

Lección 3

Diagonalización ortogonal de matrices simétricas

3.1 Caracterización de las matrices ortogonales

En el Tema 1 se presentó la definición de matriz ortogonal Q como aquella que verifica $Q^t Q = Q Q^t = I$, es decir, tal que $Q^{-1} = Q^t$.

Por ser Q una matriz invertible, sus columnas $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ forman una base de \mathbb{R}^n , y podemos

escribir Q cómo: $Q = [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \dots \ \vec{b}_n]$ quedando por tanto $Q^t = \begin{bmatrix} \vec{b}_1^t \\ \vec{b}_2^t \\ \vdots \\ \vec{b}_n^t \end{bmatrix}$

Desarrollando $Q^t Q$ obtenemos:

$$Q^t Q = \begin{bmatrix} \vec{b}_1^t \\ \vec{b}_2^t \\ \vdots \\ \vec{b}_n^t \end{bmatrix} [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \dots \ \vec{b}_n] = \begin{bmatrix} \vec{b}_1^t \vec{b}_1 & \dots & \vec{b}_1^t \vec{b}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{b}_n^t \vec{b}_1 & \dots & \vec{b}_n^t \vec{b}_n \end{bmatrix} = I \Leftrightarrow \vec{b}_i^t \vec{b}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$\vec{b}_i^t \vec{b}_j$ es la expresión del producto escalar canónico en \mathbb{R}^n definido por:

$$\vec{b}_i^t \vec{b}_j = [b_i^1 \ b_i^2 \ \dots \ b_i^n] \begin{bmatrix} b_j^1 \\ b_j^2 \\ \vdots \\ b_j^n \end{bmatrix} = b_i^1 b_j^1 + b_i^2 b_j^2 + \dots + b_i^n b_j^n = \sum_{k=1}^n b_i^k b_j^k$$

(Los superíndices indican las componentes del vector).

Por tanto Q ortogonal $\Leftrightarrow \vec{b}_i^t \vec{b}_j = \delta_{ij} \Leftrightarrow B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ es base ortonormal respecto al producto escalar canónico en \mathbb{R}^n .

Concluimos que una matriz real invertible Q es **ortogonal si y sólo si sus columnas son base ortonormal respecto del producto escalar canónico en \mathbb{R}^n** .

Por la propiedad de que si Q es ortogonal Q^t también lo es, tenemos que también se cumple que Q es **ortogonal si y sólo si sus filas son base ortonormal respecto del producto escalar canónico en \mathbb{R}^n** .

Ejemplo 3.1. Demuestra que la matriz $P = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$ es ortogonal.

Solución con dos métodos:

- Efectuando $P^t P$ obtenemos la matriz I .
- Denotando $\vec{b}_1 = (4/5, -3/5)$ y $\vec{b}_2 = (3/5, 4/5)$ se obtiene:

$$\vec{b}_1^t \vec{b}_2 = 0 \quad y \quad \vec{b}_1^t \vec{b}_1 = \vec{b}_2^t \vec{b}_2 = 1$$

3.2 Diagonalización ortogonal de las matrices simétricas

- Se cumple el siguiente resultado para una matriz cuadrada real A : Si A es simétrica, entonces existen Q ortogonal y D diagonal tales que $A = QDQ^{-1}$. D es la matriz de autovalores, y Q es una base de autovectores que es además base ortonormal.

Teniendo en cuenta que $Q^{-1} = Q^t$, podemos expresar la factorización anterior en la forma $A = QDQ^t$. ~~quedando una factorización diagonal~~

Por existir la matriz ortogonal Q tal que $A = QDQ^{-1}$ se dice de A que es ‘ortogonalmente diagonalizable’.

El resultado arriba indicado para toda matriz A real y simétrica de orden n , lo podemos desglosar en las siguientes propiedades:

La ec. característica de A tiene n raíces reales

1. A tiene n raíces reales contando multiplicidades, por tanto n autovalores reales contando multiplicidades.
2. La dimensión de los subespacios propios es igual a la multiplicidad algebraica de los correspondientes autovalores. Como consecuencia de este y el anterior resultado se tiene que A es diagonalizable.

(Estos dos resultados se presentaron en el Tema 5).

3. Los subespacios propios correspondientes a autovalores distintos son ortogonales entre sí respecto del producto escalar canónico en \mathbb{R}^n .

(Este resultado se ha justificado en la Lección 2 de este tema).

4. Obteniendo para cada subespacio propio una base ortogonal¹, y uniendo estas bases, lograremos una base ortogonal de \mathbb{R}^n formada por autovectores de A . Dividiendo cada vector por su norma obtendremos finalmente una base ortonormal de \mathbb{R}^n formada por autovectores. La matriz Q de la factorización

$A = QDQ^{-1} = QDQ^t$ es $Q = [\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n]$ siendo $\{\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n\}$ una base ortonormal de autovectores.

