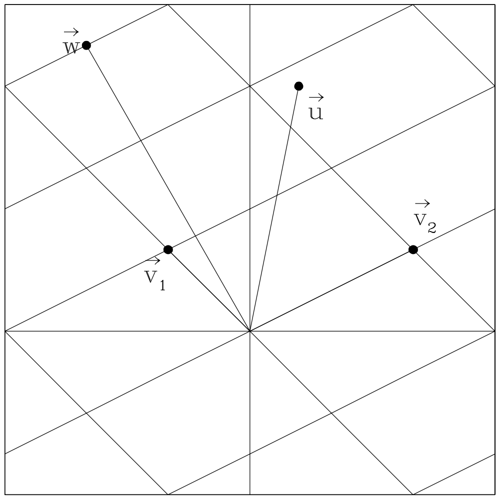
Dado un conjunto de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ de $\mathbb{R}^2$, llamamos **combinación lineal** de estos vectores a cualquier vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ que se pueda escribir en la forma $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_p\vec{v}_p$, con $c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{R}$.

A los escalares $c_1, c_2, \ldots c_p$ se les llama pesos o coeficientes de la combinación lineal. Los pesos pueden ser cualquier real, incluyendo el cero.

Son por ejemplo combinaciones lineales de los vectores del conjunto S los siguientes vectores:

$\sqrt{3}\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad , \quad \vec{v}_2 \quad , \quad \frac{1}{2}\vec{v}_1 \quad , \quad \vec{0} \quad , \quad -7\vec{v}_p.$

Ejemplo 2.3. *En la figura se muestran combinaciones lineales seleccionadas de los vectores* $\vec{v}_1 = (-1, 1) \in \mathbb{R}^2$ *y* $\vec{v}_2 = (2, 1) \in \mathbb{R}^2$*. Estima las combinaciones lineales de los vectores* $\vec{v}_1$ *y* $\vec{v}_2$ *que producen los vectores* $\vec{u}$ *y* $\vec{w}$*.*



$$\vec{u} \simeq 1.8\vec{v}_1 + 1.2\vec{v}_2$$
$$\vec{w} \simeq 3\vec{v}_1 + 0.5\vec{v}_2$$

Lección 3

El espacio y el conjunto $\mathbb{R}^3$

Analogamente a lo descrito para el plano, podemos considerar en el espacio tridimensional el punto $P = (x, y, z)$, siendo x, y, z las coordenadas del punto respecto del sistema de referencia cartesiano con tres ejes perpendiculares X, Y, Z, que se cortan en $(0, 0, 0)$. (x, y, z) son las denominadas coordenadas cartesianas, canónicas o estándar del punto P. A dicho punto le corresponderá un vector $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$, es decir una matriz columna 3×1, cuyas tres entradas o componentes, ordenados, serán dichas coordenadas (x, y, z).

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$\vec{v}$ es el denominado en Física vector de posición de P, que podemos entender desde el punto de vista geométrico como el segmento orientado con origen en $(0, 0, 0)$ y extremo en (x, y, z).

Para el vector genérico de $\mathbb{R}^3$ se usa también la notación $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. x_1, x_2, x_3 serían las coordenadas según los ejes X, Y y Z respectivamente.

Como en el caso de $\mathbb{R}^2$, el vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ también puede escribirse como $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, pero es en la notación matricial en la que se deben realizar las operaciones con vectores.

Las definiciones de suma y multiplicación por escalar vistas para $\mathbb{R}^2$ se extienden a $\mathbb{R}^3$ de forma sencilla, sin más que añadir una componente en los vectores. De igual modo se extienden sus propiedades, así como la definición de combinación lineal.

Ejemplo 3.1. *Sean* $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$. *Calcula* $2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$

Sol:

$$2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Lección 4

El espacio n-dimensional y el conjunto $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ es el conjunto de los vectores de n componentes reales, o lo que es lo mismo, el conjunto de las matrices columna de n componentes (filas) formadas por números reales.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Los elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se denominan primera, segunda, ..., enésima **componente** de $\vec{x}$. También se admite la notación $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Los elementos x_i se designan también como **entradas** del vector $\vec{x}$.

$$\mathbb{R}^n = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \;/\; x_i \in \mathbb{R}\}$$

A diferencia del plano o el espacio tridimensional, el espacio n-dimensional es una abstracción, ya que en el espacio físico solo se puede establecer relación con $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, o $\mathbb{R}^3$. Sin embargo en la práctica el uso del espacio n-dimensional es generalizado, pues la mayoría de los problemas con los que tratamos en Álgebra no son de una, dos o tres variables, sino más, y el estudio de dichas n variables reales puede realizarse con frecuencia tratando las n variables como entradas de un vector de $\mathbb{R}^n$.

Las definiciones de suma y multiplicación por escalar, sus propiedades, así como la definición de combinación lineal vistas para $\mathbb{R}^2$ se extienden a $\mathbb{R}^n$ sin más que añadir en los vectores las $n-2$ componentes que faltan.

4.1 Dependencia e independencia lineal en $\mathbb{R}^n$

Un conjunto de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\} \subset \mathbb{R}^n$ es **linealmente dependiente** (también llamado "ligado") si existen unos escalares $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$, no todos nulos, tales que

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_p\vec{v}_p = \vec{0}$$

Una ecuación como la anterior se denomina **relación de dependencia lineal**.

En caso de que tales coeficientes no existan, es decir, en caso de que la combinación lineal nula solo se logre si todos los coeficientes son nulos, se dice del conjunto S que es **linealmente independiente** (también llamado "libre"). Se puede expresar este resultado así : $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ es linealmente independiente si

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_p\vec{v}_p = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \ldots = c_p = 0.$$

Ejemplo 4.1. *Considera los conjuntos* $S_1 = \{(1,2),(2,4)\}$, *y* $S_2 = \{(1,2),(3,5)\}$, *ambos en* $\mathbb{R}^2$, *y justifica si son o no l.d., encontrando en caso afirmativo, la relación de dependencia lineal.*

Sol.:

- S_1 *es l.d., ya que es obvia la relación de dependencia lineal siguiente:*

  $-2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{0}$

- *Para* S_2 *planteamos la ecuación de que la c.l. de sus vectores sea el vector cero:*

  $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \vec{0}$

  Es decir, $\quad c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

  De donde surge el sistema de ecuaciones lineales (SL) siguiente:

  $$\begin{cases} c_1 + 3c_2 = 0 \\ 2c_1 + 5c_2 = 0 \end{cases}$$

  Sumando a la segunda ecuación la primera multiplicada por -2 *obtenemos un sistema lineal más sencillo que tiene la misma solución que el original, es decir, un SL equivalente al original.*

  $$\begin{cases} \ \ c_1 + 3c_2 = 0 \\ 2c_1 + 5c_2 = 0 \end{cases} \quad \sim \quad \begin{cases} c_1 + 3c_2 = 5 \\ \quad\ \ - 2c_2 = 0 \end{cases}$$

  $$\xrightarrow{\textit{Eliminación gaussiana}}$$

  La nueva ecuación que aparece en segundo lugar implica $c_2 = 0$, *y sustituyendo* $c_2 = 0$ *en la primera tenemos* $c_1 = 0$.

  Concluimos que la c.l. nula solo se puede obtener si los coeficientes son todos nulos, y que por tanto el conjunto es l.i.

Algunas propiedades:

- Un conjunto de vectores linealmente dependiente se caracteriza porque alguno de sus vectores puede expresarse como combinación lineal del resto, lo cual no sucede en un conjunto linealmente independiente.

  Para el caso de $p = 2$ esta definición conduce a la siguiente propiedad: Dos vectores de $\mathbb{R}^n$ son l.d. si y solo si uno es múltiplo del otro.

- Todo conjunto finito de vectores de $\mathbb{R}^n$ con más de n vectores es l.d. O expresado de otra forma, cualquier conjunto finito de vectores l.i. en $\mathbb{R}^n$ tiene como máximo n vectores.

  Para el caso de $\mathbb{R}^2$ se tiene por tanto que el máximo número de vectores l.i. en un conjunto es 2. Efectivamente, considerando tres vectores en el plano tendremos que siempre uno de ellos se podrá expresar como c.l. de los otros dos.

  Para el caso de $\mathbb{R}^3$ el máximo número de vectores l.i. en un conjunto es 3.

- Si añadiendo un vector al conjunto S el conjunto pasa de ser l.i. a l.d., entonces el vector añadido es c.l. de los vectores de S.

Estas propiedades se demostrarán en el Tema de Espacios Vectoriales (Tema 3 de la Guía Docente).

Ejemplo 4.2. *Para cada uno de los conjuntos S_1, S_2, S_3 y S_4, con $S_i \subset \mathbb{R}^2$, todos ellos con tres vectores y por tanto forzosamente l.d., a) obtenemos una relación de dependencia lineal y b) despejamos uno de los vectores como c.l. del resto.*

- $S_1 = \{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\}$

  Una posible forma de escribir un vector como c.l. del resto es:

  $$0\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

  Llevando todos los vectores del conjunto a un mismo miembro tenemos la siguiente relación de dependencia lineal:

  $$0\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \qquad o \quad 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{0}$$

  Vemos que los coeficientes de la relación de dependencia lineal son $(0, 0, -1)$. Además, cualquier terna de la forma $(0, 0, k)$ con $k \neq 0$ valdría como relación de dependencial lineal.

  ¿Quedaría el conjunto libre con solo eliminar un vector? ¿Cuál sería ese vector?.

  Vemos que el vector $\vec{0}$ nos ha permitido establecer la relación de dependencia lineal, porque es el único coeficiente no nulo que hemos usado. Si lo suprimimos nos quedamos con dos vectores, $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ que no son uno múltiplo del otro, por tanto el conjunto que queda con ellos dos es l.i.

  Eliminando solo el vector $(1, 2)$ el conjunto queda l.d. porque tiene el vector nulo. Lo mismo sucede si elimináramos solo el vector $(3, 4)$.

  Por tanto el único vector del conjunto que una vez eliminado deja un conjunto libre es el vector $(0, 0)$.

  ¿Puedes expresar algún otro vector como c.l. del resto? ¿Cual?

  El único vector que se puede expresar como c.l. del resto es el vector $(0, 0)$.

- $S_2 = \{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}\}$

  Llevando todos los vectores del conjunto a un mismo miembro deducimos sin más que darnos cuenta de que el segundo vector es múltiplo del primero, la siguiente relación de dependencia lineal:

  $$2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \qquad o \quad 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 = \vec{0}$$

  Nótese que cualquier terna de la forma $(2k, -k, 0)$, con $k \neq 0$ valdría como conjunto de coeficientes para la relación de dependencial lineal.

