Lección 4

Matriz de proyección ortogonal

La proyección ortogonal de $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ sobre W es un endomorfismo en $\mathbb{R}^n$, por tanto tiene una matriz asociada P_r tal que

$$P_r\vec{v} = \hat{\vec{v}} \qquad\qquad P_r \text{ es cuadrada de orden } n$$

Veremos a continuación como obtener dicha matriz, partiendo del siguiente dato: $B = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_d\}$ es <u>base</u> de W.

4.1 Primera obtención de la matriz de proyección

Definiendo la matriz $P_B = [\ \vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \ldots\ \vec{b}_d\ ]$ tenemos:

$P_B\vec{c} = \hat{\vec{v}}$, siendo $\vec{c}$ las coordenadas respecto de la base B del vector proyectado.

La descomposición ortogonal puede definirse por la siguiente ecuación: $\hat{\vec{v}} \cdot (\vec{v} - \hat{\vec{v}}) = 0$, que expresa que $\hat{\vec{v}} \in W$ y $(\vec{v} - \hat{\vec{v}}) \in W^\perp$ son ortogonales entre sí.

La reescribimos en función de P_B, $\vec{v}$ y $\vec{c}$ en la forma siguiente:

$$P_B\vec{c} \cdot (\vec{v} - P_B\vec{c}) = 0$$

Desarrollando el producto escalar:

$$(P_B\vec{c})^t(\vec{v} - P_B\vec{c}) = 0 \qquad \vec{c}^{\,t}P_B^t(\vec{v} - P_B\vec{c}) = 0 \qquad \vec{c}^{\,t}(P_B^t\vec{v} - P_B^tP_B\vec{c}) = 0$$

La última ecuación se verifica para todo vector $\vec{v}$ y por tanto para todos los valores posibles de las coordenadas de su proyección, que forman el vector $\vec{c}$, por tanto ha de anularse el factor (vector) de la derecha. Expresado de otra manera, el único vector que es ortogonal a todos los vectores $\vec{c} \in \mathbb{R}^d$ es el vector $\vec{0}$ de $\mathbb{R}^d$.

$$P_B^t\vec{v} - P_B^tP_B\vec{c} = \vec{0} \text{ y por tanto } P_B^t\vec{v} = P_B^tP_B\vec{c}$$

Por otra parte, la matriz $P_B^tP_B$ [1] es invertible, por tanto podemos premultiplicar los dos miembros por $(P_B^tP_B)^{-1}$, obteniendo:

$$(P_B^tP_B)^{-1}P_B^t\vec{v} = \vec{c}$$

Premultiplicando ahora por P_B para que a la derecha nos quede el vector proyectado, tenemos:

$$P_B(P_B^tP_B)^{-1}P_B^t\vec{v} = P_B\vec{c} = \hat{\vec{v}}$$

Por tanto la matriz de la proyección ortogonal es $\boxed{P_r = P_B(P_B^tP_B)^{-1}P_B^t}$, pues $P_r\vec{v} = \hat{\vec{v}}$.

Es obvio que la matriz $P_B^tP_B$ es simétrica[2]

[1] M^tM es invertible si y solo si las columnas de M son linealmente independientes
[2] $(M^tM)^t = M^t(M^t)^t = M^tM$

Desarrollamos seguidamente el producto $P_B^t P_B$:

$$P_B^t P_B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vdots \\ \vec{b}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_d \\ \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_d \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \vec{b}_d \cdot \vec{b}_1 & \vec{b}_m \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_d \cdot \vec{b}_d \end{bmatrix}$$

(también podríamos deducir de aquí que como el producto escalar es simétrico, la matriz $P_B^t P_B$ es simétrica.)

En el desarrollo de $P_B^t P_B$ vemos de forma inmediata que si la base B es ortogonal $P_B^t P_B$ es una matriz diagonal, y que <u>si la base es ortonormal</u> $P_B^t P_B = I$. En este último caso la matriz de proyección queda: $\boxed{P_r = P_B P_B^t}$.