- Se puede demostrar fácilmente que se cumple el resultado recíproco: A ortogonalmente diagonalizable implica A simétrica. En efecto, considerando $A = QDQ^t$ y tomando traspuestas obtenemos $A^t = (QDQ^t)^t = QDQ^t = A$, por tanto la existencia de diagonalización ortogonal implica que la matriz A ha de ser simétrica.

Conclusión: A es simétrica si y sólo si A es ortogonalmente diagonalizable.

¹Está demostrado que los vectores de subespacios propios distintos son ortogonales entre sí, pero dentro de un mismo subespacio propio de dimensión mayor o igual que 2 debemos elegir una base ortogonal.

Ejemplo 3.2. Diagonalizar ortogonalmente la matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Sol:

Se obtiene a partir de la ecuación característica que los valores propios son $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 6$. Por ser los tres valores propios distintos la matriz tiene 3 subespacios propios de dimensión 1:

Resolviendo los SLs $[A - \lambda I \mid \vec{0}]$ para encontrar los subespacios propios obtenemos:

$$V_8 = \langle (1, -1, 0) \rangle \quad V_3 = \langle (1, 1, 1) \rangle \quad V_6 = \langle (1, 1, -2) \rangle$$

Se comprueba fácilmente que los tres vectores son ortogonales respecto del producto escalar habitual.

La matriz $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2\sqrt{6} \end{bmatrix}$ es ortogonal, y por tanto la matriz A se puede factorizar

en la forma $A = PDP^t$, con $D = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Ejemplo 3.3. Diagonalizar ortogonalmente la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, cuya ecuación característica es $0 = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98 = -(\lambda - 7)^2(\lambda + 2)$

Sol:

La matriz A es real y simétrica por tanto sabemos que los subespacios propios son mutuamente ortogonales y que existe base ortogonal de \mathbb{R}^3 formada por autovectores de A .

El enunciado nos da el polinomio característico factorizado, por tanto ya sabemos que los autovalores

$$\text{son: } \begin{cases} \lambda = -2 & \text{simple} \\ \lambda = 7 & \text{doble} \end{cases}$$

Debemos obtener en primer lugar una base de V_{-2} , que tendrá un único vector \vec{v}_1 , y una base ortogonal de V_7 , que tendrá dos vectores \vec{v}_2 y \vec{v}_3 . Para ello hay que resolver los SLs $[A + 2I \mid \vec{0}]$ y $[A - 7I \mid \vec{0}]$ respectivamente.

- $V_{-2} = \{(-z, -1/2 z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$, de donde $\vec{v}_1 = (2, 1, -2)$

Normalizando \vec{v}_1 obtenemos: $\vec{u}_1 = (2/3, 1/3, -2/3)$

- $V_7 = \{(x, -2x + 2z, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$

De aquí podemos obtener el vector $\vec{v}_2 = (1, -2, 0)$. El vector $(0, 2, 1)$ es un vector de V_7 que forma base con el anterior, sin embargo estos dos vectores no son ortogonales ya que su producto escalar es -4

Para obtener un vector \vec{v}_3 que pertenezca a V_7 y sea ortogonal a \vec{v}_2 tenemos que resolver la ecuación:

$$\vec{v}_3 \cdot (1, -2, 0) = (x, -2x + 2z, z) \cdot (1, -2, 0) = x + 4x - 4z = 5x - 4z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{5}{4}x$$

Sustituyendo $z = \frac{5}{4}x$ en la expresión de los vectores de V_7 obtenemos:

$$\vec{v}_3 = (x, -2x + 2 \cdot \frac{5}{4}x, \frac{5}{4}x) = (x, \frac{1}{2}x, \frac{5}{4}x) \text{ con } x \text{ parámetro}$$

Tomando $x = 4$ $\vec{v}_3 = (4, 2, 5)$.

$$\text{Normalizando } \vec{v}_2 \text{ y } \vec{v}_3 \text{ obtenemos: } \begin{cases} \vec{u}_2 = (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}, 0) \\ \vec{u}_3 = (4/\sqrt{45}, 2/\sqrt{45}, 5/\sqrt{45}) \end{cases}$$

Por ser la matriz A real y simétrica V_7 y V_{-2} son ortogonales, y por tanto \vec{u}_2 y \vec{u}_3 además de ser ortogonales entre sí son ortogonales a \vec{u}_1 .

La matriz $P = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} \\ 1/3 & -2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45} \\ -2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{bmatrix}$ es ortogonal, y se verifica $A = PDP^t$, con

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que V_7 se podría haber obtenido directamente como el complemento ortogonal de V_{-2} , por ser la matriz A simétrica, y ser V_7 y V_{-2} sus dos únicos subespacios propios.