Una posible forma de escribir un vector como c.l. del resto es la siguiente:

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = -1/2\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$$

¿Puedes expresar algún otro vector como c.l. del resto? ¿Cual?

Puedo expresar (2,4) como c.l. del resto.

¿Existe algún vector que no puedas expresar como c.l. del resto? ¿Cual?

No puedo expresar (3,5) como c.l. del resto.

¿Quedaría el conjunto libre con solo eliminar un vector? ¿Cuál sería ese vector?.

Eliminando el vector $(1,2)$ *o eliminando el vector* $(2,4)$*, nos queda conjunto libre, porque nos quedan dos vectores que no son uno múltiplo del otro.*

- $S_3 = \{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\}$

Llevando todos los vectores del conjunto a un mismo miembro deducimos sin más que darnos cuenta de que el segundo vector es múltiplo del primero, la ecuacion siguiente de relación de dependencia lineal:

$$2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Nótese que cualquier terna de coeficientes de la forma $(2k, -k, h)$*, con* $k \neq 0$ *o* $h \neq 0$ *(no los dos parámetros nulos a la vez) proporcionaría coeficientes válidos para una relación de dependencial lineal.*

Tenemos por ejemplo estas dos posibles relaciones de dependencia lineal, independientes entre sí:

$$2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 = \vec{0}$$
$$0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 5\vec{v}_3 = \vec{0}$$

Una posible forma de escribir un vector como c.l. del resto es la siguiente:

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 1/2\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} - 7/2\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

¿ Puedes expresar algún otro vector como c.l. del resto? ¿Cual?

Cada uno de los tres vectores se puede expresar como c.l. del resto. El segundo, por ser múltiplo del primero, y el vector nulo es siempre c.l. de cualquier conjunto, sin más que tomar todos los coeficientes nulos.

¿Existe algún vector que no puedas expresar como c.l. del resto? ¿Cual?

Acabamos de ver que no existe ningún vector en ese caso.

¿Cuantos vectores has de eliminar para que el conjunto resultante sea l.i.?

Hemos de eliminar 2. En efecto este número es resultado de tener dos parámetros libres en la forma más general de los coeficientes de la relación de dependencia lineal, que es $(2k, -k, h)$*, con* $k, h \in \mathbb{R}$*.*

- $S_4 = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \}$

  Ninguno de los vectores es múltiplo de otro, por tanto cualquier par de vectores es conjunto l.i. Ya que el conjunto de tres es l.d. el tercer vector será c.l. de los dos primeros.

  Vamos a demostrarlo tomando como primer par $(1,2)$, $(3,4)$ *y deduciendo que* $(5,6)$ *es c.l. de ellos dos.*

  Tenemos que demostrar que se puede escribir $(5,6) = c_1(1,2) + c_2(3,4)$ *para algún* c_1 *y algún* c_2 *perteneciente a* $\mathbb{R}$.

  O lo que es lo mismo, que se puede escribir: $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ *para algún par de valores* c_1 *y* c_2.

  Cualquiera de las dos expresiones anteriores nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones lineales (SL):

  $$\begin{cases} c_1 + 3c_2 = 5 \\ 2c_1 + 4c_2 = 6 \end{cases}$$

  Sumando a la segunda ecuación la primera ecuación multiplicada por -2 *obtenemos un sistema lineal más sencillo que tiene la misma solución que el original, es decir, un SL equivalente al original.*

  $$\begin{cases} c_1 + 3c_2 = 5 \\ 2c_1 + 4c_2 = 6 \end{cases} \underset{\xrightarrow{\text{Eliminación gaussiana}}}{\sim} \begin{cases} c_1 + 3c_2 = 5 \\ \quad\; - 2c_2 = -4 \end{cases}$$

  En la segunda ecuación ya no tenemos la incógnita c_1, *y podemos despejar la segunda:* $c_2 = -4/-2 = 2$,

  En la primera despejamos c_1, *y en la parte derecha sustituimos* c_2 *por el valor que ya hemos calculado, obteniendo:* $c_1 = 5 - 3c_2 = 5 - 6 = -1$

  Ya hemos obtenido c_1 *y* c_2, *con valores* -1 *y* 2, *por tanto* $(5,6) = -1(1,2) + 2(3,4)$.

  Agrupando todos los vectores en el mismo miembro obtenemos la siguiente relación de dependencia lineal:

  $-1(1,2) + 2(3,4) - 1(5,6) = (0,0)$

  Tomando los vectores de S_4 *en el orden del enunciado, las relaciones de dependencia lineal tienen la terna de coeficientes de la forma genérica siguiente:* $(-k, 2k, -k)$ *con* $k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

  Con razonamiento similar podríamos haber demostrado que $(1,2)$ *se puede expresar como c.l. de* $\{(3,4),(5,6)\}$, *y que* $(5,6)$ *se puede expresar como c.l. de* $\{(1,2),(3,4)\}$.

  De la propia igualdad anterior ya podemos despejar:

  $(1,2) = 2(3,4) - 1(5,6) \qquad\qquad (5,6) = -1(1,2) + 2(3,4)$

4.2 Rango de un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$

Se define rango de un conjunto de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\} \subset \mathbb{R}^n$ como el número máximo de ellos que forma un conjunto linealmente independiente. El rango del conjunto de vectores S coincide con el rango de la matriz cuyas columnas son los vectores de S, es decir, con el rango de la matriz $A = [\ \vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \ldots\ \vec{v}_p\ ]$. La definición de rango de una matriz se verá en el Tema de Matrices (Tema 1 de la Guía Docente).

Ejemplo 4.3. *Escribe el rango de los conjuntos S_1, S_2, S_3 y S_4 del ejemplo anterior a partir de los resultados obtenidos.*

<u>*Sol:*</u>

- $S_1 = \{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\}$ *rango 2* *El subconjunto l.i. con rango 2 es* $\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\}$
- $S_2 = \{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}\}$ *rango 2* *Un posible subconjunto l.i. con rango 2 es* $\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}\}$
- $S_3 = \{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\}$ *rango 1* *Un posible subconjunto l.i. con rango 1 es* $\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\}$
- $S_4 = \{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}\}$ *rango 2* *Un posible subconjunto l.i. con rango 2 es* $\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\}$

Lección 5

El producto escalar canónico en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$

El producto escalar canónico en $\mathbb{R}^n$ es una operación interna que permite asignar longitudes a los vectores (la llamada norma de un vector) y obtener distancias y ángulos entre ellos. Las longitudes, distancias y ángulos que tratamos en este tema están referidas a este producto escalar concreto. Se le denomina también "producto escalar usual" o "producto escalar habitual".

En el Tema de Espacio Euclídeo (Tema 6 de la Guía Docente) veremos la definición general de producto escalar, así como las definiciones generales de norma, distancia y ángulo.

5.1 Definición de producto escalar canónico

El producto escalar canónico de dos vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$ se define como el siguiente escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n = \rho \qquad [\mathbf{1}]$$

El producto escalar vemos pues que es una operación interna y que no es cerrada. El resultado no es un elemento del conjunto subyacente $\mathbb{R}^n$ sino un elemento del cuerpo $\mathbb{R}$. De ahí el nombre de producto escalar: el resultado es un escalar. Es la suma de n productos de dos números reales, y por tanto es un real.

Se cumplen las propiedades que vemos a continuación. Son muy sencillas de demostrar, por lo que la demostración se presenta solo para la primera.

- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

  En efecto, $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) \cdot \vec{w} = (u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 + \ldots + (u_n + v_n)w_n$

  Y ya que en $\mathbb{R}$ se verifica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma:

  $= u_1 w_1 + v_1 w_1 + u_2 w_2 + v_2 w_2 + \ldots + u_n w_n + v_n w_n$

  Utilizando ahora la propiedad conmutativa de la suma de reales, reagrupamos los sumandos:

  $= u_1 w_1 + u_2 w_2 + \ldots + u_n w_n + v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots v_n w_n = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, con justificación muy similar a la anterior.

- $\lambda \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \lambda \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (Por la propiedad conmutativa del producto de reales)

  Esta propiedad se conoce como simetría del producto escalar.

- $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$, con $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ (Es una suma de cuadrados: el resultado solo puede ser positivo o cero)

Expresión matricial del producto escalar canónico:

Partimos de la la ecuación [**1**]:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n \underset{\uparrow}{=} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \vec{u}^t\ \vec{v}$$

El producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ corresponde al producto matricial del traspuesto de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Es el producto de una matriz $1 \times n$ por una matriz $n \times 1$, que da como resultado una matriz 1×1, es decir, un escalar.

Ejemplo 5.1. *En* $\mathbb{R}^3$ *y considerando el producto escalar canónico, determina* $\vec{u} \cdot \vec{v}$ *y* $\vec{v} \cdot \vec{u}$*, con*

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Sol.:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^t \vec{v} = [2 \ \ -5 \ \ -1] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 2 \times 3 + (-5) \times 2 + (-1) \times (-3) = 6 - 10 + 3 = -1$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v}^t \vec{u} = [3 \ 2 \ \ -3] \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 \times 2 + 2 \times (-5) + (-3) \times (-1) = 6 - 10 + 3 = -1$$

5.2 Longitud o norma de un vector

Considerado $\mathbb{R}^n$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, y el producto escalar canónico, se denomina **norma** o **longitud** de $\vec{v}$, y se denota $\| \vec{v} \|$ al escalar:

$$\| \vec{v} \| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\vec{v}^t\ \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2} \qquad [\mathbf{2a}]$$

Nótese que la raíz está siempre definida, ya que $\vec{v} \cdot \vec{v}$ es positivo o cero (es cero solo si $\vec{v} = \vec{0}$).

Propiedades de la norma:

- $\| c\vec{v} \| = |c| \, \| \vec{v} \|$

- Desigualdad de Schwarz $\quad |\vec{u} \cdot \vec{v}| \ \leq \ \| \vec{u} \| \ \| \vec{v} \|$

  La igualdad se cumple cuando alguno de los dos vectores es nulo, o, sin serlo, $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$

- Desigualdad de Minkowski o desigualdad triangular $\quad \| \vec{u} + \vec{v} \| \ \leq \ \| \vec{u} \| + \| \vec{v} \|$

  La igualdad se cumple cuando alguno de ellos es nulo, o, sin serlo, $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}^+$

Un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es **unitario** si $\| \vec{v} \| = 1$

Multiplicando el vector no nulo $\vec{v}$ por el escalar $\frac{1}{\|\vec{v}\|}$ obtenemos un vector $\vec{v}_\circ = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ que es unitario. El proceso de crear $\vec{v}_\circ$ a partir de $\vec{v}$ se denomina **normalización** de $\vec{v}$.