4.2 Algunas propiedades de la matriz de proyección ortogonal

1. P_r es simétrica

   Demostración:

   $P_r^t = (P_B(P_B^t P_B)^{-1} P_B^t)^t = P_B[(P_B^t P_B)^{-1}]^t P_B^t = P_B[(P_B^t P_B)^t]^{-1} P_B^t = P_B(P_B^t P_B)^{-1} P_B^t = P_r$

   En el Tema 1 vimos que dada P invertible $(P^{-1})^t = (P^t)^{-1}$.

2. P_r es idempotente, es decir $P_r^2 = P_r$

   Demostración:

   $P_r^2 = P_B(P_B^t P_B)^{-1} P_B^t P_B (P_B^t P_B)^{-1} P_B^t = P_B(P_B^t P_B)^{-1} P_B^t = P_r$

4.3 Obtención de la matriz de proyección a partir de su semejante diagonal

Este procedimiento lo hemos utilizado en temas anteriores al estudiar la proyección ortogonal sobre una recta en $\mathbb{R}^2$ y sobre un plano en $\mathbb{R}^3$. Aquí lo extendemos para $\mathbb{R}^n$ y subespacios de $\mathbb{R}^n$ de cualquier dimensión.

En primer lugar tenemos que obtener, a partir de la base B del subespacio considerado W, una base C de $W^\perp$, resolviendo el SL $P_B^t \vec{x} = \vec{0}$, o lo que es lo mismo, obteniendo una base de Nul(P_B^t).

Así tenemos ya las bases de los dos subespacios propios ortogonales entre sí :

Col(P_B) es el subespacio propio de autovalor 1, V_1

Col(P_C) es el subespacio propio de autovalor 0, V_0

Una vez obtenida esa base creamos la matriz cuadrada $P = [P_B\ P_C] = [\,\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \dots\ \vec{b}_d\ \vec{b}_{d+1}\ \vec{b}_{d+2}\ \dots\ \vec{b}_n\,]$, en la que las columnas son obviamente la base de $\mathbb{R}^n$ formada por los autovectores de la proyección ortogonal.

P_r se obtiene entonces con la factorización $P_r = PDP^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$

Al ser los subespacios propios ortogonales, P_r admite diagonalización ortogonal, ya que se puede obtener una base ortonormal de autovectores. Tomando la matriz Q que tiene por columnas esa base ortonormal se obtendría $P_r = QDQ^t$.

Ejemplo 4.1. *Obtén en* $\mathbb{R}^4$ *la matriz de la proyección ortogonal,* P_r*, sobre el subespacio generado por las columnas de la matriz* A*.*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Utilizando esta matriz, obtén la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (15, 10, 3, -5)$*.*

En este ejercicio se determina la matriz de proyección correspondiente al Ejemplo 2.24 de este tema.

Sol. método 1:

Las columnas de A *no son una múltiplo de otra, por tanto las columnas de* A *son base del subespacio generado por las columnas de* A*.*

La matriz de proyección ortogonal sobre este subespacio es:

$$P_r = A(A^tA)^{-1}A^t$$

$$A^tA = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 22 \end{bmatrix}$$

$$(A^tA)^{-1} = \begin{bmatrix} 11/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$P_r = A(A^tA)^{-1}A^t = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 & -1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

$$P_r\ \vec{v} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 & -1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57/4 \\ 17/4 \\ -17/4 \\ -23/4 \end{bmatrix}$$

Sol. método 2: *A partir de su semejante diagonal.*

- *La base de* V_1 *son las dos columnas de* A*.*
- *La base de* V_0 *es la base del complemento ortogonal de* V_1*. Tomamos el resultado del Ejemplo 2.24:* $B = \{(1, -2, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}$

$$P_r = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 & -1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

Lo hemos resuelto con una diagonalización general, no ortogonal.