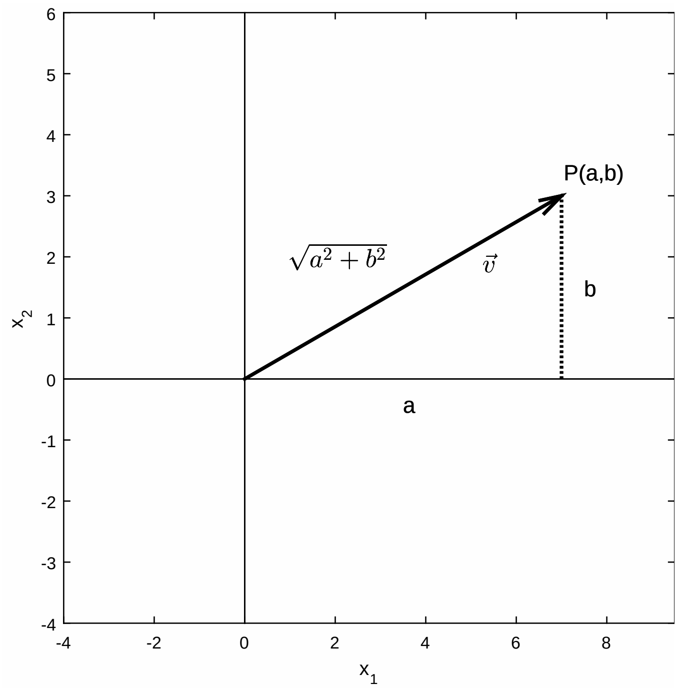
$\vec{v}$ y $\vec{v}_\circ$ tienen la misma dirección y el mismo sentido.

Elevando al cuadrado la expresión [2a] se tiene:

$$\| \vec{v} \|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v}^t \ \vec{v} = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 \qquad \textbf{[2b]}$$

Con frecuencia resulta conveniente trabajar con las normas al cuadrado, para evitar la expresión con la raíz cuadrada. Si se maneja esta expresión hay que recordar que la norma toma valores solo en $\mathbb{R}^+$ (0 incluido).

En la figura se observa como la longitud definida coincide con lo que conocemos como longitudes de los vectores de $\mathbb{R}^2$.



Ejemplo 5.2. *Encuentra un vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que* $\vec{v} = (2, -3)$.
Sol:

$$\| \vec{v} \|^2 = 4 + 9 = 13$$

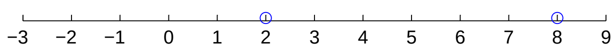
$$\vec{v_0} = (\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}})$$

también se puede escribir, más simplificado:

$$\vec{v_0} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2, -3)$$

5.3 Distancia entre dos vectores

A continuación vamos a definir la distancia entre vectores. Recordamos que si a y b son números reales, la distancia en $\mathbb{R}$ entre a y b es el real positivo $|a-b|$. En la figura se da un ejemplo.



Distancia entre $x_1 = 2$ y $x_1 = 8$:
$|2-8| = |-6| = 6$ $\qquad$ $|8-2| = |6| = 6$
Otro ejemplo, distancia entre $x_1 = -3$ y $x_1 = 4$:
$|(-3)-4| = |-7| = 7$ $\qquad$ $|4-(-3)| = |7| = 7$

Esta definición de distancia se puede extender a $\mathbb{R}^n$.

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, la **distancia entre** $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$, denotada como $\mathrm{dist}(\vec{u}, \vec{v})$, es la norma del vector $\vec{v}-\vec{u}$. Esto es, $\mathrm{dist}(\vec{u}, \vec{v}) = \| \vec{v}-\vec{u} \| = \sqrt{(\vec{v}-\vec{u})^t(\vec{v}-\vec{u})} == \sqrt{(v_1-u_1)^2 + (v_2-u_2)^2 + \ldots + (v_n-u_n)^2}$ [**3**]

Propiedades de la distancia:

- $\mathrm{dist}(\vec{u}, \vec{v}) > 0$ si $\vec{u} \neq \vec{v}$, y $\mathrm{dist}(\vec{u}, \vec{u}) = 0$
- $\mathrm{dist}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{dist}(\vec{v}, \vec{u})$
- Desigualdad triangular $\quad \mathrm{dist}(\vec{u}, \vec{v}) \leq \mathrm{dist}(\vec{u}, \vec{w}) + \mathrm{dist}(\vec{w}, \vec{v})$

La expresión general de la distancia entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en el espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^n$ es la siguiente:

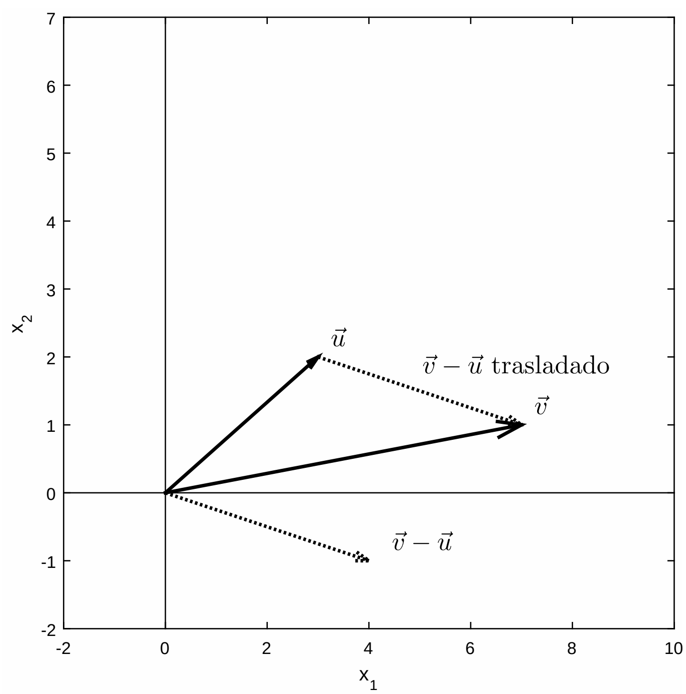
Ejemplo 5.3. *a) En* $\mathbb{R}^2$ *y con el producto escalar canónico calcula la distancia entre los vectores* $\vec{v} = (7, 1)$ *y* $\vec{u} = (3, 2)$.

b) Representa gráficamente los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ *y* $\vec{v} - \vec{u}$ *(todos ellos con origen en* $(0, 0)$*). Seguidamente representa el vector* $\vec{v} - \vec{u}$ *situando su origen en* $\vec{u}$*, como si se tratara del vector original trasladado. Al situarlo en esta localización se entiende bien que su norma corresponde a la distancia entre* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$.

Sol.:

$$\vec{v} - \vec{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\| \vec{v} - \vec{u} \|^2 = 4^2 + (-1)^2 = 17$
$\| \vec{v} - \vec{u} \| = \sqrt{17}$



Ejemplo 5.4. *Considerando el producto escalar canónico en* $\mathbb{R}^4$*, calcula la distancia entre los vectores* $\vec{v} = (7, 1, 1, 5)$ *y* $\vec{u} = (3, 2, 1, 3)$.

Sol.:

$\vec{v} - \vec{u} = (4, -1, 0, 2)$
$dist = \| \vec{v} - \vec{u} \| = \sqrt{16 + 1 + 0 + 4} = \sqrt{21}$

5.4 Ángulo entre dos vectores

Con el producto escalar canónico en $\mathbb{R}^n$ se define ángulo entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, ninguno de ellos nulo, como el escalar $\alpha = \text{áng}(\vec{u}, \vec{v})$ siguiente:

$$\alpha \in [0, \pi] \ \text{ tal que } \ \vec{u} \cdot \vec{v} = \| \vec{u} \| \ \| \vec{v} \| \cos\alpha$$

Despejando $\cos\alpha$:
$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\| \vec{u} \| \ \| \vec{v} \|} \qquad [\mathbf{4}]$$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pi/2$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow \alpha \in [0, \pi/2)$

  Si $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ con $\lambda > 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \lambda\vec{u} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{u}) = \lambda \| \vec{u} \|^2$
  $$\cos\alpha = \frac{\lambda \| \vec{u} \|^2}{\| \vec{u} \| \ \| \lambda\vec{u} \|} = \frac{\lambda \| \vec{u} \|^2}{|\lambda| \ \| \vec{u} \|^2} = 1 \qquad \Rightarrow \alpha = 0$$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow \alpha \in (\pi/2, \pi]$

  Si $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ con $\lambda < 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \lambda\vec{u} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{u}) = \lambda \| \vec{u} \|^2$
  $$\cos\alpha = \frac{\lambda \| \vec{u} \|^2}{\| \vec{u} \| \ \| \lambda\vec{u} \|} = \frac{\lambda \| \vec{u} \|^2}{|\lambda| \ \| \vec{u} \|^2} = -1 \qquad \Rightarrow \alpha = \pi$$

OBSERVACIÓN: Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^n$ no nulos son linealmente dependientes si y sólo si el ángulo que forman es 0 o π.

Ejemplo 5.5. *En* $\mathbb{R}^2$ *considera el producto escalar habitual, y los siguientes vectores:* $\vec{u} = (7, 1)$, $\vec{v} = (-3, 3)$, $\vec{w} = (3, -3)$ *y* $\vec{z} = (4, -3)$.
Calcula los siguientes ángulos:
Ángulo que forman $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$*:*
Ángulo que forman $\vec{u}$ *y* $\vec{w}$*:*
Ángulo que forman $\vec{u}$ *y* $\vec{z}$*:*
Sol:

$(7, 1)\ (-3, 3) = \sqrt{50} \ \ \sqrt{18} \ \ \cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{-21 + 3}{\sqrt{50}\sqrt{18}} = \frac{-18}{\sqrt{50}\sqrt{18}} = \frac{-18}{\sqrt{25 \times 4 \times 9}} = \frac{-18}{5 \times 2 \times 3} = -\frac{3}{5}$$

El ángulo es $\alpha \simeq 2.2143$ *radianes* $\simeq$ *126.8699 grados*

$(7, 1)\ (3, -3) = \sqrt{50} \ \ \sqrt{18} \ \ \cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{21 - 3}{\sqrt{50}\sqrt{18}} = \frac{18}{\sqrt{50}\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{50}} = \frac{3\sqrt{2}}{5 \times \sqrt{2}} = \frac{3}{5}$$

El ángulo es $\alpha \simeq 0.9273$ *radianes* $\simeq 53.1301$ *grados*

Nótese que $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *son vectores opuestos, por tanto la suma del ángulo de* $\vec{u}$ *con* $\vec{v}$ *más el ángulo de* $\vec{u}$ *con* $\vec{w}$ *es igual a 180 grados.*

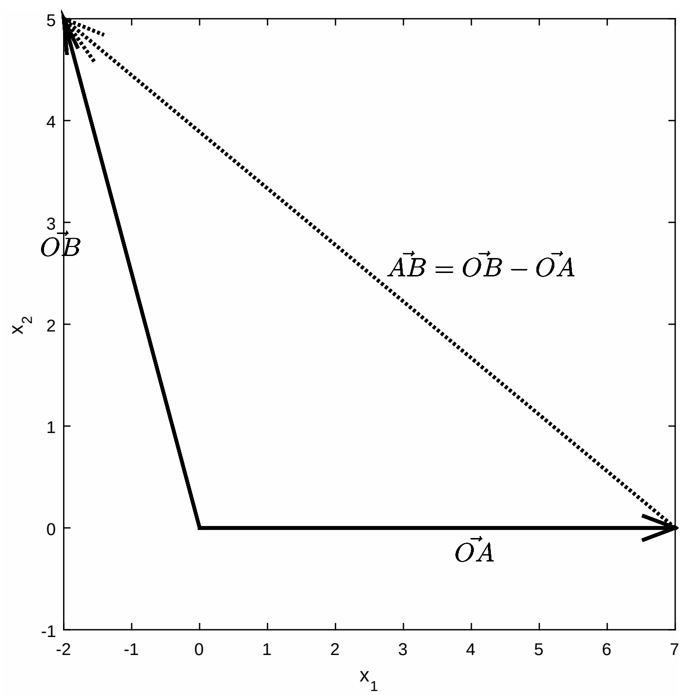
$(7,1)\ (4,-3) = \sqrt{50}\ \ 5\ \ \cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{28-3}{5\sqrt{50}} = \frac{25}{5\sqrt{50}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.7071$$

El ángulo es $\alpha = 45$ *grados*

Ejemplo 5.6. *Considera el plano y en él el triángulo con vértices en los puntos* $O = (0,0)$, $A = (7,0)$ *y* $B = (-2,5)$. *Determina los tres ángulos interiores del triángulo. Ten en cuenta que la suma de los ángulos ha de ser igual a 180 grados.*

Sol.:



Con el p.e. de los vectores $\vec{OA}$ *y* $\vec{OB}$ *podemos obtener el ángulo en* O.

Con el p.e. de los vectores $-\vec{OA}$ *y* $\vec{AB}$ *podemos obtener el ángulo en* A.
$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-2,5) - (7,0) = (-9,5)$

Con el p.e. de los vectores $-\vec{OB}$ *y* $-\vec{AB}$ *podemos obtener el ángulo en* B. *Al efectuar este p.e. puedo sacar fuera* $(-1)\times(-1) = 1$, *por tanto el resultado es el mismo que si obtuviésemos el p.e. de* $\vec{OB}$ *y* $\vec{AB}$

$$\cos\alpha = \frac{(7,0)\cdot(-2,5)}{\sqrt{7}\sqrt{29}} = \frac{-14}{7\sqrt{29}} \simeq -0.3714$$

Ángulo en radianes $\simeq$ *1.9513* *Ángulo en grados* $\simeq$ *111.8014*

$$\cos\beta = \frac{-(7,0)\cdot(-9,5)}{\sqrt{7}\sqrt{106}} = \frac{63}{7\sqrt{106}} \simeq 0.8742$$

Ángulo en radianes $\simeq$ *0.5071* *Ángulo en grados* $\simeq$ *29.0546*

$$\cos\gamma = \frac{(-2,5)\cdot(-9,5)}{\sqrt{29}\sqrt{106}} = \frac{18+25}{\sqrt{29}\sqrt{106}} = \frac{43}{\sqrt{29}\sqrt{106}} \simeq 0.7756$$

Ángulo en radianes $\simeq$ *0.6832* *Ángulo en grados* $\simeq$ *39.1440*

Ejemplo 5.7. *En* $\mathbb{R}^3$ *y considerando el producto escalar canónico, determina el ángulo que forma el vector* $\vec{v} = (4, -1, 6)$ *con cada uno de los vectores* $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ *y* $\vec{k} = (0, 0, 1)$
Sol.:

$(4, -1, 6)\ (1, 0, 0) = \sqrt{16 + 1 + 36}\ \ 1\ \ \cos\alpha = \sqrt{53}\ \ \cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{53}} \simeq 0.5494$$

El ángulo es $\alpha \simeq 0.9891$ *radianes* $\simeq$ *56.6712 grados*

$(4, -1, 6)\ (0, 1, 0) = \sqrt{53}\ 1\ \cos\beta$

$$\cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{53}} \simeq -0.1374$$

El ángulo es $\beta \simeq 1.7086$ *radianes* $\simeq$ *97.8951 grados*

$(4, -1, 6)\ (0, 0, 1) = \sqrt{53}\ 1\ \cos\gamma$

$$\cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{53}} \simeq 0.8242$$

El ángulo es $\gamma \simeq 0.6021$ *radianes* $\simeq$ *34.4962 grados*

Comprobación de la suma de ángulos: 111.8014 + 29.0546 + 39.144 = 180

Ejercicio 5.1. *Calcula los tres ángulos del triángulo de vértices* $A = (1, 1)$, $B = (5, 2)$ *y* $C = (-3, 6)$, *y rellena un cuadro como el siguiente con los resultados. Expresa el ángulo en grados y con precisión de décimas (por redondeo).*

En vértice	*ángulo*
A	
B	
C	

5.5 Vectores ortogonales

En $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar canónico decimos que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

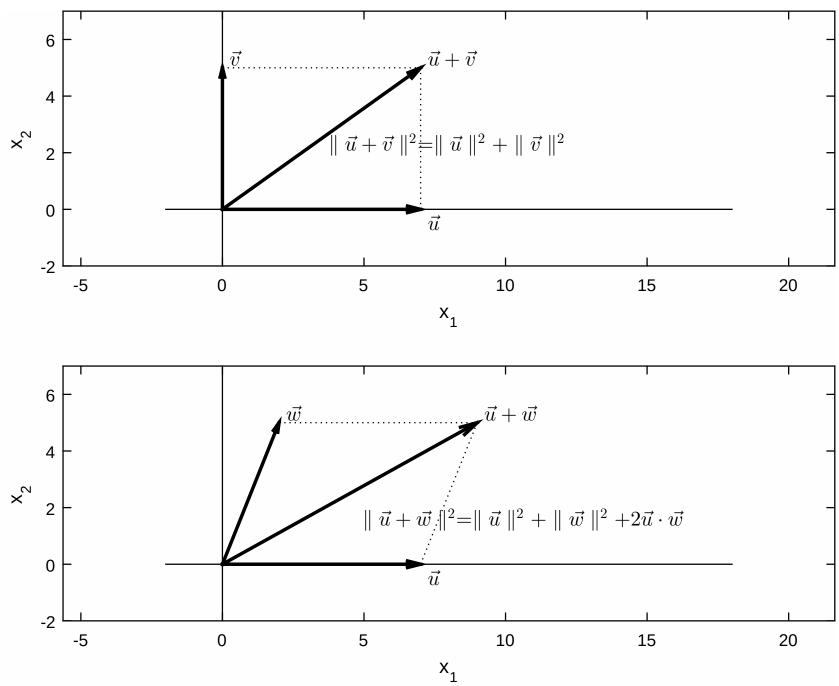
El vector cero es ortogonal a todos los vectores de $\mathbb{R}^n$, pues $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0 \;\; \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Teorema de Pitágoras

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales si y sólo si $\quad \| \vec{u} + \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 \qquad$ [**5a**]

$$\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) =$$
$$= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 + 2\, \vec{u} \cdot \vec{v} \qquad [\mathbf{5b}]$$

Esquema en $\mathbb{R}^2$:



(Recuérdese como la suma de dos vectores coincide con la diagonal del paralelogramo que definen).

Observación: En la figura inferior se tiene que $\vec{u} \cdot \vec{w}$ es mayor que cero por lo que la norma al cuadrado de la suma es mayor que la suma de los cuadrados de las normas. Si el ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{w}$ fuera obtuso, y por tanto el producto escalar negativo, entonces el cuadrado de la norma de la suma sería menor que la suma de los cuadrados de las normas.

Lección 6

Producto vectorial

El producto vectorial, también denominado producto cruz, solo está definido en $\mathbb{R}^3$. Es una operación interna entre dos elementos y cerrada, puesto que el resultado también es elemento de $\mathbb{R}^3$.

El producto vectorial de dos vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ se define como el vector siguiente:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix} \qquad [\mathbf{1}]$$

Existe una forma sencilla de calcular el producto vectorial utilizando el siguiente determinante.[1]

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Sin más que aplicar la regla de Sarrus para los determinantes de orden 3, obtenemos:
$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}$
Podemos observar que las componentes coinciden con las de la definición.

Vemos a continuación una serie de propiedades que cumple el producto vectorial, y de ahí el interés en su definición.

- El vector $\vec{z} = \vec{u} \times \vec{v}$ es ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

  Demostramos la ortogonalidad a $\vec{u}$:

  $(u_2v_3 - u_3v_2)u_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)u_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)u_3 = 0$

  desarrollando la expresión se obtienen 6 sumandos, opuestos dos a dos.

  La demostración de la ortogonalidad a $\vec{v}$ es similar.

- El sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ es el del avance de un tornillo dextrógiro que gira del primer al segundo vector por el camino más corto.

  Se comprueba fácilmente que efectivamente:

  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ $\qquad$ $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ $\qquad$ $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

  $$\vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \qquad \vec{j} \times \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{j}$$

[1] en realidad no es un determinante pues los elementos de la primera fila no son escalares, pero el procedimiento ayuda a recordar cómo calcular el producto cruz

- El producto vectorial es anticonmutativo: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$

  Efectuar la operación en orden inverso equivale a intercambiar dos filas en el determinante, lo que cambia su signo. También es obvio que el camino más corto del giro de $\vec{u}$ a $\vec{v}$ es inverso al camino más corto de $\vec{v}$ a $\vec{u}$.

- Considerados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, ninguno de ellos el vector $\vec{0}$, se tiene:

  $\| \vec{u} \times \vec{v} \| = \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \operatorname{sen}\alpha$, siendo α el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

  El requisito de que ningún vector sea $\vec{0}$ es debido a que solo hemos definido ángulo entre vectores distintos de $\vec{0}$.

  Demostración:

  Obtenemos en primer lugar la norma al cuadrado de $\vec{u} \times \vec{v}$

  $\| \vec{u} \times \vec{v} \|^2 = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 =$

  $u_2^2v_3^2 + u_3^2v_2^2 + u_3^2v_1^2 + u_1^2v_3^2 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 - 2u_2u_3v_2v_3 - 2u_1u_3v_1v_3 - 2u_1u_2v_1v_2 =$

  $(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - u_1^2v_1^2 - u_2^2v_2^2 - u_3^2v_3^2 - 2u_2u_3v_2v_3 - 2u_1u_3v_1v_3 - 2u_1u_2v_1v_2$

  Por otra parte $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 + 2u_1u_2v_1v_2 + 2u_1u_3v_1v_3 + 2u_2u_3v_2v_3$

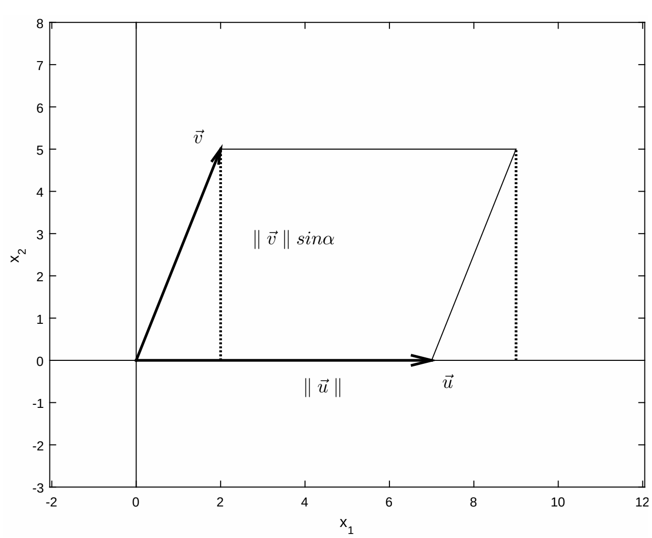
  Por tanto $\| \vec{u} \times \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 \| \vec{v} \|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \| \vec{u} \|^2 \| \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} \|^2 \| \vec{v} \|^2 \cos^2\alpha =$

  $= \| \vec{u} \|^2 \| \vec{v} \|^2 \, (1 - \cos^2\alpha) = \| \vec{u} \|^2 \| \vec{v} \|^2 \operatorname{sen}^2\alpha$

  Extrayendo la raíz cuadrada: $\| \vec{u} \times \vec{v} \| = \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \operatorname{sen}\alpha$.

  Nótese que la norma queda positiva o nula, ya que $\alpha \in [0, \Pi]$ y en ese rango el seno es positivo o nulo.

  La norma del producto vectorial tiene una interesante interpretación geométrica pues es el <u>área del paralelogramo</u> definido por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Ver el esquema en la siguiente figura.

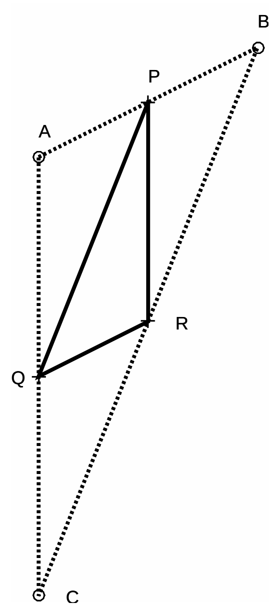
  

  Obviamente, un medio de la norma es el <u>área del triángulo</u> cuyos vértices son el origen, el extremo de $\vec{u}$, y el extremo de $\vec{v}$.

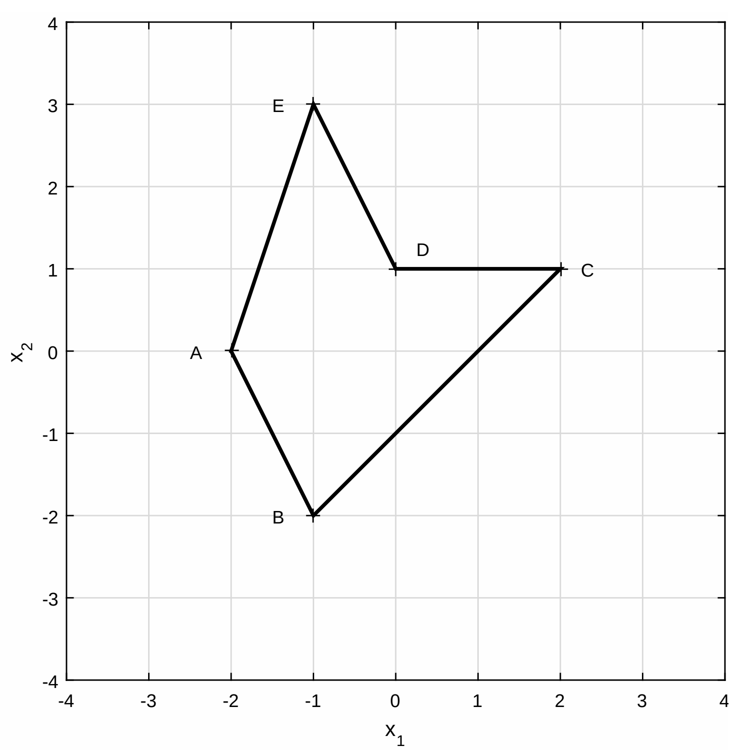
- El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es nulo si y solo si los dos vectores son l.d..

Ejercicio 6.1. *Determine el área del paralelogramo de vértices* $P = (1, 3, 2)$, $Q = (2, 1, 4)$ *y* $R = (-3, 1, 6)$. *Existen tres paralelogramos con esos vértices, justifica por qué los tres tienen la misma área.*

Ejercicio 6.2. *En el plano considere los puntos* $P = (4, 7)$, $Q = (2, 2)$ *y* $R = (4, 3)$. *Determina las coordenadas de los puntos* A, B, C, *los ángulos interiores en* A, B *y* C, *y el área del triángulo de vértices* A, B *y* C.



Ejercicio 6.3. *Halle el área de la figura de vértices ABCDE, donde*
$A = (-2, 0)$, $B = (-1, -2)$, $C = (2, 1)$, $D = (0, 1)$, $E = (-1, 3)$



Lección 7

Ec. vectorial de la recta en el plano y en el espacio ordinario E_3

7.1 Recta que pasa por el origen

Considerado un vector cualquiera $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ (que no sea el vector nulo), el lugar geométrico de los múltiplos del mismo define una recta que pasa por el origen.

Por ejemplo dado el vector $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, tendremos que $\vec{x} = \alpha\vec{v}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ es el lugar geométrico de una recta en $\mathbb{R}^2$. Se dice que el vector $\vec{v}$ es vector generador de la recta o que la recta está generada por el vector $\vec{v}$. Cualquier múltiplo de $\vec{v}$ (excepto el vector nulo) puede considerarse vector generador de la recta.

Por ejemplo los vectores $(2, 3)$, $(-1, -3/2)$, $(200, 300)$ generan la misma recta.

A la ecuación $\vec{x} = \alpha\vec{v}$ se le denomina **ecuación vectorial** de la recta. Variando α desde menos infinito hasta más infinito el vector $\vec{x}$ recorre todos los puntos de la recta. Por incluir la ecuación un parámetro, el parámetro α, a la ecuación se le denomina también **ecuación vectorial paramétrica**.

Una ecuación vectorial en $\mathbb{R}^2$ se puede escribir como dos ecuaciones escalares, una por componente. A esas ecuaciones las denominamos **ecuaciones paramétricas de la recta**.

Para la recta generada por el vector $\vec{v} = (2, 3)$ la ecuacion vectorial es $\vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \ / \ \alpha \in \mathbb{R}$.

Las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x_1 = 2\alpha \\ x_2 = 3\alpha \end{cases} \quad / \ \alpha \in \mathbb{R}$

En $\mathbb{R}^3$ la ecuación vectorial paramétrica y las ecuaciones paramétricas de la recta generada por el vector $(1, 2, 3)$ son:

- $\vec{x} = \alpha(1, 2, 3) \ / \ \alpha \in \mathbb{R} \quad$ o $\quad \vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \ / \ \alpha \in \mathbb{R}$.

- $\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = 2\alpha \\ x_3 = 3\alpha \end{cases} \quad / \ \alpha \in \mathbb{R}$

Nótese que a partir de dos puntos de la recta (distintos) se puede obtener un segmento orientado en la misma, que tiene la misma dirección que el vector generador y que por tanto es a su vez generador. El resultado es válido obviamente tanto para $\mathbb{R}^2$ como para $\mathbb{R}^3$.

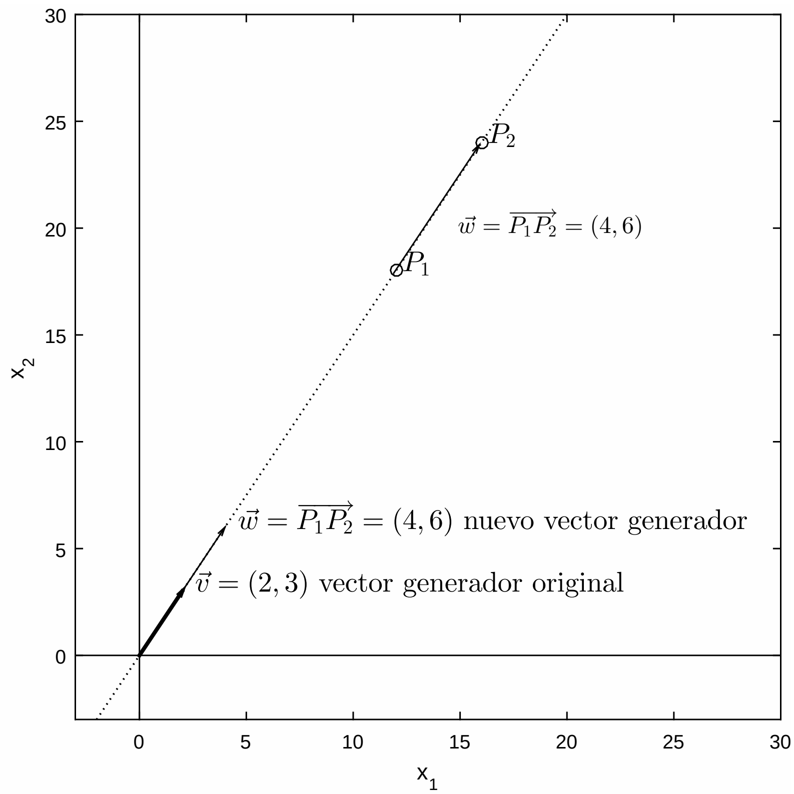
Lo vamos a analizar para el ejemplo en $\mathbb{R}^2$. Escogiendo $\alpha = 6$ tenemos el punto P_1 de la recta, que viene dado por el vector $\vec{p_1} = (12, 18)$. Para $\alpha = 8$ el punto de la recta será P_2 que viene dado por el vector $\vec{p_2} = (16, 24)$.

El vector diferencia $\vec{w} = \vec{p_2} - \vec{p_1} = (16, 24) - (12, 18) = (4, 6)$ es también generador de la recta.

Obviamente a este vector $\vec{w}$ le corresponde una representación en el plano como un segmento orientado con su origen en el punto $(0, 0)$ y extremo en $(4, 6)$, como a cualquier otro vector de $\mathbb{R}^2$.

Teniendo en cuenta cómo ha sido obtenido, también se podría usar la notación $\vec{w} = (4, 6) = \overrightarrow{P_1P_2}$

Desde el punto de vista del Álgebra, cuando situamos el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ con su origen en P_1 estamos considerando un vector trasladado, concretamente el vector $\vec{w} = \overrightarrow{P_1P_2}$ con traslación $\vec{p_1} = \overrightarrow{OP_1}$.



7.2 Recta genérica (no es necesario que pase por el origen)

Los puntos de cualquier recta r' (pase o no por el origen) se pueden expresar vectorialmente en la forma siguiente:

$\vec{x} = \vec{p} + \alpha\vec{v} \ / \ \alpha \in \mathbb{R}$

siendo $\vec{v}$ un vector generador de la recta r paralela a la anterior y que pasa por el origen, y $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, siendo P un punto de la recta r'.

Esta expresión es la ecuación vectorial paramétrica de la recta r'.

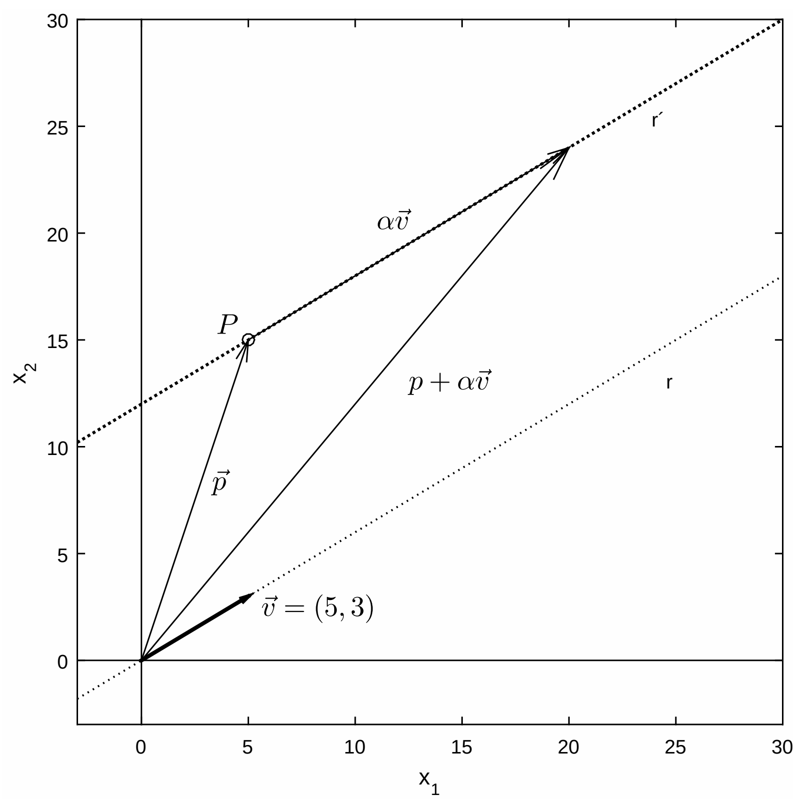
Al igual que para la recta que pasa por el origen, para la recta r' se puede deducir un vector generador a partir de la diferencia de los vectores de posición de dos puntos de la misma.

Ejemplo 7.1. *Obtén la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de la recta generada por $\vec{v} = (5,3)$ que pasa por el punto $P = (5,15)$.*

Observamos que $\overrightarrow{OP} = (5,15)$ no es múltiplo de $\vec{v}$, por tanto la recta no pasa por el origen. Definiendo $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ tenemos que la ec. vectorial es la siguiente:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \ / \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x_1 = 5 + 5\alpha \\ x_2 = 15 + 3\alpha \end{cases} \quad / \ \alpha \in \mathbb{R}$



Ejercicio 7.1. *Consideradas la recta r_1 generada por el vector $\vec{u} = (3,0)$ y la recta r_2 generada por el vector $\vec{v} = (3,10)$, encuentra un vector $\vec{w}$ generador de la recta bisectriz. Comprueba que los ángulos que forma $\vec{w}$ con $\vec{u}$ y con $\vec{v}$ son la mitad del formado entre los dos últimos.*

Lección 8

Ecuación vectorial del plano en E_3

8.1 Plano que contiene el origen

Considerados dos vectores cualesquiera $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$, que formen un conjunto l.i., el lugar geométrico de sus combinaciones lineales es un plano que pasa por el origen.

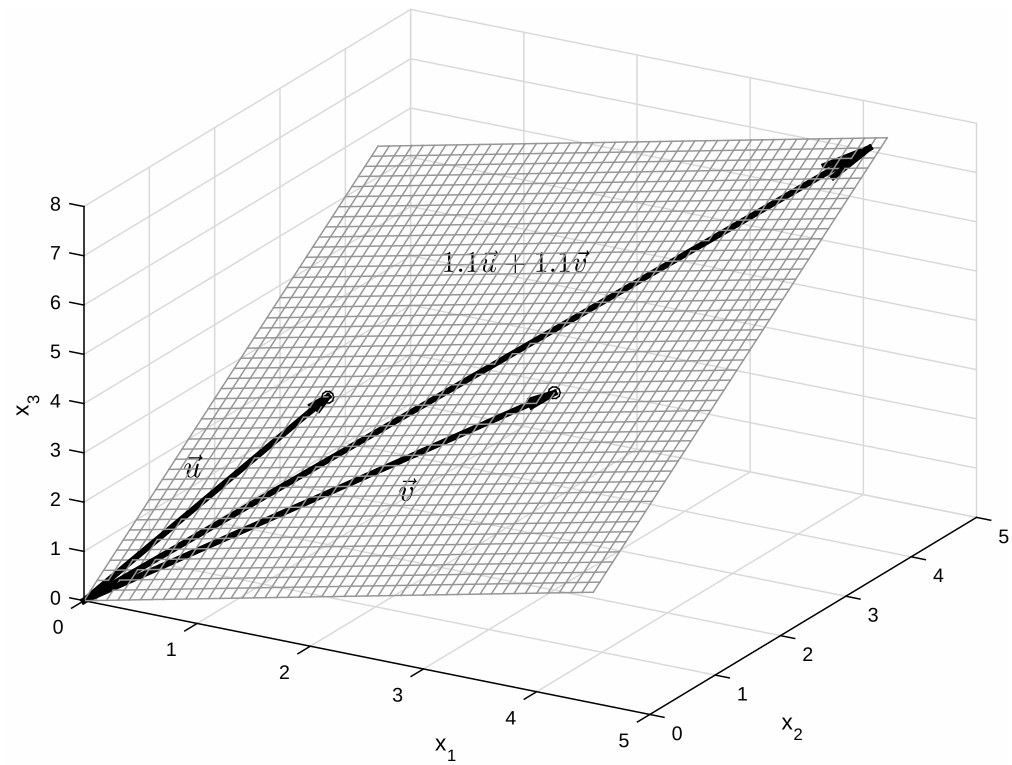
Por ejemplo dados los vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, tendremos que $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ es el lugar geométrico de un plano en $\mathbb{R}^3$ que contiene el $(0,0,0)$. Se dice que el conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es conjunto generador del plano, o que el plano está generado por esos dos vectores. Cualquier par de vectores del plano, l.i. entre sí, es un par generador del mismo.

Por ejemplo los vectores $\vec{u}+\vec{v} = (4,4,7)$ y $\vec{u}-\vec{v} = (-2,0,-1)$ también forman un par que es conjunto generador, porque están dentro del plano y son linealmente independientes.

Considerando el par generador inicial, la **ecuación vectorial** del plano queda:

$$\vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \ / \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Las **ecuaciones paramétricas** son: $\begin{cases} x_1 = 1\alpha + 3\beta \\ x_2 = 2\alpha + 2\beta \\ x_3 = 3\alpha + 4\beta \end{cases} \quad / \ \alpha, \ \beta \in \mathbb{R}$



Nótese que a partir de tres puntos del plano se podría obtener un par de vectores que lo genere, siempre que los tres puntos no estén alineados.

8.2 Plano genérico (no es necesario contenga el origen)

Los puntos de cualquier plano Π' (pase o no por el origen) se pueden expresar vectorialmente en la forma siguiente:

$\vec{x} = \vec{p} + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \ / \ \alpha, \ \beta \in \mathbb{R}$,

siendo $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ el par generador del plano Π que pasa por el origen y es paralelo (o igual) a Π', y $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, siendo P un punto cualquiera del plano Π'.

Al igual que para el plano que pasa por el origen, para el plano Π' se puede deducir un par de vectores generadores a partir de las posiciones de tres puntos P, Q, R en Π' que no estén alineados entre sí.

Ejemplo 8.1. *Obtén la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas del plano H generado por $\vec{u} = (1,2,3)$ y $\vec{v} = (3,2,4)$ y que pasa por el punto $P = (0.5, 0.5, 10)$.*

Sol.:

Sabemos que los puntos (x_1, x_2, x_3) del plano Π generado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y que pasa por el origen cumplen la siguiente ecuación:

$$(x_1, x_2, x_3) = \alpha(1,2,3) + \beta(1,2,4)$$

Si $(0.5, 0.5, 10)$ verifica esta ecuación, es decir, si $\vec{p}$ es c.l. de los vectores generadores, entonces el plano H del enunciado contiene el origen, y por tanto H es el plano Π.

Determinamos a continuación si la ecuación $(0.5, 0.5, 10) = \alpha(1,2,3) + \beta(1,2,4)$ tiene solución para algún par (α,β).

A esta ecuación vectorial le corresponden las 3 ecuaciones escalares siguientes (hemos llevado las incógnitas al primer miembro):

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0.5 \\ 2\alpha + 2\beta = 0.5 \\ 3\alpha + 4\beta = 10 \end{cases}$$

Restando a la segunda ecuación el doble de la primera vemos que queda el siguiente sistema equivalente:

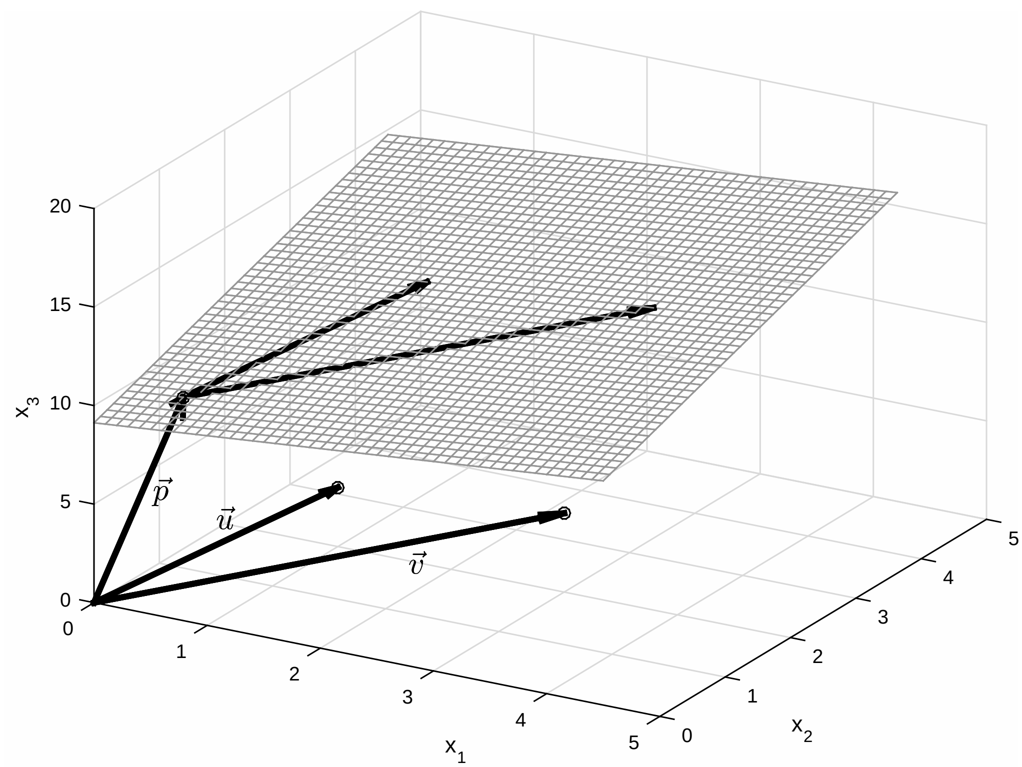
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0.5 \\ 0 + 0 = -0.5 \\ 3\alpha + 4\beta = 10 \end{cases}$$

La segunda ecuación nos indica que el sistema es incompatible, pues $0 \neq -0.5$. Por tanto P no está en el plano Π generado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y que pasa por el origen.

La ecuación vectorial del plano H se debe escribir entonces como:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 10 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \ / \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x_1 = 0.5 + 1\alpha + 3\beta \\ x_2 = 0.5 + 2\alpha + 2\beta \\ x_3 = 10 + 3\alpha + 4\beta \end{cases} \quad / \ \alpha, \ \beta \in \mathbb{R}$



Ejemplo 8.2. *Obtén la ecuación vectorial paramétrica del plano F generado por $\vec{u} = (1,2,3)$ y $\vec{v} = (1,2,4)$ y que pasa por el punto $P = (2,4,7)$.*

Sol.:

Sería correcto escribir directamente la expresión general: $\vec{x} = \vec{p} + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, sin preocuparnos de si el plano pasa por el origen o no.

Quedaría entonces la siguiente ecuación.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \ / \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Sin embargo en este caso el origen está contenido en el plano (nótese que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{p}$), y quedaría más elegante tomar como punto $\vec{p}$ el propio origen de coordenadas, con lo que nos quedaría:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \ / \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{ es decir,} \qquad \vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \ / \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Así la ecuación paramétrica ya nos ilustra, a través de la presencia o no del vector $\vec{p}$, si el plano contiene o no el origen.

Lección 9

Ecuacion implícita del plano en E_3

9.1 Plano que contiene el origen

Dado un plano Π con vectores generadores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, para obtener su forma implícita[1] obtenemos en primer lugar un vector normal al plano, que denotamos como $\vec{n}$, que no es más que un vector ortogonal a todos los vectores del plano. Seguidamente basta imponer que el vector genérico del plano, $\vec{v} = (x, y, z)$, sea ortogonal a $\vec{n}$.

Tenemos dos formas de obtener $\vec{n}$:

1. $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ ha de ser ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ por tanto ha de verificar las ecuaciones:

   $$\begin{cases} u_1n_1 + u_2n_2 + u_3n_3 = 0 \\ v_1n_1 + v_2n_2 + v_3n_3 = 0 \end{cases}$$

   Los elementos u_i y v_i son reales conocidos, por tanto tenemos un sistema de dos ecuaciones lineales homogéneo, con tres incógnitas. Es por tanto compatible indeterminado, con un grado de indeterminación.

   El grado de indeterminación resulta de que hay infinitos vectores ortogonales a los dos dados, todos ellos sobre la misma recta.

   Resolviendo el SL obtendríamos la solución general y escogiendo un valor para el parámetro libre queda determinado el vector $\vec{n}$.

2. Podemos obtener el producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$. Como vector $\vec{n}$ tomaríamos directamente el resultado, o un múltiplo que deje números más sencillos.

Una vez obtenido (n_1, n_2, n_3), la ecuación implícita del plano es: $\quad n_1x + n_2y + n_3z = 0 \quad$ **[1]**

9.2 Plano genérico (no es necesario que contenga el origen)

Al igual que en el caso anterior hay que obtener $\vec{n}$ a partir del par generador del plano paralelo en el origen, que puede ser el mismo. Si del plano sabemos que contiene un punto $P = (p_1, p_2, p_3)$, y $V = (x, y, z)$ es un punto genérico del plano, entonces el vector ortogonal a $\vec{n}$ ya no es (x, y, z), como en el caso anterior, sino $(x, y, z) - (p_1, p_2, p_3)$. Por tanto la ecuación implícita del plano en el caso general es:

$$n_1(x - p_1) + n_2(y - p_2) + n_3(z - p_3) = 0 \quad \textbf{[2]}$$

[1] Recordamos que en general la forma implícita de un lugar geométrico puede venir dada por más de una ecuación o incluso puede requerir inecuaciones.

Desarrollando la ecuación anterior tenemos:

$n_1x + n_2y + n_3z = p_1n_1 + p_2n_2 + p_3n_3$,

que se simplifica en la forma:

$n_1x + n_2y + n_3z = b$, siendo la constante b el segundo miembro de la ec. anterior.

Se trata de una ecuación lineal, como era de esperar ya que la ecuación **[1]** es un caso particular de ésta.

Nótese que b coincide con el producto escalar de los vectores $\vec{p}$ y $\vec{n}$. Distinguimos entonces los dos casos posibles.

- $b = 0$ y la ecuación es homogénea, es decir, estamos en el caso **[1]**, si y solo si $\vec{p}$ y $\vec{n}$ son ortogonales, lo que sucede si y solo si $\vec{p}$ está en el plano Π que pasa por el origen. En ese caso la traslación $\vec{p}$ se realiza "sobre" el plano, por tanto el plano no cambia y $\Pi' = \Pi$.

- Si la traslación no tiene lugar sobre el plano Π, entonces $\Pi' \neq \Pi$, $b \neq 0$ y el SL es no homogéneo.

Ejercicio 9.1. *Encuentre la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos $P = (1, 2, 1)$, $Q = (-2, 3, -1)$ y $R = (1, 0, 4)$. Obtén el centro geométrico de los tres puntos y comprueba que se encuentra sobre el plano.*

Lección 10

Ecuación implícita de la recta en E_2

10.1 Recta que pasa por el origen

Dada una recta r con vector generador $\vec{u}$ para obtener su forma implícita tenemos dos procedimientos:

1. Obtenemos en primer lugar un vector ortogonal a $\vec{u}$, que denotamos como $\vec{n}$.

   Las componentes de $\vec{n}$ se deducen de la ecuación $u_1n_1 + u_2n_2 = 0$ **[1]**

   $\vec{n}$ es ortogonal a todo vector $\vec{v} = (x, y)$ de la recta, por tanto la ecuación de la recta será $n_1x + n_2y = 0$ **[2]**

   Es una ecuación lineal homogénea con un parámetro libre. De hecho, resolviéndola obtendríamos sus pares de puntos (x, y) en forma paramétrica, y por tanto su vector generador.

   Distinguimos tres casos respecto de la obtención de $\vec{n}$ (ec. **[1]**):

   - Si u_1 y u_2 son ambos no nulos, entonces despejamos en **[1]** $n_1 = -u_2/u_1n_2$. Tomando para el parámetro libre n_2 el valor 1 tenemos el vector normal $\vec{n} = (-u_2/u_1, 1)$
   - Si una de las componentes es nula (tomamos por ejemplo la segunda), entonces la ec. **[1]** queda $u_1n_1 = 0$ y al ser $u_1 \neq 0$ se deduce $n_1 = 0$. n_2 es parámetro libre (no hay ninguna ecuación que lo determine). Escogiendo $n_2 = 1$ tendríamos $\vec{n} = (0, 1)$
   - Razonando como en el apartado anterior, si $u_1 = 0$, entonces $\vec{n} = (1, 0)$.

   Ya podemos escribir la ecuación **[2]** como función de las componentes del vector $\vec{u}$ original, separando los tres casos:

   - $-u_2/u_1x + y = 0$ **[2a]** También se escribe como $y = u_2/u_1x$, que es la forma denominada punto-pendiente.
   - $0x + y = 0$ **[2b]** La ecuación que queda es $y = 0$
   - $x + 0y = 0$ **[2c]** La ecuación que queda es $x = 0$

2. Las ecuaciones paramétricas de la recta son: $\begin{cases} x = u_1\alpha \\ y = u_2\alpha \end{cases}$

   De nuevo distinguimos tres casos:

   - Si u_1 y u_2 son ambos no nulos podemos despejar α de un punto dado, que será por la primera coordenada $\alpha = x/u_1$ y por la segunda $\alpha = y/u_2$.

     Igualando las dos ecuaciones tenemos la relación entre las coordenadas x e y del punto: $x/u_1 = y/u_2$, que se puede reescribir como la ec. **[2a]**

- Si una de las componentes es nula (tomamos por ejemplo la segunda), entonces las ecuaciones paramétricas quedan: $x = u_1\alpha$, $y = 0$. Vemos que x es parámetro libre, pues α recorre todo $\mathbb{R}$. La única ecuación resultante es $y = 0$, que es la ec. **[2b]**.
- Razonando como en el apartado anterior, si $u_1 = 0$ llegamos a la ecuación $x = 0$ que es la **[2c]**.

RESUMEN: Dado $\vec{u} = (u_1, u_2)$ vector generador de r, entonces
Si u_1 y u_2 son no nulos, la ecuación implícita de r es $-u_2/u_1x + y = 0$
Si $u_1 = 0$ la ecuación implícita de r es $x = 0$
Si $u_2 = 0$ la ecuación implícita de r es $y = 0$

10.2 Recta genérica (no es necesario que pase por el origen)

Podría obtenerse por los dos métodos del apartado anterior, pero solo presentamos la deducción para el primer método. Ya que la recta r' puede no pasar por el origen necesitamos dos datos, pues además de su vector generador $\vec{u}$ tenemos que incluir un punto $P = (p_1, p_2)$ incluido en ella.

La obtención del vector $\vec{n}$ se realiza como en el apartado anterior, distinguiendo los tres casos. La ec. **[2]** sin embargo varía, ya que ahora la condición sobre $\vec{n}$ es la de ser ortogonal a $(x, y) - (p_1, p_2)$.

La nueva ecuación es: $n_1(x - p_1) + n_2(y - p_2) = 0$ **[3]**

Sustituyendo las componentes de $\vec{n}$ para los tres casos tenemos:

- $-u_2/u_1(x - p_1) + y - p_2 = 0$ **[3a]** También se escribe como $y = u_2/u_1(x - p_1) + p_2$, que es la forma punto-pendiente.
- $0(x - p_1) + y - p_2 = 0$ **[3b]** La ecuación que queda es $y = p_2$
- $x - p_1 + 0(y - p_2) = 0$ **[3c]** La ecuación que queda es $x = p_1$

Las ecuaciones **[3a]** **[3b]** **[3c]** son las ecuaciones más generales. Si se toma $\vec{p} = \vec{0}$ o cualquier otro vector $\vec{p}$ múltiplo de $\vec{u}$ estas ecuaciones se reducen a las ecuaciones **[2a]** **[2b]** **[2c]**.

Ejemplo 10.1. *Obtén la ecuación implícita de la recta r y la de la recta s. Ambas rectas están generadas por $\vec{v} = (5, 3)$. r pasa por el punto $P = (5, 15)$ y s por $Q = (15, 9)$.*

Sol.:

Lo resolveremos partiendo de las ecuaciones paramétricas.

- *Recta r:* $\begin{cases} x_1 = 5 + 5\alpha \\ x_2 = 15 + 3\alpha \end{cases} \quad / \ \alpha \in \mathbb{R}$

  Cada punto de r (un valor fijo de α) verifica $\dfrac{x_1 - 5}{5} = \dfrac{x_2 - 15}{3}$

  Esta es la ecuación implícita, que podemos reescribir de forma más compacta cómo:

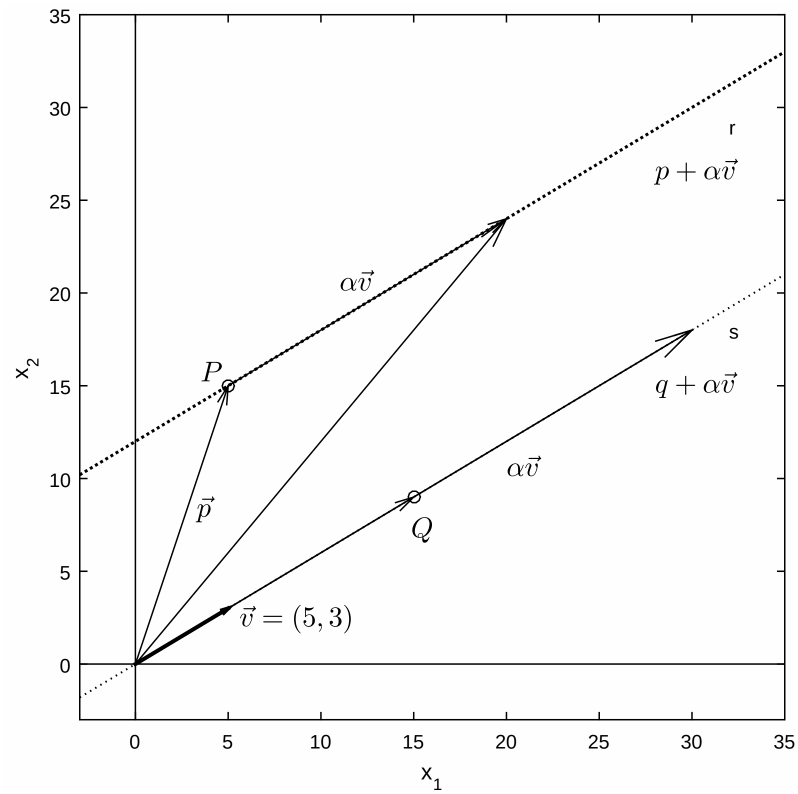
  $3x_1 - 5x_2 = -15 \times 5 + 5 \times 3 = 5 \times (-12) = -60$ $\qquad 3x_1 - 5x_2 = -60$

- *Recta s:* $\begin{cases} x_1 = 15 + 5\alpha \\ x_2 = 9 + 3\alpha \end{cases} \quad / \ \alpha \in \mathbb{R}$

  Cada punto de r (un valor fijo de α) verifica $\dfrac{x_1 - 15}{5} = \dfrac{x_2 - 9}{3}$

En forma más compacta: $3x_1 - 5x_2 = -45 + 45 = 0$ $\qquad$ $3x_1 - 5x_2 = 0$

La recta s pasa por el origen. Es obvio que (0,0) cumple la ecuación.



Lección 11

Forma implícita de la recta en E_3

Consideramos la recta con vector director $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ que pasa por $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$. Se permite que $\vec{p}$ sea el vector cero o que sea proporcional a $\vec{u}$ para incluir todas las rectas, pasando o no por el origen.

Las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x_1 = p_1 + \alpha u_1 \\ x_2 = p_2 + \alpha u_2 \\ x_3 = p_3 + \alpha u_3 \end{cases} \quad / \ \alpha \in \mathbb{R}$ **[1]**

A continuación distinguimos tres casos:

- Si las tres componentes de $\vec{u}$ son no nulas, entonces podemos reescribir las ecuaciones anteriores de esta forma:

  $$\begin{cases} \frac{x_1 - p_1}{u_1} = \alpha \\ \frac{x_2 - p_2}{u_2} = \alpha \\ \frac{x_3 - p_3}{u_3} = \alpha \end{cases} \quad / \ \alpha \in \mathbb{R}$$

  A cada valor de α le corresponde un punto de la recta, y en cada punto se cumple:
  $\frac{x_1 - p_1}{u_1} = \frac{x_2 - p_2}{u_2} = \frac{x_3 - p_3}{u_3} = \alpha$

  Las dos primeras igualdades dan lugar a dos ecuaciones independientes. Esas dos ecuaciones, que forman un SL, son las ecuaciones de la recta.

- Si dos componentes de $\vec{u}$ son no nulas, entonces podemos reescribir las ecuaciones **[1]** de esta forma (hemos tomado que la nula es la tercera, pero el razonamiento que sigue sería similar si la nula fuera otra):

  $$\begin{cases} \frac{x_1 - p_1}{u_1} = \alpha \\ \frac{x_2 - p_2}{u_2} = \alpha \\ x_3 - p_3 = 0 \end{cases} \quad / \ \alpha \in \mathbb{R}$$

  Nos queda entonces el siguiente par de ecuaciones lineales:
  $\frac{x_1 - p_1}{u_1} = \frac{x_2 - p_2}{u_2} \qquad x_3 = p_3$

- Si dos componentes de $\vec{u}$ son nulas, entonces podemos reescribir las ecuaciones **[1]** de esta forma (hemos tomado la primera como no nula, pero el razonamiento que sigue sería similar si la no nula fuera otra):

$$\begin{cases} \frac{x_1-p_1}{u_1} = \alpha \\ x_2 = p_2 \\ x_3 = p_3 \end{cases} \quad / \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Las ecuaciones de la recta son las dos últimas, que forman un SL. x_1 es parámetro libre.

A modo de síntesis, dependiendo del número de componentes nulas del vector generador $\vec{u}$ de la recta tenemos tres casos:

- Si todas las componentes son no nulas las ecuaciones son:

$$\frac{x_1 - p_1}{u_1} = \frac{x_2 - p_2}{u_2}$$

$$\frac{x_2 - p_2}{u_2} = \frac{x_3 - p_3}{u_3}$$

- Si la componente i es nula las ecuaciones son:

$$\frac{x_j - p_j}{u_j} = \frac{x_k - p_k}{u_k}$$

$$x_i = p_i$$

- Si las componentes i y j son nulas las ecuaciones son:

$$x_i = p_i$$

$$x_j = p_j$$

En los tres casos se encuentra un SL de la forma: $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = d' \end{cases}$ **[2]**,

donde el valor de las constantes $a, b, c, d, a', b', c', d'$ dependerá de los valores de las componentes de $\vec{u}$ y de $\vec{p}$.

El SL será homogéneo, es decir $d = d' = 0$, si y sólo si $\vec{u}$ y $\vec{p}$ son l.d., es decir, si la recta pasa por el origen.

Resolviendo el SL [**2**] encontraríamos como solución general los puntos (x_1, x_2, x_3) de la recta, en la forma paramétrica dada en [**1**].

Cada ecuación lineal en [**2**] es la ec. implícita de un plano en E_3, es decir, la primera correspondería a un plano Π_1 y la segunda a un plano Π_2. La recta, por cumplir las dos ecuaciones, es la intersección de esos dos planos.